MESURES I PROBABILITATS

EN ESTRUCTURES ORDENADES

Maria Congost Iglesias

Memòria presentada per optar al grau de Doctor en Matemàtiques per la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.

CAPITOL 2

Integració respecte a una σ-mesura.

1. CONDICIONS GENERALS SOBRE EL MÈTODE D'EXTENSIÓ DE DANIELL.

Sigui R un ℓ-anell; G un ℓ-mòdul per l'esquerra sobre R. En tot el que segueix considerarem només mòduls per l'esquerra sense fer-ne mencio explícita; la teoria podria desenvoluparse igualment per a mòduls per la dreta.

Per a aquest capítol adoptem les següents notacions: G_+ designa el con dels positius de G; si $L \subset G$, $P(L)$ designa el conjunt $L \cap G_+ = \{x \in L;\ x \geqslant 0\}$; en general $L_+ \subset G$ significarà que els elements de L_+ són positius. A cada subconjunt $L_+ \subset G$ li associem els dos conjunts $L = L_+ - L_+$ i $L' = \{x \in G;\ x^+,\ x^- \in L_+\}$.

2.1.1. Proposició. Sigui L_+ un subsemigrup subreticulat de G estable pel producte per elements de R_+. Aleshores

a) El conjunt L és un ℓ-submodul de G.

b) El conjunt L' és estable per les operacions reticulars però no per la suma en general. De fet $P(L') = L_+$, de manera que són equivalents,

b_1) $L' = L$,

b_2) $P(L) = L_+$,

b_3) L' és estable per la suma.

En efecte:

a) Que L és subgrup és immediat ja que si $x = x_1 - x_2$ i $y = y_1 - y_2$ amb $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L_+$ aleshores $x - y = (x_1 + y_2) - (x_2 + y_1) \in L_+ - L_+$. Quant a ser subreticular, basta veure que $x^+ \in L_+$ per a qualsevol $x \in L$. Ara bé, $x^+ = (x_1 - x_2)^+ = x_1 \vee x_2 - x_2 \in L_+ - L_+ = L$.

b) De la definició de L' i de les igualtats, vàlides a G, $(x \vee y)^+ = x^+ \vee y^+$, $(x \vee y)^- = x^- \wedge y^-$, $(x \wedge y)^+ = x^+ \wedge y^+$, $(x \wedge y)^- = x^- \vee y^-$,

se'n segueix que L' és un subreticle de G. A partir de la definició també és clar que $P(L') = L_+$. D'aquí l'equivalencia de b_1 amb b_2. Pel que fa a la de b_1 amb b_3 només cal observar que si L' és estable per la suma, aleshores $L = L_+ - L_+ \subset L' - L' = L'$ i per tant $L' = L$; recíprocament, si $L = L'$, aleshores L' és ℓ-subgrup.■

Observació: En l'apartat b) de la Proposició anterior diem que en general L' no és estable respecte la suma ó, pel que hem vist, que $P(L) \neq L_+$. Efectivament, consideri's el següent

2.1.2. Exemple. Sigui $R=\mathbb{R}$ i G l'espai vectorial reticular de les funcions reals definides en $[0,1]$. Aleshores el conjunt L_+ de les funcions $f:[0,1]\to \mathbb{R}_+$ inferiorment semi-contínues és un subsemigrup subreticulat estable pel producte per elements de $\mathbb{R}_+$ ([12], Cap. XII) pel qual $P(L) \neq L_+$.

En efecte: Per a cada $r\in[0,1]$ sigui la funció $f_r:[0,1]\to \mathbb{R}$ definida per $f_r(x)=0$ si $x=r$ i $f_r(x)=1$ si $x\neq r$. Cada f_r és de L_+. Les funcions constants positives també són de L_+. Per tant si $r\neq s$, la funció $g=1+f_r-f_s\in L$, $g\geqslant 0$ i $g\notin L_+$.

2.1.3. Proposició. Tot morfisme d'ordre positivament homogeni $I:L_+ \to R_+$ definit en un subsemigrup subreticular L_+ de G, estable pel producte per elements positius de R admet una única extensió com a morfisme d'ordre homogeni al ℓ-submòdul L, i per tant a L'.

En efecte:

Si $x=x_1-x_2$ amb $x_1, x_2 \in L_+$ i $I':L \to R$ ha d'estrendre a $I:L_+ \to R_+$ sent morfisme de grup, només pot estar definit per $I'(x_1-x_2) = I(x_1)-I(x_2)$. És immediat que així definit I' té les propietats desitjades pel que fa a la monotonia, al ser morfisme de grup i a la independència de l'expressió d'un element de L com a diferència de dos elements de L_+ (la demostració és anàloga a la que fa referència a l'extensió d'un morfisme d'ordre homogeni definit entre els cons dels positius de dos ℓ-grups, a un morfisme d'ordre i de grup entre els dos ℓ-grups).

Quant al producte per elements de R, tenim, si $a\in R_+$, $ax=(a^+x_1+a^-x_2)-(a^+x_2+a^-x_1)$, on cadascun dels termes entre parèntesi és un element de L_+, de manera que, de la definició i de les propietats de I en L_+ se'n segueix que $I'(ax)=I(a^+x_1+a^-x_2)-$
$-I(a^+x_2+a^-x_1) = a^+I(x_1)+a^-I(x_2)-a^+I(x_2)-a^-I(x_1)=aI(x_1)-aI(x_2)=$
$=aI'(x)$.■

Com és usual designem l'extensió de I amb la mateixa lletra I.

Suposem a partir d'ara que G i R són σ-c.c. i que el producte en G per elements de R és seqüencialment o-continu.

<u>2.1.4. Definicions i notacions.</u> Sigui L un ℓ-submòdul de G i sigui $L_+=P(L)$. L_+ és un subsemigrup subreticulat estable pel producte per elements positius de R. Considerem un morfisme d'ordre positivament homogeni $I:L_+ \to R_+$ seqüencialment o-continu. Diem que una <u>successió</u> $\{x_n\}\subset L_+$ és <u>I-afitada</u> si la successió $\{I(x_n)\}$ es o-afitada en R_+.

Designem per $\underline{M_+}$ el conjunt dels elements $x\in R'$ pels quals existeix una successió $\{x_n\}\subset L_+$ tal que $x_n \uparrow x$. En aquest cas diem que $\{x_n\}$ determina x.

El conjunt d'elements $x\in M_+$ que admeten una successió determinant $\{x_n\}\subset L_+$ I-afitada el designem per $\underline{L_\sigma(I)}$. Sigui $\underline{L_\omega(I)}=L_\sigma(I)-L_\sigma(I)$; $\underline{L_{\bar\omega}(I)}=\{x\in G;\ x^+, x^-\in L_\sigma(I)\}$.

Designem per $\underline{L_\delta(I)}$ el conjunt dels elements $x\in G$ pels quals existeix una successió $\{x_n\}\subset L_+$ tal que $x_n\downarrow x$.

Observi's que M_+ i L_δ són respectivament la σ-clausura i la δ-clausura de L_+.

Si la referència a I es pot donar per sobreentesa, escriurem $L_\sigma, L_\omega, L_{\bar\omega}$ en lloc de $L_\sigma(I)$, $L_{\bar\omega}(I)$ i $L_{\bar\omega}(I)$ respectivament.

<u>2.1.5. Proposició.</u> Se satisfan les següents propietats:

a) L_σ, L_δ i M_+ són subsemigrups subreticulats de G, estables pel producte per elements de R_+.

b) Si $x,y\in M_+$, $0\leqslant x\leqslant y$ i $y\in L_\sigma$ aleshores $x\in L_\sigma$.

c) L_ω és un ℓ-submòdul de G que conté L_δ; $L_{\bar\omega}$ és subreticle de R'.

d) Si $x\in L_\sigma$ i $y\in L_\delta$, aleshores $x-y\in L_\sigma$ quan $x\geqslant y$ i $x-y\in L_\delta$ quan $x\leqslant y$.

e) Si $\{x_n\}\subset M_+$ i $x=\vee x_n$, aleshores $x\in M_+$.

En efecte:

a) Siguin $x, y \in M_+$ i $\{x_n\}, \{y_n\} \subset L_+$ successions tals que $x_n \overset{\uparrow}{\underset{o}{}} x$ i $y_n \overset{\uparrow}{\underset{o}{}} y$. Aleshores $x_n + y_n \overset{\uparrow}{\underset{o}{}} x+y$, $x_n \vee y_n \overset{\uparrow}{\underset{o}{}} x \vee y$ i $x_n \wedge y_n \uparrow x \wedge y$ i per tant $x + y,\ x \vee y,\ x \wedge y \in M_+$.

Si $x, y \in L_\sigma$, és a dir, $\{x_n\}, \{y_n\}$ són I-afitades aleshores també ho són $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n \vee y_n\}$, $\{x_n \wedge y_n\}$ ja que per les propietats de I en L_+ és

$$I(x_n + y_n) = I(x_n) + I(y_n),$$

$$I(x_n \vee y_n) \leq I(x_n) + I(y_n),$$

$$I(x_n \wedge y_n) \leq I(x_n).$$

Quant a l'estabilitat respecte el producte per elements positius de R observem que si aquest producte és seqüencialment o-continu de $x_n \overset{\uparrow}{\underset{o}{}} x$ i $a \geqslant 0$ se'n segueix que $ax_n \overset{\uparrow}{\underset{o}{}} a_x$ i per tant que $ax \in M_+$. En cas de ser $x \in L_\sigma$, com que $I(ax_n) = a_n\ I(x_n)$, resulta que $\{a\, x_n\}$ és I-afitada i per tant $ax \in L_\sigma$.

Anàlogament provariem la proposició relativa a L_δ.

b) és dedueix immediatament de les definicions.

c) Segons 2.1.1, de les propietats de L_σ se'n segueix que L_ω és un ℓ-submòdul de G i que $L_{\bar{\omega}}$ és un subreticle. Vegem que $L_\delta \subset L_\omega$: Sigui $x \in L_\delta$ i $\{x_n\} \subset L_+$ una successió tal que $x_n \downarrow x$. Aleshores $x_1 - x_n \uparrow x_1 - x$; però $x_1 - x_n \in L_+$ i $I(x_1 - x_n) = I(x_1) - I(x_n) \leqslant I(x_1)$, de manera que $x_1 - x \in L_\sigma$. Per tant $x = x_1 - (x_1 - x) \in L_\sigma - L_\sigma = L_\omega$, tal com voliem veure.

d) Siguin $\{x_n\} \subset M_+$ i $x = \vee x_n$; cal veure que $x \in M_+$. Per a cada x_n existeix una successió $\{y_m^n\} \subset L_+$ tal que $y_m^n \uparrow x_n$. Per a cada n considerem l'element $z_n = y'_n \vee \ldots \vee y_n^n \in L_+$. La successió $\{z_n\} \subset L_+$ és monòtona creixent, ja que

$$z_n = y'_n \vee \ldots \vee y_n^n \leqslant y'_{n+1} \vee \ldots \vee y_{n+1}^{n+1} = z_{n+1},$$

i superiorment o-afitada per x, car per a cada n, $z_n \leqslant x_1 \vee \ldots \vee x_n \leqslant x$. Vegem que $z_n \uparrow x$, amb la qual cosa quedarà provat que $x \in M_+$.

Com que per a uns $n,m\in \mathbb{N}$ qualssevol, $y_m^n \leqslant z_{\max(n,m)}$, serà

$$\bigvee_{n,m} y_m^n \leqslant \bigvee_n z_n \leqslant x;$$

pero $\bigvee_{n,m} y_m^n = \bigvee_n \bigvee_m y_m^n = \bigvee_n x_n = x$. Per tant $x=\bigvee z_n$ tal com voliem veure. ∎

2.1.6. Proposició (Teorema d'extensió). Siguin R un ℓ-anell σ-c.c i G un ℓ-mòdul sobre R, σ-c.c. Sigui L un ℓ-submòdul de G i $L_+=P(L)$. Cada morfisme d'ordre positivament homogeni i seqüencialment o-continu $I:L_+ \to R_+$, admet una unica extensió com a morfisme d'ordre homogeni i seqüencialment o-continu cap amunt $I':L_\sigma \to R_+$. Aquesta extensió ve donada de la forma seguent: Si $x\in L_\sigma$ i $\{x_n\}$ determina x, aleshores $I'(x)=\bigvee I(x_n)$.

En efecte:

Quant a la unicitat és clar que si l'extensió ha de ser seqüencialment o-contínua cap amunt, per a un element $x\in L_\sigma$ amb $x_n\uparrow x$ i $\{x_n\}\subset L_+$, ha de ser necessàriament $I'(x)=\bigvee I(x_n)$. Es tracta de veure que així definida I' té les propietats desitjades.

En primer lloc cal comprovar que està ben definida, dit d'una altra manera, que si $x_n\uparrow x$ i $y_n\uparrow x$ amb $\{x_n\},\{y_n\}\subset L_+$ aleshores $\{x_n\}$ és I-afitada si i només si $\{y_n\}$ ho és i, en aquest cas $\bigvee I(x_n) = \bigvee I(y_n)$. És clar que n'hi ha prou en veure que si $x\in L_\sigma$ i existeix $\bigvee I(x_n)$ per a alguna successió $\{x_n\}\subset L_+$ tal que $x_n\uparrow x$ aleshores existeix $\bigvee\{I(y);y\in L_+, y\leqslant x\}$ i concideix amb $\bigvee I(x_n)$. Sigui $y\in L_+$ amb $y\leqslant x$; aleshores $\{x_n\wedge y\}\subset L_+$ és tal que $x_n\wedge y\uparrow y$ de manera que, sent I seqüencialment o-continua en L_+, $I(y)=\bigvee I(x_n\wedge y)$. D'altra banda I és morfisme d'ordre; d'aquí que $I(y)\leqslant \bigvee I(x_n)$. Amb això queda provat que existeix $\bigvee\{I(y);\ y\in L_+,\ y\leqslant x\}$ i que és $\bigvee I(x_n)$.

De la definició se'n dedueix de forma immediata que obtenim una extensió, car si $x\in L_+$, la successió constant $\{x_n\}$ amb $x_n=x$ determina x i per tant $I'(x)=\bigvee I(x_n) = I(x)$.

Pel que hem vist en 2.1.5. e) de les propietats de I en L_+ se'n segueix que si $x,y\in L_\sigma$ i $a\in P(R)$ aleshores $I'(x+y)=I'(x)+I'(y)$ i $I'(ax)=aI'(x)$. També si $x\leqslant y$, hom pot suposar que $x_n\leqslant y_n$ per a cada n, i per tant $I'(x)\leqslant I'(y)$. D'aquesta manera queda provat que I' és un morfisme d'ordre positivament homogeni. Vegem que és seqüencialment σ-continu cap amunt.

Sigui $x\in L_\sigma$ i $\{x_n\}\subset L_\sigma$ una successió tal que $x_n\uparrow x$. Volem veure que $I'(x_n)\uparrow I'(x)$. Considerem els elements z_n definits com en la demostració de 2.1.5. e); resulta que $z_n\leqslant x_n$ per a cada n, de manera que per a la successió $\{z_n\}\subset L_+$, que determina x, $I'(x) = \vee I(z_n)\leqslant \vee I'(x_n)\leqslant I'(x)$. En consequència, $I'(x)=\vee I'(x_n)$ tal com voliem veure. ■

Observi's que és la σ-continuïtat seqüencial de I en L_σ la que ens permet provar la independència del valor de I'(x), respecte la successió determinant de x, i per tant definir l'extensió a L_σ.

Com és habitual, continuarem denotant l'extensió I' amb la mateixa lletra I.

Consequència directa de la monotonia de I en L és la següent:

<u>2.1.7. Proposició.</u> Si $\{x_n\}\subset L_\sigma$ és I-afitada i $x_n\uparrow x$, aleshores $x\in L_\sigma$.

En efecte:

Si $\{x_n\}\subset L_\sigma$, $x_n\uparrow x$ i considerem la successió $\{z_n\}\subset L_+$, definida com en 2.1.5. e), que determina x, resulta que és I-afitada i per tant $x\in L_\sigma$. ■

Hem vist com l'extensió de I a L_σ hereta de forma natural la propietat de ser seqüencialment σ-contínua cap amunt. Si L_σ és estable respecte les diferències positives, és a dir, si $L_\sigma=P(L_\omega)$, aleshores és immediat veure que I és també sequencialment σ-continu cap avall. En efecte: si $x_n\downarrow x$ en L_σ, aleshores x_1-x_n, $x_1-x\in L_\sigma$ i com que $x_1-x_n\uparrow x_1-x$, resulta que $I(x_1-x)=\vee I(x_1-x_n)=I(x_1)-\wedge I(x_n)$, d'on se segueix que $I(x)=\wedge I(x_n)$.

En general $P(L_\omega)\neq L_\sigma$; ara bé, en el desenvolupament d'aquest capítol ens interessaran aquells cassos en que sigui $L_\sigma=P(L_\omega)$. Per això, a més a més de saber-ne la seva existència, cosa que comprovarem en l'apartat següent, ens serà útil la seguent proposició que dóna una condició suficient per tal que sigui $L_\sigma=P(L_\omega)$.

Aquesta condició és que M_+ sigui σ-subreticle. Com que M_+ és la σ-clausura de L_+, dir que M_+ és σ-subreticle és dir senzillament que $(L_+)_{\sigma\delta}=(L_+)_\sigma$.

Hem vist que M_+ és estable respecte el suprem de famílies numerables que existeixen en G, per tant M_+ és σ-subreticle si i només si és estable respecte l'ínfim de famílies numerables. En aquest cas L_σ també ho és. Direm que L_σ és <u>δ-complet</u> per a expressar que L_σ és estable respecte l'ínfim de famílies numerables.

<u>2.1.8. Proposició.</u> Siguin $M_+, M, L_\sigma, L_\omega$ com en 2.1.4. Aleshores,

a) M_+ és σ-subreticle $\Leftrightarrow$ $P(M)=M_+$,

b) M_+ σ-subreticle $\Rightarrow$ L_σ δ-complet,

c) L_σ és δ-complet $\Leftrightarrow$ $P(L_\omega)=L_\sigma$.

En efecte:

a) Suposem que M_+ és σ-subreticle i siguin $x,y\in M_+$ tals que $x-y\geqslant 0$. Volem veure que aleshores $x-y\in M_+$. Si $\{x_n\},\{y_n\}\subset L_+$ són successions tals que $x_n\uparrow x$ i $y_n\uparrow y$ i suposem que $x_n\geqslant y_n$, que no és restrictiu, resulta que $x_n-y_n \overset{o}{\to} x-y$ amb $\{x_n-y_n\}\subset L_+$. Aleshores si $z_n=\bigvee_{r\geqslant n}(x_r-y_r)$, resulta per 2.1.5. e), que $z_n\in M_+$. Així, d'acord amb la hipòtesi feta, $x-y=\bigwedge_n z_n \in M_+$.

Recíprocament, suposem que $P(M)=M_+$, volem veure que si $\{x_n\}\subset M_+$ i $x=\Lambda x_n$, aleshores $x\in M_+$. Podem suposar que $x_n\downarrow x$, car M_+ és subreticulat; d'aquesta manera $x_1-x_n\uparrow x_1-x$ on $\{x_1-x_n\}\subset P(M)=M_+$ per hipòtesi. Per tant, segons 2.1.5 e), és $x_1-x\in M_+$. En conseqüència, $x=x_1-(x-x_1)$ és un element de M positiu i doncs de M_+, tal com volíem veure.

b) es deriva de les definicions com hem observat més amunt.

c) es demostra exactament igual que a) amb la única diferència que les successions que apareixen són I-afitades i que cal substituir les referències a 2.1.5. e) per 2.1.7.

Quant al que hem dit que en general $P(L_\omega)\neq L_\sigma$, tenim el següent

2.1.9. Exemple. Consideri's el conjunt L_+ de les funcions reals positives contínues definides en l'interval $[0,1]$. Aleshores M_+ és el conjunt de les funcions $f:[0,1] \to R_+$ inferiorment semi-contínues i M_+ no és σ-subreticle. Si $I:L_+ \to R_+$ està definit per $I(f)=\int_0^1 f(x)dx$ aleshores $L_\sigma(I) \neq P(L_\omega(I))$.

En efecte: Observi's que M_+ és el conjunt que en l'Exemple 2.1.2 hem denotat per L_+. Les funcions f_r i f_s que allí hem considerat són obviament de $L_\sigma(I)$ de manera que la funció $g=1+f_r-f_s$ que és de $P(L_\omega(I))$ no és de $L_\sigma(I)$. Per tant $L_\sigma(I) \neq P(L_\omega(I))$.

Com que $L_\sigma(I)$ no és δ-complet, per la proposició anterior M_+ no pot ser σ-subreticle.

D'altra banda, consideri's per exemple ([12], Cap. XII), la col.lecció numerable de funcions $\{f_r;\ r\in Q\cap[0,1]\}$, definides com en L'Exemple 2.1.2. per $f_r(x)=0$ si $x\neq r$ i $f_r(x)=1$ si $x\neq r$. Aquestes funcións són de M_+ i de $L_\sigma(I)$ i en canvi la funció $f=\wedge f_r$ no és de M_+, ni de $L_\sigma(I)$, ja que f és la "funció de Dirichlet" que és igual a 1 per a tot nombre irracional en $[0,1]$ i igual a 0 per a tot nombre racional. Aquest exemple ens mostra doncs directament que M_+ no és σ-subreticle i que $L_\sigma(I)$ no es δ-complet.

Segons 2.1.3. i 2.1.5, $I:L_\sigma \to R_+$ s'estén alhora de manera única al ℓ-submòdul $L_\omega=L_\sigma-L_\sigma$ donant lloc a un morfisme d'ordre homogeni.

2.1.10. Proposició. Quan L_σ és δ-complet se satisfan les següents propietats:

a) $I:L_\sigma \to R_+$ és seqüencialment o-continu.

b) Si $\{x_n\}\subset L_\sigma$ és I-afitada aleshores o-$\underline{\lim}\ x_n$, o-$\overline{\lim}\ x_n \in L_\sigma$, si aquests élements estan definits, i a més

$$I(\text{o-}\underline{\lim}\ x_n) \leqslant \text{o-}\underline{\lim}\ I(x_n) \leqslant \text{o-}\overline{\lim}\ I(x_n) \leqslant I(\text{o-}\overline{\lim}\ x_n). \quad (*).$$

c) Si $\{x_n\}\subset L_\omega$ és una successió tal que $x_n \overset{o}{\to} x$ per a algun element $x\in G$ i $|x_n|\leqslant y$ per a cada $n\in N$ i algun $y\in L_\sigma$, aleshores $x\in L_\omega$ i $I(x)=\text{o-}\lim I(x_n)$.

En efecte:

a) Per 2.1.7. i pel que hem observat immediatament abans de 2.1.8

resulta efectivament que I és seqüencialment o-continu en L_σ.

b) Sigui $\{x_n\} \subset L_\sigma$ I-afitada i suposem que estan definits els elements $o\text{-}\underline{\lim}\, x_n$ i $o\text{-}\overline{\lim}\, x_n$. Posem, per a cada $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = \bigwedge_{r \geq n} x_r \quad , \quad z_n = \bigvee_{r \geq n} x_r .$$

En ser L_σ δ-complet resulta que $y_n \in L_\sigma$ i $I(y_n) \leq \bigwedge_{r \geq n} I(x_r)$. A més, com que $y_n \uparrow o\text{-}\underline{\lim}\, x_n$ i $\{y_n\}$ és I-afitada tenim que $o\text{-}\underline{\lim}\, x_n \in L_\sigma$ i $I(o\text{-}\underline{\lim}\, x_n) = \bigvee_n I(y_n) \leq \bigvee_n \bigwedge_{r \geq n} I(x_r) = o\text{-}\underline{\lim}\, I(x_n)$. D'altra banda, $z_n \in L_\sigma$ segons hem vist a 2.1.7 i $I(z_n) \geq \bigvee_{r \geq n} I(x_r)$. Però com que $z_n \downarrow o\text{-}\overline{\lim}\, x_n$ novament resultarà, per ser L_σ δ-complet, que $o\text{-}\overline{\lim}\, x_n \in L_\sigma$ i $I(o\text{-}\overline{\lim}\, x_n) = \bigwedge_n I(z_n) \geq \bigwedge_n \bigvee_{r \geq n} I(x_r) = o\text{-}\overline{\lim}\, I(x_n)$.

Amb això queda provat b).

D'aquí se'n dedueix directament que si $\{x_n\} \subset L_\sigma$ és I-afitada i $x_n \overset{o}{\to} x$, aleshores $x \in L_\sigma$ i $I(x) = o\text{-}\lim I(x_n)$.

c) Siguin $\{x_n\} \subset L_\omega$, y L_σ i $x \in G$ tals que $x_n \overset{o}{\to} x$ i $|x_n| \leq y$ per a cada n. Considerem els elements $y_n = y + x_n \in L_\omega$. Com que $|x_n| \leq y$ i $P(L_\omega) = L_\sigma$, resulta que $y_n, |x_n| \in L_\sigma$. A més $y_n = y + x_n \overset{o}{\to} y + x$ i com que $\{y_n\} \subset L_\sigma$ és I-afitada, ja que $I(y_n) = I(y) + I(x_n) \leq I(y) + I(y)$, resulta que $y + x \in L_\sigma$. Per tant $x = (y+x) - y \in L_\sigma - L_\sigma = L_\omega$ i a més $I(x+y) = o\text{-}\lim I(x_n + y) = o\text{-}\lim [I(x_n) + I(y)]$, d'on se'n segueix l'existència de $o\text{-}\lim I(x_n)$ i que $o\text{-}\lim I(x_n) = I(x+y) - I(y) = I(x)$. ■

Sembla que c) podria generalitzar-se demanant que $\{I(|x_n|)\}$ fos o-afitada en lloc d'exigir que $|x_n| \leq y$ per a algun $y \in L_\sigma$. Ara bé si $\{I(|x_n|)\}$ és o-afitada resulta que els elements $y_n = |x_n| \in L_\sigma$ són tals que $\{y_n\}$ és una successió I-afitada i per tant $y = \vee y_n \in L_\sigma$ és un element pel qual se satisfà $|x_n| \leq y$.

És important observar que en totes les demostracions d'aquesta proposició és essencial que si $\{x_n\} \subset L_\sigma$ aleshores $x = \wedge x_n \in L_\sigma$, és a dir, que L_σ sigui δ-complet.

Per acabar obtenim la següent proposició que generalitza 2.1.7. i 2.1.10, b) a L_ω:

2.1.11. Proposició. Siguin $x,y\in L_\omega$ i $\{x_n\}$ una successió I-afitada en L_ω. Quan L_σ és δ-complet se satisfan les seguents propietats:

a) Si $x_n \overset{\uparrow}{_\circ} x$ aleshores $x\in L$ i $I(x) = VI(x_n)$.

b) Si $x_n \geqslant y$ per a tot $n\in N$, aleshores o-$\underline{\lim}$ x_n, o-$\overline{\lim}$ $x_n \in L_\omega$, si aquests elements estan definits, i valen les desigualtats (*) de 2.1.10 b)

En efecte:

Quant a a) tenim que $x_n - x_1 \overset{\uparrow}{_\circ} x - x_1$ on $\{x_n - x_1\} \subset L_\sigma$ és una successió I-afitada, de manera que, per 2.1.7, $x - x_1 \in L_\sigma$. Per tant $x\in L_\omega$. A més $I(x-x_1) = VI(x_n - x_1) = VI(x_n) - I(x_1)$, d'on $I(x) = VI(x_n)$.

Pel que fa a b) resulta que $\{x_n - y\} \subset L_\sigma$ és una successió I-afitada; en conseqüencia, per 2.1.10 b), o-$\underline{\lim}(x_n - y)\in L_\sigma$ i $I($o-$\underline{\lim}\ (x_n - y)) \leqslant$ o-$\underline{\lim}\ I(x_n - y) =$ o-$\underline{\lim}\ I(x_n) - I(y)$; d'on se segueix que o-$\underline{\lim}\ x_n \in L_\omega$ i que $I($o-$\underline{\lim}\ x_n) \leqslant$ o-$\underline{\lim}\ I(x_n)$. Anàlogament es provaria per a o-$\overline{\lim}\ x_n$.■

2. R-INTEGRALS. CONSTRUCCIÓ DE LA PRIMERA EXTENSIÓ.

Sigui X un conjunt qualsevol i R un ℓ-anell σ-c.c. amb el producte seqüencialment o-continu. Considerem el ℓ-anell producte R que amb el producte $(a,f) \to af$ és un ℓ-mòdul per l'esquerra, per exemple, sobre R, pel qual el producte per elements de R és seqüencialment o-continu.

2.2.1. Definició. Sigui L un ℓ-submòdul de R^X i $I: L \to R$ un morfisme d'ordre homogeni seqüencialment o-continu, és a dir, que satisfà per a qualssevol $f,g,f_n \in L$, $a\in R$,

1) $I(f+g) = I(f)+I(g)$,

2) $I(af) = a\, I(f)$,

3) $f \leqslant g \Rightarrow I(f) \leqslant I(g)$,

4) $f_n \uparrow f \Rightarrow I(f_n) \uparrow I(f)$.

El parell (L,I) l'anomenem una <u>R-integral en X</u> i diem que I és una integral en L.

Si $I:L_+ \to R_+$ és un morfisme d'ordre positivament homogeni i seqüencialment o-continu cap amunt definit en un ℓ-subsemigrup L_+, estable pel producte per elements de R_+, diem que el parell (L_+,I) és una <u>integral positiva en X</u> i que I és una integral en L_+.

<u>(L_σ,I): Primera extensió positiva d'una R-integral (L,I) en X.</u>

Sigui (L,I) una integral en X i considerem la restricció de I a P(L); (P(L),I) és una integral positiva en X. Seguint les notacions introduides a 2.1.4, considerem el conjunt

$$L_\sigma = \{f \in R^X;\ \exists \{f_n\} \subset P(L);\ f_n \overset{\uparrow}{_o} f \text{ i existeix } VI(f_n)\}.$$

<u>2.2.2. Definició.</u> Sigui (L,I) una R-integral en X. Anomenem <u>primera extensió positiva</u> de (L,I) la integral positiva (L_σ,I) definida per $I(f)=VI(f_n)$, on $f \in L_\sigma$ i $\{P_n\} \subset \varepsilon_+$ és una successió determinant de f.

Per extensió diem que $I:L_\sigma \to R_+$ és la primera extensió positiva de la integral $I:L \to R$.

Segons 2.1.6. i 2.1.7, (L_σ,I) és efectivament una R-integral en X. Per la mateixa 2.1.6. és a més $I(f)=V\{I(g);\ g \in L_+,\ g \leq f\}$ per a tota $f \in L_\sigma$. Aquesta R-integral s'estén de forma natural al ℓ-submòdul de les funcions de $L_\omega = L_\sigma - L_\sigma$ donant lloc a una aplicació $I:L_\omega \to R$ que satisfà 1), 2) i 3) de la Definició 2.2.1 és a dir, que és morfisme d'ordre homogeni. Pel que fa a l' o-continuitat sequencial, 2.1.7 juntament amb 2.1.6 ens dóna el clàssic

<u>2.2.3. Teorema de convergència monòtona a (L_σ,I):</u> Si $\{f_n\} \subset L_\sigma$ és una successió de funcions I-afitada tal que $f_n \overset{\uparrow}{_o} f$ aleshores $f \in L_\sigma$ i $I(f) = VI(f_n)$.

Pel que hem observat al final de 2.1.7 sembla en principi que no podem afirmar ni la o-continuïtat seqüencial de I en L_σ cap avall ni els altres teoremes clàssics de convergència dominada i Lema de Fatou a menys que suposem que $P(L_\omega) = L_\sigma$, o equivalentment, que L_σ és δ-complet. En aquest cas obtenim, segons 2.1.11 b) i 2.1.10 c),

<u>2.2.4. Lema de Fatou a (L_ω, I).</u> Si L_σ és δ-complet i $\{f_n\} \subset L_\omega$ ès una successió I-afitada per a la que, per a alguna $g \in L_\omega$, és $f_n \geqslant g$ per a cada $n \in N$, aleshores o-$\underline{\lim}$ f_n, o-$\overline{\lim}$ $f_n \in L_\omega$, si són finites, i a més

$$I(\text{o-}\underline{\lim}\ f_n) \leqslant \text{o-}\underline{\lim}\ I(f_n) \leqslant \text{o-}\overline{\lim}\ I(f_n) \leqslant I(\text{o-}\overline{\lim}\ f_n).$$

<u>2.2.5. Teorema de Convergència Monòtona generalitzada a (L_ω, I) (T.C.M.):</u> Si L_σ ês δ-complet i $\{f_n\} \subset L_\omega$ ês una successió I-afitada tal que $f_n \overset{\uparrow}{\circ} f$, aleshores $f \in L_\omega$ i $I(f) = VI(f_n)$.

<u>2.2.6. Teorema de Convergència Dominada a (L_ω, I) (T.C.D):</u> Si L_σ ês δ-complet, $\{P_n\} \subset L_\omega$, $g \in L_\sigma$ i $f \in R^X$ són funcions tals que $f_n \overset{o}{\rightarrow} f$ i $|f_n| \leqslant g$ per a cada $n \in N$, aleshores $f \in L_\omega$ i $I(f) = \text{o-}\lim I(f_n)$.

Resumint, podem donar el següent:

<u>2.2.7. Teorema:</u> Sigui (L,I) una R-integral en un conjunt X. Si L_σ ês δ-complet, aleshores (L_ω, I) ês una R-integral en X que estén (L,I) i és la única extensió possible que conserva les propietats 1)-4) de la Definició 2.2.1.

En efecte: Hem dit ja que l'extensió $I: L_\omega \rightarrow R$ conserva les propietats: 1)-3) de 2.2.1. Ara, si L_σ es δ-complet, el T.C.D., 2.2.6. ens assegura també la propietat 4). Efectivament, si $f_n \overset{\uparrow}{\circ} f$ en L_ω, aleshores $f - f_n \overset{o}{\downarrow} o$ en L_σ, i per tant $I(f - f_n) \downarrow o$; és a dir, $I(f_n) \uparrow I(f)$. ∎

Així com hem vist que en general $P(L_\omega) \neq L_\sigma$, ès a dir, que L no és δ-complet, donem a continuació un exemple de R-integral per a la que és $P(L_\omega) = L_\sigma$. En la secció següent en comentarem alguns més.

<u>2.2.8. Exemple.</u> Sigui R un ℓ-anell σ-c.c. amb el producte seqüencialment o-continu i consideri's el R-mòdul L de les funcions $f: N \rightarrow R$ de suport finit. Tot element $f \in L$ és representable com una successió (b_n) d'elements de R. Sigui (a_n) una successió d'elements positius o-sumable, és a dir, tal que o-$\Sigma\, a_n < +\infty$. Aleshores,

a) L'aplicació $I:L \to R$ definida per $I(b_n)=\sum_{n\in N} a_n b_n$ és una R-integral en L per a la que $L_\sigma(I) = P(L_\omega(I))$.

b) $M_+=\{(b_n);\ b_n \geq o,\ \forall n\in N\}$ i $(b_n)\in L_\sigma(I) \Leftrightarrow o\text{-}\sum a_n b_n < +\infty$.

c) $(b_n)\in L_\omega(I) \Leftrightarrow o\text{-}\sum a_n|b_n|<+\infty$ i en aquest cas $I(b_n)=o\text{-}\sum a_n b_n$.

En efecte:

a) En primer lloc observi's que $I(b_n)$ està definit per a tot $(b_n)\in L$ perque la suma $o\text{-}\sum_{n\in N} a_n b_n$ és en realitat la suma d'un nombre finit de termes.

És immediat provar que així definit I és un morfisme d'ordre homogeni en L. Vegem que és seqüencialment o-continu: basta provar que si $f_n \downarrow o$ en L, aleshores $I(f_n)\downarrow o$.

Sigui $f_n=(b_i^n)$. De $f_n\downarrow o$ se'n segueix que $b_i^n\downarrow o$ per a cada $i\in N$, d'on, tenint en compte que $\mathrm{supp}(f_n)\subset \mathrm{supp}(f_1)$ i que $\mathrm{supp}(f_1)$ és finit, en resulta que $I(f_n)\downarrow o$, ja que

$$I(f_n) = \sum_{i\in \mathrm{supp}(f_n)} a_i\, b_i^n \leq \sum_{i\in \mathrm{supp}(f_1)} a_i\, b_i^n \downarrow o.$$

Observi's que $M_+=\{(b_n);\ b_n\geq o \quad n\in N\}$; per tant M_+ és σ-subreticle i en conseqüència $L_\sigma(I)$ és δ-complet; és a dir, $L_\sigma(I) = P(L_\omega(I))$.

b) Ja hem dit que $M_+=\{(b_n);\ b_n\geq o$ per a tot $n\in N\}$. Donat $f=(b_n)\in M_+$, posem $f_n=(b_1,b_2,\dots,b_n,o,\dots)$; $f_n\in L_+$ i $f_n \overset{\uparrow}{o} f$. Per tant $f\in L_\sigma(I)$ si i només si $\{f_n\}$ és I-afitada. Però

$$I(f_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

de manera que $\{I(f_n)\}$ o-afitada si i només si la serie de termes positius $o\text{-}\sum a_n b_n$ és o-convergent, és a dir, si $o\text{-}\sum a_n b_n <+\infty$. A més, en aquest cas resulta que $I(f)=\bigvee I(f_n)=o\text{-}\sum a_n b_n$.

c) Com que $L_\sigma(I)$ és δ-complet, $f\in L_\omega(I)$ si i només si $f^+,f^-\in L_\sigma(I)$; en conseqüència si $f=(b_n)$, $f\in L_\omega(I)$ si i només si $o\text{-}\sum a_n b_n^+ <+\infty$ i $o\text{-}\sum a_n b_n^- <+\infty$, parella de condicions que equivalen (veure 0.5.4.b)) a que $o\text{-}\sum a_n|b_n|<+\infty$.

En aquest cas és a més $I(b_n)=I(b_n^+)-I(b_n^-)=o\text{-}\Sigma a_n b_n^+ - o\text{-}\Sigma a_n b_n^- =$ $= o\text{-}\ \Sigma a_n(b_n^+ - b_n^-) = o\text{-}\ \Sigma a_n b_n$.

<u>2.2.9. Una segona extensió d'una R-integral?.</u> El mateix teorema de convergència monòtona a L_σ ens mostra que la reiteració del procés que ens ha permès estendre la integral de L a L_σ no ens aporta cap nova extensió. Per tant, si volem obtenir una classe més àmplia de funcions a la que tingui sentit estendre la integral caldrà recórrer a altres mètodes. La idea serà fer integrables aquelles funcions que poden ser aproximables, en un sentit que haurem de precisar, per funcions que ja ho són.

De la mateixa forma que es construeix la integral per a funcions reals respecte una mesura real pot construir-se, amb certes restriccions, una R-integral, per a funcions valorades en un ℓ-anell R, respecte una o-mesura que pren valors en el mateix ℓ-anell R.

Les seccions que segueixen estan dedicades a l'obtenció d'aquesta R-integral i és per a aquest tipus de R-integral que estudiem la construcció d'una segona extensió. Deixem pendent per a un possible desenvolupament posterior, la consideració del problema de la segona extensió per a R-integrals amb més generalitat.

3. INTEGRACIÓ DE FUNCIONS SIMPLES.

<u>2.3.1. Definició.</u> Sigui R un ℓ-anell σ-c.c. i $m:\mathcal{a} \to R_+$ una O-mesura definida en una σ-àlgebra $\mathcal{a}$ de parts d'un conjunt X.

Anomenem <u>funcions $\mathcal{a}$-simples</u> les funcions $f:X \to R$ que prenen un nombre finit de valors distints i que són constants sobre conjunts d' $\mathcal{a}$. Són aquelles funcions que poden escriure's en la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} , \qquad (*)$$

on $a_i \in R$, $A_i \in \mathcal{a}$ per a cada $i \in \{1,\dots,n\}$ i $a_i\chi_{A_i}$ designa la funció que pren el valor a_i en A_i i 0 en A_i^c. Per <u>representació canònica</u>

d'una funció a-simple entendrem la representació en la forma (*) en la qual els a_i que hi figuren són tots distints i els A_i són mútuament disjunts.

El conjunt de tals funcions s'indicarà per $\varepsilon(a)$. Si la referència a a es pot donar per sobreentesa, parlarem senzillament de <u>funcions simples</u> i escriurem ε en lloc de $\varepsilon(a)$.

ε és un ℓ-subanell y submòdul de R^X, com es desprèn de les següents igualtats, la comprovació de les quals és rutinària:

Si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ $\quad g = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$ $\quad$ i $a \in R$, aleshores:

$$f \pm g = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} (a_i \pm b_j)\, \chi_{A_i B_j}, \qquad f \cdot g = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} (a_i \cdot b_j) \chi_{A_i B_j},$$

$$f \vee g = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} (a_i \vee b_j) \chi_{A_i B_j}, \qquad f \wedge g = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} (a_i \wedge b_j) \chi_{A_i B_j},$$

$$a\, f = \sum_{i=1}^{n} (a_i a)\, \chi_{A_i}$$

<u>Quan $R=\mathbb{R}$ les funcions a-simples són les funcions reals simples a-mesurables definides en X</u>. Aquí, i en general, donem per entès que en $\mathbb{R}$ hi considerem la σ-àlgebra de Borel.

<u>2.3.2. Definició.</u> Anomenem <u>integral respecte m en ε</u> l'aplicació $I: \varepsilon \to R$ definida per

$$I\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, \chi_{A_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i).$$

És una comprovació veure que el valor de $I(f)$ no depèn de la representació escollida per a la funció $f \in \varepsilon$. D'aquí que podrem suposar, sempre que ens convingui, que tenim la representació canònica.

De les igualtats abans esmentades, de l'additivitat de m i de les propietats de les operacions en R se'n segueix que la integral $I: \varepsilon \to R$ satisfà, qualssevol que siguin $f,g \in \varepsilon$ i $a \in R$,

1) $I(f \pm g) = I(f) \pm I(g)$,

2) $I(af) = a\, I(f)$,

3) $f \leqslant g \Rightarrow I(f) \leqslant I(g)$;

més breument, I és un morfisme d'ordre homogeni.

Quan $R=\mathbb{R}$ aquesta integral és la integral de Lebesgue de les funcions simples finites $\mathfrak{a}$-mesurables respecte la mesura m. En aquests cas I és a més seqüencialment o-continu, és a dir,

4) $f_n \downarrow o \Rightarrow I(f_n) \downarrow o$,

propietat que permet, en definitiva, utilitzar el mètode d'extensió de Daniell per a definir la integral de funcions $\mathfrak{a}$-mesurables.

Creiem que aquesta propietat no se satisfà necessàriament en el cas general d'un ℓ-anell σ-c.c., perquè les demostracions de 4) que coneixem depenen fortament de la total ordenació de R ([11], [8], [33]).

Si R és totalment ordenant, aleshores evidentment se satisfà 4), ja que en ser R σ-c.c., R és també arquimedià i tot anell totalment ordenat arquimedià és isomorf, com a tal, a un subanell de $\mathbb{R}$(12.3.1. de [7]).

No obstant, encara que R no sigui totalment ordenat, 4) pot satisfer-se, com mostren els dos exemples següents, on R és un ℓ-anell σ-c.c. no totalment ordenat. En aquests cassos podem dir per tant que <u>(ε, I) és una integral en X</u> en el sentit de la Definició 2.2.1.

<u>2.3.3. Exemple.</u> Si R és c.c. i el producte en R és sequencialment o-continu la o-mesura $m:\mathcal{P}(X) \to R_+$ associada a una funció $F:X \to R_+$ o-sumable (veure 1.6.2) determina una integral $I:\varepsilon \to R$ que és seqüencialment o-continua.

En efecte: Sigui $m:\mathcal{P}(X) \to R_+$ la o-mesura determinada per una funció $F:X \to R_+$ o-sumable, és a dir, definida per

$$m(A) = o\text{-}\sum_{x \in A} F(x) \quad \text{i} \quad m(\emptyset) = 0,$$

i sigui $\{f_n\} \subset \varepsilon_+$ tal que $f_n \downarrow 0$. Cal veure que $I(f_n) \downarrow 0$. Per a cada f_n considerem el conjunt $[f_n \neq o] = \{x \in X;\ f_n(x) \neq o\}$, que és un element de $\mathcal{a}$, i l'element $\alpha_n = \vee\{f_n(x);\ x \in X\}$, que està definit per ser f $\mathcal{a}$-simple i R un reticle. Aleshores si

$$f_n = \sum_{i=1}^{p_n} a_i^n \chi_{A_i} \qquad (*)$$

es té

$$I(f_n) = \sum_{i=1}^{p_n} a_i^n\, m(A_i^n) \leqslant \alpha_n \sum_{i=1}^{p_n} m(A_i^n) = \alpha_n \cdot m[f_n \neq o],$$

car $[f_n \neq o] = \bigcup_{i=1}^{p_n} A_i^n$, si suposem que tots els elements a_i^n que figuren en (*) són no nuls, i $m[f_n \neq o] = \bigcup_{i=1}^{p_n} m(A_i^n)$ si suposem a més que (*) és la representació canònica de f_n.

D'altra banda de $f_n \overset{o}{\downarrow} 0$ se'n segueix que $[f_n \neq o] \downarrow \emptyset$ i per tant sent m o-mesura, que $m[f_n \neq o] \downarrow 0$, d'on

$$0 \leqslant I(f_n) \leqslant \alpha_n \cdot m[f_n \neq o] \leqslant \alpha_1 \cdot m[f_n \neq o] \overset{o}{\downarrow} 0,$$

sempre que en R el producte sigui seqüencialment o-continu, resultant $I(f_n) \downarrow 0$ tal com voliem veure.

<u>2.3.4. Exemple.</u> Si I és un conjunt d'índexos qualsevol i $\mathcal{a}$ una σ-àlgebra de parts d'un conjunt X, tota o-mesura positiva $m: \mathcal{a} \to R^I$ determina una integral $I: \varepsilon \to R^I$ que és seqüencialment o-contínua.

La o-continuïtat seqüencial de I en ε es dedueix de la següent observació:

Sigui $F: X \to R^I$ $\mathcal{a}$-simple. Aleshores, si F_i i m_i designen les components i-èssim de F i m respectivament, resulta que cada F_i és una funció real finita simple $\mathcal{a}$-mesurable i $I(F) = (\int F_i\, dm_i)$.

En efecte: Si

$$F = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$

on $a_k = (a_k^i) \in R^I$, aleshores

$$F_i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i \chi_{A_k} ,$$

i per tant F_i és a-mesurable i simple. A més, de $I(F) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot m(A_k)$, se'n segueix, com voliem veure, que

$$[I(F)]_i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i . m_i(A_k) = \int F_i . dm_i .$$

D'aquí, que si $F_n \downarrow 0$ en ε, és a dir, $F_n^i \downarrow 0$ per a cada $i \in I$, resulta que $\int F_n^i \, dm_i \downarrow 0$ i per tant que $I(F_n) \downarrow 0$.

4. LA PRIMERA EXTENSIÓ DE LA INTEGRAL RESPECTE UNA σ-MESURA.

Suposem d'ara endavant que en R el producte és seqüencialment σ-continu i que la integral respecte m en ε és seqüencialment σ-contínua, és a dir, que el parell (ε,I) és una integral en X en el sentit de la Definició 2.2.1.

D'acord amb les notacions introduides a 2.1.4. adoptem la següent terminologia:

Anomenem funcions fortament mesurables positives els elements de M_+; és a dir, les funcions $f:X \to R$ per a les quals existeix una successió $\{f_n\}$ de funcions de ε_+ tal que $f_n \uparrow_o f$, es a dir, $f_n(x) \uparrow f(x)$ per a cada $x \in X$. Les funcions de $M = M_+ - M_+$ les anomenem mesurables i les de $M' = \{f \in R^X;\ f^+,\ f^- \in M_+\}$ fortament mesurables.

Considerem com en 2.1.4. el conjunt L_σ constituït per les funcions fortament mesurables positives determinades per una successió I-afitada. L'indicarem per $L_\sigma(m)$.

2.4.1. Definició. Si la integral respecte m en ε és una R-integral en X en el sentit de la Definició 2.2.1, anomenem integral respecte m en $L_\sigma(m)$ la primera extensió positiva de la integral respecte m en ε.

Segons hem vist en l'apartat anterior, $(L_\sigma(m), I)$ és una R-integral positiva en X per a la que es compleix el teorema de convergència monòtona. Si $L_\sigma(m)$ és δ-complet, aleshores $(L_\omega(m), I)$ és una R-integral en X i es compleixen els teoremes de convergència 2.2.4, 2.2.5. i 2.2.6.

Analitzem a continuació alguns exemples en els que $L_\sigma(m)$ és δ-complet.

a) Si $R=\mathbb{R}$.

En aquest cas ε és el conjunt de les funcions reals simples α-mesurables, tal com hem observat, i la integral respecte m és la integral de Lebesgue respecte m. De les definicions i del fet que tota funció real α-mesurable positiva és límit puntual d'una successió creixent de funcions simples α-mesurables, es dedueix que les funcions de M_+ són les funcions α-mesurables finites positives i que les funcions de $L_\sigma(m)$ són justament aquelles que són m-integrables Lebesgue. Se'n segueix també, que el conjunt de les funcions reals α-mesurables, $\mathcal{FM}$, coincideix amb el conjunt M' i per tant amb M. Finalment, donat que el límit puntual de funcions reals α-mesurables és encara α-mesurable, M_+ és σ-subreticle i per tant $L_\sigma(m)$ és δ-complet i $P(L_\omega(m))=L_\sigma(m)$.

D'aquesta manera, com que una funció f real, finita i α-mesurable és m-integrable Lebesgue si i només si f^+ i f^- ho són, resulta que <u>$L_\omega(m)$ és el conjunt de les funcions reals finites α-mesurables m-integrables Lebesgue.</u>

b) Exemples on R no és el cos real i M_+ és σ-subreticle i per tant $P(L_\omega(m)) = L_\sigma(m)$.

<u>2.4.2. Exemple.</u> Considerem un conjunt numerable, posem $\mathbb{N}$, i una o-mesura $m:P(\mathbb{N}) \to R_+$ valorada en un ℓ-anell σ-c.c. qualsevol. Si en R el producte és seqüencialment o-continu aleshores M_+ és σ-subreticle.

En efecte: Cada funció $f:\mathbb{N} \to R_+$ pot representar-se com una successió de nombres reals. Si $f=(b_n)$, resulta que les funcions $g_n=(b_1,b_2,\ldots,b_n,0,\ldots)$ són simples i $g_n \overset{\uparrow}{_o} f$. En conseqüència tota funció positiva $f:\mathbb{N} \to R$ és de M_+ i per tant, si $f_n \downarrow f$ en M_+, és $f\in M_+$. Això basta, juntament amb 2.1.7 e), per a provar que M_+ és σ -subreticle.

<u>2.4.3. Exemple.</u> Sigui I un conjunt d'índexos qualsevol i sigui $q(\mathbb{R}^I)$ el ℓ-anell constituït pels elements $a\in \mathbb{R}^I$ pels quals $I_a = \{i\in I;\ a_i\neq 0\}$ és finit o numerable, $q(\mathbb{R}^I)$ és σ-c.c. i en ell el producte és seqüencialment o-continu. Considerem una σ-àlgebra

α de parts d'un conjunt X.

El conjunt de les funcions fortament mesurables positives, obtingut a partir de les funcions simples α-mesurables és un σ-subreticle.

En efecte: Sigui $F:X \to q(R^I)$, F_i la component i-èssima de F i considerem el conjunt $I_F=\{i\in I; F_i\neq o\}$. Vegem per començar que si $F\in M_+$ aleshores I_F és finit o numerable.

Suposem primer que $F\in \varepsilon_+$. Sigui

$$F = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$

i $I_k=\{i\in I;\ a_k^i\neq o\}$; cada I_k és finit o numerable. Vegem que $I_F \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, amb la qual cosa quedarà provat que I_F és finit o numerable.

Si $i\in I_F$ és que $F_i(x)\neq o$ per a algun $x\in X$. Aleshores serà $F(x)=a_k$, per a algun k tal que $F_i(x)=a_k^i\neq o$. És a dir, $i\in I_k$ i per tant $I_F \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$.

De fet, $I = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ ja que si $i\in I_{k_o}$ per a algun k_o és que $a_{k_o}^i \neq o$ i aleshores per a cada $x\in A_{k_o}$ és $F_i(x)=a_{k_o}^i\neq o$ i per tant $i\in I_F$.

Observem a més que cada F_i és una funció simple real α-mesurable.

Suposem ara que $F\in M_+$ ve determinada per la successió $\{F_n\}\subset \varepsilon_+$, es a dir, que $F_n \uparrow_o F$. Per a cada n considerem el conjunt $I_n = \{i\in I;\ F_n^i \neq o\}$; I_n és finit o numerable pel que acabem de veure. En conseqüència $I_F= \bigcup_n I_n$ tambe ho és. A més, com que cada F_n^i és una funció real simple α-mesurable, de $F_n^i \uparrow_o F_i$ en resulta que cada F_i és una funció real α-mesurable.

Vegem ara que M_+ és σ-subreticle. N'hi ha prou en provar que si $\{F_n\}\subset M_+$ i $F_n \uparrow_o G$ aleshores $G\in M_+$. Com que $I_G=\{ i\in I;\ G_i\neq o \} \subset \subset\{ i\in I;\ F^i\neq o\}$, I_G és numerable i G està efectivament valorada en $g(R^I)$. Volem veure que existeix una successió $\{H_n\}$ de funcions de ε_+ tal que $H_n \uparrow_o G$.

Per a cada $i\in I$ és $F_n^i \uparrow G_i$ i com que les funcions F_n^i són $\mathcal{a}$-mesurables resulta que cada G_i també ho és. En conseqüència existiran funcions reals simples $\mathcal{a}$-mesurables $h_n^i: X \to R_+$ tals que $h_n^i \uparrow G_i$. Posem $I_G=\{i_1,i_2,\dots,i_n,\dots\}$ i considerem les funcions $H_n: X \to q(R^I)$ següents:

$$H_n = (H_n^i) \text{ on } H_n^i(x) = \begin{cases} h_n^i(x) & \text{si } i\in\{i_1,i_2,\dots,i_n\}, \\ 0 & \text{si } i\notin\{i_1,i_2,\dots,i_n\}, \end{cases}$$

que per construcció són $\mathcal{a}$-simples, és a dir de ε_+. La successió $\{H_n\}\subset\varepsilon_+$ és la desitjada, ja que per a cada $x\in X$ és $H_n^i(x)\uparrow G_i(x)$.

En particular si I és numerable, per a qualsevol σ-àlgebra de parts d'un conjunt X, el conjunt M_+ de les funcions fortament mesurables positives $F: X \to R^I$ és σ-subreticle i en aquest cas tota o-mesura $m: \mathcal{a} \to R^I$ dóna lloc a una integral $I: L_\omega \to R^I$ amb els teoremes de convergència monòtona i dominada i la propietat de Fatou. Més endavant analitzarem amb més detall aquesta integral. De moment fem notar que, encara que si $m: \mathcal{a} \to q(R^I)$ és una o-mesura aleshores el conjunt $J_o=\{i\in I;\ m_i\neq o\}$ és finit ó numerable i per tant donar m equival a donar una o-mesura $m: \mathcal{a} \to R^{J_o}$, en canvi les funcions $F: X \to q(R^I)$ no poden ser reduïdes a les funcions $F: X \to R^{J_o}$, de manera que el cas d'una mesura $m: \mathcal{a} \to R^I$ (exemple 2.3.4.) amb I numerable no és realment un cas particular del que acabem d'estudiar.

5. CONJUNTS m-NULS.

Sigui $N_m=\{A\in\mathcal{a};\ m(A)=0\}$. De la σ-additivitat en ordre de m i del fet que $\mathcal{a}$ és una σ-àlgebra se'n segueix, exactament al cas que $R=R$, que N_m es un σ-ideal de $\mathcal{a}$.

Diem que un conjunt $A\subset X$ es <u>m-nul</u> quan existeix algun conjunt $B\in N_m$ tal que $B\supset A$. Designem per N_m^* la classe dels conjunts m-nuls. És també un σ-ideal.

Com és usual, diem que una propietat P, predicable dels elements de X, se satisfà <u>m-quasi arreu</u>, i escrivim <u>m-q.a.</u> per abreviar-ho, si el conjunt dels elements que no satisfan P és m-nul.

Una funció $f:A \to R$ definida en un subconjunt $A \subset X$ es diu que està definida m-q.a. quan A^c és m-nul. Designem per $\mathfrak{F}(X,R;\mathcal{a},m)$, ó $\mathfrak{F}_m$ si $X,R,\mathcal{a}$ poden donarse per sobreentesos, la classe de les funcions definides m-q.a. en X i valorades en R. En $\mathfrak{F}_m$ hom considera la relació que notem per $f \simeq_m g$, i enunciem dient "f es m-equivalent a g" per a dir que f i g estan definides i coincideixen en X m-q.a.

Aquesta és una relació d'equivalència en $\mathfrak{F}_m$ que és compatible amb la relació de preordre definida per

$$f \leqslant_m g \Leftrightarrow f \leqslant g \quad \text{m-q.a.}$$

Designem per F_m el quocient de $\mathfrak{F}_m$ per la relació $\simeq_m$; per $[f]$ la classe de $f \in \mathfrak{F}_m$.

En $\mathfrak{F}_m$ és possible definir, com sempre, una suma, un producte i un producte per elements de R (definits m-q.a.) que són compatibles amb la relació d'equivalència $\simeq_m$ i amb el preordre $\leqslant_m$ de tal forma que indueixen de forma natural estructura de ℓ-anell σ-c.c. i R-mòdul per l'esquerra (per exemple) en F_m.

Diem que una <u>funció</u> $f \in \mathfrak{F}_m$ és <u>mesurable</u> (resp. <u>fortament mesurable</u>) quan és m-equivalent a una funció, definida en tot X, mesurable (resp. fortament mesurable).

Si $f,q \in \mathfrak{F}_m$ denotem per $[f \geqslant q]$ el conjunt dels elements $x \in X$ en els que f i g estan definides i $f(x) \geqslant g(x)$. Analògament es defineixen els conjunts $[f>g]$, $[f=g]$, $[f \neq g]$, $[f \parallel g]$.

Tenim la següent

<u>2.5.1. Proposició.</u>

a) Si $f,q \in \varepsilon_+$, aleshores $[f \geqslant g]$, $[f>g]$, $[f=g]$, $[f \parallel g] \in \mathcal{a}$.

b) Si $f \in \varepsilon_+$ i $q \in L_\sigma(m)$, aleshores $[f \geqslant g] \in \mathcal{a}$.

c) Si $f \in L_\sigma(m)$, aleshores $[f \neq o] \in \mathcal{a}$.

d) Quan $L_\sigma(m)$ és δ-complet resulta que si $f,q \in L_\omega(m)$, aleshores $[f \neq q]$, $[f>g]$, $[f=g]$, $[f \parallel g] \in \mathcal{a}$.

En efecte:

a) Si $f=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ i $g=\sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ tenim que

$$[f \geqslant g] = \bigcup_{a_i \geqslant b_j} A_i B_j \in \mathcal{a} .$$

Anàlogament $[f>g]$, $[f=g]$, $[f \| g]$ són elements de $\mathcal{a}$.

b) Si $f\in\varepsilon_+$ i $g\in L_\sigma(m)$ i $\{g_n\}\subset\varepsilon_+$ és una successió tal que $g_n\uparrow g$ es té $[f\geqslant g] = \bigcap_n [f\geqslant g_n]$ i com que cada $[f\geqslant g_n]$ és de $\mathcal{a}$ i $\mathcal{a}$ és σ-àlgebra resulta que $[f\geqslant g]\in\mathcal{a}$.

c) Si $f\in L_\sigma(m)$ i $\{f_n\}\subset \varepsilon_+$ és una successió tal que $f_n \overset{\uparrow}{\circ} f$ aleshores $[f\neq o] = \bigcup_n [f_n\neq o]$ i per tant $[f\neq o]\in\mathcal{a}$.

d) Com que és un ℓ-subgrup de R^X podem reduir l'estudi al cas $g=o$. Aleshores si $f\in L_\omega(m)$ i $L_\sigma(m)$ és δ-complet resulta que $f^+, f^- \in L_\sigma(m)$ i com que $[f\geqslant o] = [f^-=o]$, $[f\leqslant o] = [f^+=o]$, $[f\neq o] = [f^+\neq o]\cup[f^-\neq o]$, $[f=o] = [f^+=o]\cap[f^-=o]$ i $[f\| o]=[f\neq o]-([f>o]\cup \cup[f<o])\cup[f=o]$ resulta que $[f>o]$, $[f<o]$, $[f=o]$, $[f\neq o]$ i $[f\| o]$ són de $\mathcal{a}$. ∎

Si $A\subset X$ i $f\in\mathcal{F}_m$ denotem per $f\chi_A$ la funció definida m-q.a. en X que coincideix amb f en A i val 0 en A^c.

<u>2.5.2. Proposició.</u> Qualssevol que siguin $f\in L_\omega(m)$ i $A\in\mathcal{a}$, és $f\chi_A\in L_\omega(m)$ i si A és un conjunt m-nul, aleshores $I(f\chi_A)=0$.

En efecte:

Suposem primer que $f\in\varepsilon_+$. Si $f=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ aleshores $f\chi_A=\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{AA_i}$ de manera que $f\chi_A$ és encara simple. A més si $m(A)=0$ resulta que $I(f\chi_A)=0$. Sigui ara $f\in L_\sigma(m)$; si $\{f_n\}\subset\varepsilon_+$ és una successió tal que $f_n \overset{\uparrow}{\circ} f$, aleshores $f_n\chi_A \overset{\uparrow}{\circ} f\chi_A$ i, com que $I(f_n\chi_A)\leqslant I(f_n)$, resulta que $f\chi_A\in L_\sigma(m)$. A més si $m(A)=0$, $I(f_n\chi_A)=o$ per a cada n i per tant $I(f\chi_A)=0$.

Finalment si $f\in L_{\omega}(m)$ i és $f=g-h$ amb $g,h\in L_{\sigma}(m)$ és $f\chi_A=g\chi_A-h\chi_A$ i per tant $f\chi_A\in L_{\omega}(m)$. I en cas de ser $m(A)=0$ també $I(f\chi_A) = I(g\chi_A)-I(h\chi_A)=0$. ■

Conseqüència d'aquesta proposició és la següent propietat que ens serà útil per a l'obtenció de la segona extensió de la integral:

2.5.3. Proposició. Si $h,g\in L_{\omega}(m)$ són tals que $g\leqslant h$ m-q.a., aleshores $I(g)\leqslant I(h)$.

En efecte:

Sigui $k=h-g$; $k\in L_{\omega}(m)$ i $k\geqslant 0$ m-q.a. Posem $B^c=[h\geqslant g]$; serà $B\in N^*_m$, és a dir, existirà un conjunt $A\in N_m$ tal que $m(A)=0$ i $A\ B$. Aleshores $A^c\subset B^c$; i com que en A^c és $h\geqslant g$, la funció $k\chi_{A^c}$, que és de $L_{\omega}(m)$ segons hem provat en la proposició anterior, és positiva; en conseqüència $I(k\chi_{A^c})\geqslant 0$. D'altra banda $k\chi_A$ també és de $L_{\omega}(m)$ i, essent $m(A)=0$, té integral nul.la, de manera que $I(k)=I(k\chi_A)+I(k\chi_{A^c}) = I(k\chi_{A^c})\geqslant 0$. I com que $I(k)=I(h)-I(g)$, queda provada la proposició. ■

6. SEGONA EXTENSIÓ DE LA INTEGRAL RESPECTE UNA o-MESURA.

Estem ara en condicions d'obtenir una segona extensió per a la integral respecte una o-mesura.

Sigui, com fins ara, una o-mesura $m:\mathcal{a}\to R_+$ definida en una σ-àlgebra de parts d'un conjunt X i valorada en un ℓ-anell σ-c.c. amb el producte seqüencialment o-continu. Suposem que la integral respecte m sobre les funcions simples és seqüencialment o-contínua i considerem la primera extensió positiva $(L_{\sigma}(m),I)$.

a) L'extensió $(\mathcal{L}_A(m), I)$.

La forma més natural d'ampliar la classe de funcions integrables, que ara és $L_{\sigma}(m)$ ó $L_{\omega}(m)$, sembla que pot ser fent integrables les funcions que són m-equivalents a una d'aquestes. En aquest sentit donem la següent

2.6.1. Definició. Diem que una funció $f\in\mathcal{F}_m$ és m-integrable si existeix alguna funció $g\in L_\sigma(m)$ tal que $f\simeq_m g$. En aquest cas definim la integral de f per $I(f)=I(g)$.

Indicarem per $\mathcal{L}_A^+(m)$ el conjunt de tals funcions m-integrables.

És clar que $I(f)$ esta ben definit i que $I:\mathcal{L}_A^+(m)\to R_+$ és una aplicació monòtona i positivament homogènea definida en el conjunt $\mathcal{L}_A^+(m)$ que és estable respecte la suma, el producte per elements de R_+ i les operacions reticulars definides m-q.a. Quant a la 0-continuïtat de I en $\mathcal{L}_A^+(m)$ és d'esperar que anirà lligada a la de I en $L_\sigma(m)$. Així efectivament tenim el clàssic

2.6.2. Teorema de Convergència Monòtona a $(\mathcal{L}_A^+(m),I)$: Si $\{f_n\}\subset\mathcal{L}_A^+(m)$ és una successió de funcions I-afitada tal que $f_n\uparrow f$ m-q.a. [1] aleshores $f\in\mathcal{L}_A^+(m)$ i $I(f) = VI(f_n)$.

En efecte:

Per a cada $n\in\mathbb{N}$ existirà una funció $g_n\in L_\sigma(m)$ tal que $g_n\simeq f_n$. Sigui $A\in\mathcal{a}$ un conjunt pel qual $m(A^c)=0$ i és $g_n=f_n$ i $f_n\overset{\circ}{\uparrow}f$ en A. Aleshores les funcions $g_n\chi_A$ són de $L_\sigma(m)$ i són tals que $g_n\chi_A\overset{\circ}{\uparrow}f\chi_A$, i com que $I(g_n\chi_A)=I(f_n)$ resulta que $\{g_n\chi_A\}$ és I-afitada. Per tant, pel T.C.M. (2.2.3), $f\chi_A\in L_\sigma(m)$ i en conseqüència $f\in\mathcal{L}_A^+(m)$ tal com voliem veure. A més $I(f)=I(f\chi_A)=VI(g_n\chi_A)=VI(f_n)$. ■

Si M_+ és σ-subreticle, aleshores $L_\sigma(m)$ és δ-complet de manera que en aquest cas resulta que $\mathcal{L}_A(m)=\mathcal{L}_A^+(m)-\mathcal{L}_A^+(m)=\{f\in\mathcal{F}_m;\ f\simeq_m g,\ g\in L_\omega(m)\}$ i els teoremes de convergència, vàlids en $(L_\omega(m),I)$, també es compleixen en $(\mathcal{L}_A(m),I)$. Tenim en efecte:

2.6.3. Teorema de Convergència Monòtona generalitzat a $(\mathcal{L}_A(m),I)$ (T.C.M.): Si M_+ és σ-subreticle i $\{f_n\}\subset\mathcal{L}_A(m)$ és una successió I-afitada tal que $f_n\overset{\circ}{\uparrow}f$, aleshores $f\in\mathcal{L}_A(m)$ i $I(f)=VI(f_n)$.

---

(1) Per $f_n\overset{\circ}{\to}f$ m-q.a. entenem que existeix un conjunt $B\in\mathcal{a}$ de manera que $f_n(x)\overset{\circ}{\to}f(x)$ per a cada $x\in B$ i $m(B^c)=0$.

La demostració es pràcticament anàloga a la del teorema anterior i no la fem.

2.6.4. Teorema de Convergència Dominada a $(\mathcal{L}_A(m),I)$ (T.C.D.):

Si M_+ és σ-subreticle, $\{f_n\}\subset\mathcal{L}_A(m)$, $g\in\mathcal{L}_A^+(m)$ i $f\in\mathcal{F}_m$ són funcions tals que $f_n \overset{o}{\to} f$ m-q.a. i $|f_n| \leqslant g$ m-q.a. per a cada $n\in\mathbb{N}$, aleshores $f\in\mathcal{L}_A(m)$ i $I(f)=\text{o-lim } I(f_n)$.

En efecte:

Siguin $h,h_n\in L_\omega(m)$ funcions tals que $h\simeq g$ i $h_n\simeq f_n$; sigui $A\in\mathcal{a}$ tal que $m(A^c)=0$ i $f_n=h_n$, $h=g$, $|f_n| \leqslant g$ i $f_n \overset{o}{\to} f$ en A. Aleshores les funcions $k_n=h_n\chi_A$ són de $L_\omega(m)$ i són tals que $k_n \overset{o}{\to} f\chi_A$ i $|k_n| \leqslant h\chi_A$. Com que $h\chi_A\in L_\sigma(m)$, pel T.C.D. (2.2.6) resulta que $f\chi_A\in L_\omega(m)$ i per tant $f\in \ _A(m)$. A més és $I(f)=I(f\chi_A)=\text{o-lim } I(k_n) = \text{o-lim } I(f_n)$. ■

2.6.5. Lema de Fatou a $(\mathcal{L}_A(m),I)$. Si M_+ és σ-subreticle i $\{f_n\}\subset\mathcal{L}_A(m)$ és una successió I-afitada per a la que, per a alguna funció $f\in\mathcal{L}_A(m)$ és $f_n \geqslant f$ m-q.a. per a cada $n\in\mathbb{N}$, aleshores $\text{o-}\underline{\lim}\ f_n$, $\text{o-}\overline{\lim}\ f_n \in \ _A(m)$, si són finites m-q.a., i a més

$$I(\text{o-}\underline{\lim}\ f_n) \leqslant \text{o-}\underline{\lim}\ I(f_n) \leqslant \text{o-}\overline{\lim}\ I(f_n) \leqslant I(\text{o-}\overline{\lim}\ f_n).$$

En efecte:

Siguin $h,h_n\in L_\omega(m)$ funcions tals que $h\simeq f$ i $h_n\simeq f_n$; sigui $A\in\mathcal{a}$ un conjunt en el qual $h=f$, $h_n=f_n$ i $\text{o-}\underline{\lim}\ f_n$ i $\text{o-}\overline{\lim}\ f_n$ són finites i tal que $m(A^c)=0$. Aleshores les funcions $h\chi_A$, $h_n\chi_A$ són de $L_\omega(m)$, $\{h_n\chi_A\}$ és I-afitada i $h_n\chi_A \geqslant h\chi_A$, de manera que per la Propietat de Fatou a $(L_\omega(m),I)$ (2.2.4.), las funcions $\text{o-}\underline{\lim}\ h_n\chi_A$ i $\text{o-}\overline{\lim}\ h_n\chi_A$, que són finites, són de $L_\omega(m)$. Per tant $\text{o-}\underline{\lim}\ f_n$, $\text{o-}\overline{\lim}\ f_n\in\mathcal{L}_A(m)$ i a més valen les desigualtats de l'enunciat. ■

Recordem que si $m:\mathcal{a} \to R_+$ és una mesura real, el conjunt $\mathcal{L}_1(m)$ de les funcions m-integrables està constituït per aquelles funcions $f:X \to \overline{R}$ que són m-equivalents a alguna funció real finita $\mathcal{a}$-mesurable i m-integrable. Tenint en compte que tals funcions són justament les del conjunt que nosaltres hem indicat per $L_\omega(m)$ i que quan $R=R$ M_+ és σ-subreticle, resulta que $\mathcal{L}_1(m)=\mathcal{L}_A(m)$. És a dir amb la segona extensió $(\mathcal{L}_A(m),I)$ aquí introduïda recuperem exactament el conjunt de totes les funcions m-integrables en el cas en que R es el cos dels nombres reals.

Ara bé, hi ha moltes formes equivalents d'obtenir, en el cas real, el conjunt $\mathcal{L}_1(m)$. Una d'elles consisteix en considerar els conjunts, que en la nostra notació hem designat per $L_\delta(m)$ i $L_\sigma(m)$, i prendre com a funcions integrables aquelles funcions $f\in\mathcal{F}_m$ per a les que

$$\inf\{I(h);\ h\in L_\sigma(m) \text{ i } h\geq f \text{ m-q.a.}\}=\sup\{I(g);\ g\in L_\delta(m) \text{ i } g\leq f \text{ m-q.a.}\}$$

(per exemple en [11] ho fan d'aquesta manera. L' única diferència que hi ha és que allí consideren funcions reals no necessàriament finites; pero com que tota funció real integrable és finita m-q.a. la construcció que fan ès equivalent a aquesta que aquí exposem).

Aquesta condició, que determina la integrabilitat d'una funció $f\in\mathcal{F}_m$, és expressable en forma equivalent dient que per a tot $\varepsilon>0$ existeixen dues funcions $g\in L_\delta(m)$ i $h\in L_\delta(m)$ tals que

$$g\leq f\leq h \quad \text{m-q.a.} \quad \text{i} \quad I(h-g)<\varepsilon.$$

Naturalment si R és un ℓ-anell arbitrari aquestes dues formes aquí citades no són equivalents i poden donar lloc a dues possibles segones extensions de la R-integral $(L_\sigma(m),I)$. En aquest sentit, i veient que en tot cas apareix la idea que una funció es diu integrable si és aproximable per funcions que ja són integrables, passem a considerar una altra segona extensió de la R-integral $(L_\sigma(m),I)$.

b) L'extensió $(\mathcal{L}_B(m), I)$.

Consideri's el conjunt

$$L_\delta(m) = \{f \in {}_m, \exists \{f_n\} \subset \varepsilon_+,\ f_n \overset{\circ}{\downarrow} f\}$$

que és estable respecte la suma, el producte per elements de R_+ i les operacions reticulars, segons hem vist a 2.1.5. a), i que està contingut en $P(L_\omega(m))$. En general $P(L_\omega(m)) \neq L_\sigma(m)$ i per tant $L_\delta(m) \not\subset L_\sigma(m)$.

2.6.6. Definició. Diem que una funció $f \in \mathcal{F}_m$ és m-integrable si existeixen successions $\{g_n\} \subset L_\delta(m)$ i $\{h_n\} \subset L_\sigma(m)$ tals que

a) $g_n \leq f \leq h_n$ m-q.a., per a tot $n \in \mathbb{N}$,

b) $I(h_n - g_n) \overset{\circ}{\rightarrow} 0$.

Designem per $\mathcal{L}_B^+(m)$ el conjunt de tals funcions.

Com que $L_\delta(m)$ i $L_\sigma(m)$ són subreticles, i I és monòtona en $L_\omega(m)$ es immediat que en la definició es pot suposar que $g_n \uparrow$ i que $h_n \downarrow$. Aleshores $I(h_n - g_n) \downarrow 0$. Tenim la següent

2.6.7. Proposició. Si $f \in \mathcal{L}_B^+(m)$ i g_n, h_n són funcions com en la definició anterior, aleshores:

a) $\wedge I(h_n) = \vee I(g_n)$ i aquest valor no depèn de les g_n, h_n escollides d'entre les que satisfan les condicions de la definició.

b) $I(h_n) = \wedge\{I(h);\ h \in L_\sigma(m)$ i $h \geq f$ m-q.a.$\}$,

$\vee I(g_n) = \vee\{I(g);\ g \in L_\delta(m)$ i $g \leq f$ m-q.a.$\}$.

En efecte:

a) Pel que hem vist a 2.5.3., serà $I(g_n) \leq I(h_m)$, qualssevol que siguin n i m, i com

$$0 \leq \bigwedge_n I(h_n) - \bigvee_m I(g_n) = \bigwedge_{n,m} I(h_n - g_m) \leq \bigwedge_n [I(h_n) - I(g_n)] = 0$$

resulta $\wedge I(h_n) = \vee I(g_n)$.

Quant a la independència d'aquest valor de les g_n, h_n escollides, suposem que tenim

$$g_n \leq f \leq h_n \quad \text{m-q.a.} \quad \text{amb} \quad g_n \in L_\delta(m) \ , \ h_n \in L_\sigma(m) \ \text{i} \ I(h_n - g_n) \to 0,$$

$$g'_n \leq f \leq h'_n \quad \text{m-q.a.} \quad \text{amb} \quad g'_n \in L_\delta(m), \ h'_n \in L_\sigma(m) \ \text{i} \ I(h'_n - g'_n) \to 0.$$

Aleshores de $g'_n \leq h_n$ m-q.a., vàlia per a tots els $m, n \in \mathcal{N}$, tindriem $I(g'_n) \leq I(h_m)$ i per tant

$$\bigvee_n I(g'_n) \leq \bigwedge_m I(h_m) = \bigvee_n I(g_n).$$

Recíprocament també seria $\bigvee_n I(g_n) \leq \bigvee_n I(g'_n)$ i per tant $\vee I(g_n) = \vee I(g'_n)$.

b) Siguin h_n, g_n com en la definició i considerem una funció $q \in L_\delta(m)$ tal que $g \leq f$ m-q.a. Aleshores $g \vee g_n \in L_\delta(m)$, $g \vee g_n \leq f \leq h_n$ m-q.a. per a cada n i $I(h_n - g \vee g_n) \leq I(h_n - g_n)$; per tant $\{g \vee g_n\}$ i $\{h_n\}$ compleixen les condicions de la definició i tindrem $\vee I(g \vee g_n) = \wedge I(h_n)$. Però $I(g) \leq I(g \vee g_n)$. D'aquí que tinguem $I(g) \leq \wedge I(h_n)$, qualsevol que sigui $g \in L_\delta(m)$ amb $g \leq f$ m-q.a.; i com que per a la successió $\{g_n\} \subset L_\delta(m)$ és $\vee I(g_n) = \wedge I(h_n)$ resulta que existeix $\vee\{I(g); g \in L_\delta(m)$ i $g \leq f$ m-q.a.$\}$ i que aquest suprem és $\vee I(g_n)$.

Dualment provariem que existeix $\wedge\{I(h); h \in L_\sigma(m)$ i $h \geq f$ m-q.a.$\}$ i és $\wedge I(h_n)$. ∎

Aquesta proposició permet definir la integral d'una funció $f \in \mathcal{L}_B^+(m)$ com el valor comú de $\vee I(g_n)$ i $\wedge I(h_n)$ que designem per $I'(f)$:

<u>2.6.8. Definició.</u> Anomenem <u>integral respecte m en $\mathcal{L}_B^+(m)$</u> l'aplicació $I': \mathcal{L}_B^+(m) \to R_+$ definida per $I'(f) = \vee I(g_n) = \wedge I(h_n)$, on h_n, g_n són funcions com en la definició anterior.

<u>2.6.9. Proposició.</u> $I':\mathcal{L}^+_B(m)\to R_+$ és un morfisme d'ordre positivament homogeni que estén la integral respecte m en $L_\sigma(m)$. Precisant:

a) $L_\sigma(m)\subset\mathcal{L}^+_B(m)$ i les dues integrals coincideixen en $L_\sigma(m)$,

b) $f,f'\in\mathcal{L}^+_B(m)\Rightarrow f+f'\in\mathcal{L}^+_B(m)$ i $I'(f+f')=I'(f)+I'(f')$,

c) $f,f'\in\mathcal{L}^+_B(m)$, $f\leqslant f'$ m-q.a. $\Rightarrow I'(f)\leqslant I'(f')$,

d) $f\in\mathcal{L}^+_B(m)$, $a\in R_+\Rightarrow af\in\mathcal{L}^+_B(m)$ i $I'(af)=aI'(f)$,

e) $f,f'\in\mathcal{L}^+_B(m)\Rightarrow f\wedge f'$, $f\vee f'\in\mathcal{L}^+(m)$.

En efecte:

a) Sigui $f\in L_\sigma(m)$ i sigui $\{f_n\}\subset\varepsilon_+$ tal que $f_n\uparrow f$ i $I(f)=\vee I(f_n)$. Aleshores les funcions $g_n=f_n$, que són de ε_+ i per tant de $L_\delta(m)$, i les funcions $h_n=f$, que són de $L_\sigma(m)$, satisfan les condicions de la definició, car $g_n\leqslant f\leqslant h_n$ i $I(h_n-g_n)=I(f_n-f_n)\downarrow 0$. En conseqüència $f\in\mathcal{L}^+_B(m)$ i a més $I(f)=I'(f)$.

Quant a la resta de propietats, considerem dues funcions $f,f'\in\mathcal{L}^+_B(m)$ i siguin $\{g_n\},\{g'_n\},\{h_n\},\{h'_n\}$ successions de funcions tals que:

$$g_n\leqslant f\leqslant h_n \quad \text{m-q.a.} \quad , \quad g_n\in L_\delta(m),\ h_n\in L_\sigma(m) \quad \text{i} \quad I(h_n-g_n)\downarrow 0,$$

$$g'_n\leqslant f'\leqslant h'_n \quad \text{m-q.a.} \quad , \quad g'_n\in L_\delta(m),\ h'_n\in L_\sigma(m) \quad \text{i} \quad I(h'_n-g'_n)\downarrow 0.$$

b) Tindrem $g_n+g'_n\leqslant f+f'\leqslant h_n+h'_n$ m-q.a.; i com que $L_\delta(m))$ i $L_\sigma(m)$ són subsemigrups, $g_n+g'_n\uparrow$ en $L_\delta(m)$ i $h_n+h'_n\downarrow$ en $L_\sigma(m)$; a més $I(h_n+h'_n-g_n-g'_n)=I(h_n-g_n)+I(h'_n-g'_n)$ de manera que $I(h_n+h'_n-g_n-g'_n)\overset{\circ}{\to}0$. Amb això queda provat que $f+f'\in\mathcal{L}^+_B(m)$. D'altra banda serà

$I'(f+f')=\vee I(g_n+g'_n)=\wedge I(h_n+h'_n)$; vegem que coincideix amb $I'(f)+I'(f')$:

$$I(f+f')=\bigvee_n I(g_n+g'_n)=\bigvee_n[I(g_n)+I(g'_n)]\leqslant\bigvee_{n,m}[I(g_n)+I(g'_m)]=I'(f)+I'(f')=$$

$$=\bigwedge_n I(h_n)+\bigwedge_n I(h'_n)=\bigwedge_{n,m}[I(h_n)+I(h'_m)]\leqslant\bigwedge_n[I(h_n)+I(h'_n)]=$$

$$=I'(f+f').$$

c) Si $f \leqslant f'$ m-q.a. serà $g_n \leqslant f \leqslant f \leqslant h'_m$ m-q.a. per a qualssevol $m,n \in N$ de manera que $I(g_n) \leqslant I(h'_m)$, i per tant $I'(f) = \bigvee_n I(g_n) \leqslant \bigwedge_m I(h'_m) = I'(f')$.

d) Si $a \geqslant 0$ aleshores $ag_n \in L_\delta(m)$, $ah_n \in L_\sigma(m)$ i se satisfà a més $ag_n \leqslant af \leqslant ah_n$ m-q.a. i $I(ah_n - ag_n) = I(a(h_n - g_n)) = aI(h_n - g_n)$ de tal forma, essent el producte en R seqüencialment o-continu, és $I(ah_n - ag_n) \overset{o}{\to} 0$. Amb això queda provat que $af \in \mathcal{L}^+_B(m)$. D'altra banda tindrem $I'(af) = \bigvee I(ag_n) = \bigvee aI(g_n)$; però, com que $\{g_n\}$ és creixent, $\{ag_n\}$ també ho és, i per tant $\bigvee aI(g_n) = \text{o-lim } a\, I(g_n) =$ $= a \text{ o-lim } I(g_n) = a. \bigvee I(g_n) = a.I'(f)$.

e) Com que $L_\delta(m)$ i $L_\sigma(m)$ són subreticles resulta que $\{g_n \vee g'_n\}$, $\{g_n \wedge g'_n\} \subset L_\delta(m)$ $\{h_n \vee h'_n\}, \{h_n \wedge h'_n\} \subset L_\sigma(m)$ són successions tals que $g_n \vee g'_n \leqslant f \vee f' \leqslant h_n \vee h'_n$ i $g_n \wedge g'_n \leqslant f \wedge f' \leqslant h_n \wedge h'_n$ m-q.a. Podem escriure per tant les relacions

$$h_n \vee h'_n - g_n \vee g'_n \leqslant h_n \vee h'_n + h_n \wedge h'_n - g_n \wedge g'_n - g_n \vee g'_n = h_n + h'_n - (g_n + g'_n),$$

$$h_n \wedge h'_n - g_n \wedge g'_n \leqslant h_n \wedge h'_n + h_n \vee h'_n - g_n \vee g'_n - g_n \wedge g'_n = h_n + h'_n - (g_n + g'_n),$$

amb les desigualtats satisfetes m-q.a. que permeten concloure que $I(h_n \vee h'_n - g_n \vee g'_n) \overset{o}{\to} 0$ i que $I(h_n \wedge h'_n - g_n \wedge g'_n) \overset{o}{\to} 0$. Amb això queda provat que $f \vee f'$, $f \wedge f' \in \mathcal{L}^+_B(m)$. ■

Com que es tracta d'una extensió de la integral $I: L_\sigma(m) \to R_+$, la continuarem denotant per I.

Observi's que de la definició es dedueix que si $f \simeq g$ i $g \in \mathcal{L}^+_B(m)$, aleshores $f \in \mathcal{L}^+_B(m)$ i $I(f) = I(g)$. És a dir, la integral $I: \mathcal{L}^+_B(m) \to R_+$ és compatible amb la relació d'equivalència que tenim definida en $\mathcal{F}_m$. Definint $I[f] = I(f)$ queda determinada una aplicació $I: L^+_B(m) \to R_+$ que té totes les propietats b)-e) de 2.6.7, en el conjunt $L^+_B(m) = \mathcal{L}^+_B(m)/\simeq$. Com que $L^+_B(m)$ és subsemigrup subreticulat, estable respecte el producte per elements de R_+, de F_m, I s'esten drà de forma única al ℓ-submòdul $L_B(m)=L_B^+(m)-L_B^+(m)$ i al subreticle $L_{\bar{B}}(m)=\{ f\in F_m;\ f^+,f^-\in L_B^+(m)\}$, pels quals serà de nou $P(L_{\bar{B}}(m))=$ $=L_B^+(m)$ i, en principi, $L_B^+(m)\neq P(L_B(m))$.

Podem també estendre la integral $I:\mathcal{L}_B^+(m)\to R_+$ als conjunts $\mathcal{L}_B(m)=\mathcal{L}_B^+(m)-\mathcal{L}_B^+(m)$ i $\mathcal{L}_{\bar{B}}(m)=\{f\in\mathcal{F}_m;\ f^+,f^-\in\mathcal{L}_B^+(m)\}$, de tal forma que $L_B(m)=\mathcal{L}_B(m)/\simeq$ i $L_{\bar{B}}(m)=\mathcal{L}_{\bar{B}}(m)/\simeq$.

Aquí, i en general d'ara endavant, cometem l'abús d'escriure $f\in L_B(m)$ en lloc de $[f]\in L_B(m)$. També escriurem $\simeq$ en lloc de $\simeq_m$ sempre que la referencia a m pugui donar-se per sobreentesa.

En una forma semblant a com la condició de ser M_+ σ-subreticle era suficient per a que fos $P(L_\omega(m))=L_\sigma(m)$ resulta que també ho és per a que sigui $P(L_B(m))=L_B^+(m)$. Efectivament tenim:

<u>2.6.10. Proposició.</u> Si M_+ és σ-subreticle, aleshores:

a) $f\in L_B^+(m)$ si i només si existeixen funcions $g,h\in L_\sigma(m)$ tals que $g\leqslant f\leqslant h$ m-q.a. i $I(g)=I(h)$.

b) $P(L_B(m))=L_B^+(m)$, i per tant $L_B(m)=L_{\bar{B}}(m)$.

c) $f\in L_B(m)$ si i només si $f^+,\ f^-\in L_B^+(m)$ i en aquest cas $|f|\in L_B^+(m)$ i $|I(f)|\leqslant I(|f|)$.

En efecte:

En ser M_+ σ-subreticle $P(L_\omega(m))=L_\sigma(m)$ i per tant $L_\delta(m)\subset L_\sigma(m)$.

a) Si $f\in L_B^+(m)$ i $\{g_n\}\subset L_\delta(m)$ i $\{h_n\}\subset L_\sigma(m)$ són successions tals que $g_n\uparrow$, $h_n\downarrow$, $g_n\leqslant f\leqslant h_n$ m-q.a. i $I(h_n-g_n)\downarrow 0$ aleshores $g=\vee g_n\in L_\sigma(m)$, ja que $L_\delta(m)\subset L_\sigma(m)$ i $\{g_n\}$ és I-afitada, i $I(g)=\vee I(g_n)=I(f)$; i $h=\wedge h_n\in L_\sigma(m)$, perquè $L_\sigma(m)$ és δ-complet, i $I(h)=\wedge I(h_n)=I(f)$. A més $g\leqslant f\leqslant h$ m-q.a.

Vegem, recíprocament, que si $g,h\in L_\sigma(m)$ són funcions tals que $g\leqslant f\leqslant h$ m-q.a. i $I(g)=I(h)$ aleshores $f\in L_B(m)$. Considerem una successió $\{g_n\}\subset\varepsilon_+$ tal que $g_n\uparrow g$ i la successió $\{h_n\}$ amb $h_n=h$. Resulta que $\{g_n\}\subset L_\delta(m)$ $\{h_n\}\subset L_\sigma(m)$, $g_n\leqslant f\leqslant h_n$ m.q.a. i $I(h_n-g_n)=$ $=I(h_n-h)+I(g-g_n)\to 0$. Amb això queda provat que $f\in L_B(m)$.

b) Sigui $f \in P(L_B(m))$. Volem veure que $f \in L_B^+(m)$. Si $f=f_1-f_2$ amb $f_1, f_2 \in L_B^+(m)$ i $f_1 \geqslant f_2$, considerem funcions $g_1, g_2, h_1, h_2 \in L_\sigma(m)$ com en a); és a dir, tals que

$$g_1 \leqslant f_1 \leqslant h_1 \quad \text{m-q.a.} \quad \text{i} \quad I(h_1)=I(g_1) = I(f_1),$$

$$g_2 \leqslant f_2 \leqslant h_2 \quad \text{m-q.a.} \quad \text{i} \quad I(h_2)=I(g_2) = I(f_2).$$

Aleshores $g_1-h_2 \leqslant f_1-f_2 \leqslant h_1-g_2$ m-q.a. i sent $f_1-f_2 \geqslant 0$ m-q.a. serà $0 \leqslant (g_1-h_2)^+ \leqslant f_1-f_2 \leqslant (h_1-g_2)^+$ m-q.a. La funció $g=(g_1-h_2)^+$ és de $L_\sigma(m)$ car $g_1-h_2 \in L_\sigma(m)-L_\sigma(m)=L_\omega(m)$ i per hipòtesi $P(L_\omega(m))=L_\sigma(m)$.

Anàlogament, $h=(h_1-g_2)^+ \in L_\sigma(m)$. I com que h_1-g_2 0 m-q.a. serà $(h_1-g_2)^+ = h_1-g_2$ de manera que tindrem $I(h_1-g_2)^+=I(h_1-g_2)$. Així, $g, h \in L_\sigma(m)$ són tals que $g \leqslant f \leqslant h$ m-q.a. i $I(g) \leqslant I(h)$. Vegem que $I(g)=I(h)$. Tenim

$$I(g)=I(g_1-h_2)^+ \geqslant I(g_1-h_2)=I(g_1)-I(h_2)=I(f_1)-I(f_2)$$

mentre que per altra banda,

$$I(h)=I(h_1-g_2)^+= I(h_1-g_2)= I(h_1)-I(g_2)=I(f_1)-I(f_2).$$

Amb això queda provat, segons hem vist en a), que $f \in L_B^+(m)$.

c) Essent $P(L_B(m))=L_B^+(m)$ és clar que $f \in L_B(m)$ si i només si $f^+, f^- \in L_B^+(m)$ i aleshores es té que $|f| \in L_B^+(m)$ i que

$$|I(f)|=|I(f^+)-I(f^-)| \leqslant I(f^+) + I(f^-) = I(|f|). \blacksquare$$

Com ja hem observat, de la Definició 2.6.6. de m-integrabilitat se'n deriva en particular que tota funció de $\mathcal{F}_m$ m-equivalent a una funció de $L_\sigma(m)$ és m-integrable, és a dir, $\underline{\mathcal{L}_A^+(m) \subset \mathcal{L}_B^+(m)}$. Quant a la inclusió contrària tenim una condició suficient que l'assegura:

2.6.11. Proposició. Si M_+ és σ-subreticle, una condició suficient per a que sigui $\mathcal{L}^+_B(m) = \mathcal{L}^+_A(m)$ és que en $L_\omega(m)$ es compleixi

$$I(|f|) = 0 \Rightarrow f \underset{m}{\simeq} 0.$$

En efecte:

Segons la proposició anterior, si $f \in \mathcal{L}^+_B(m)$ i M_+ és σ-subreticle, existeixen funcions $g,h \in L_\sigma(m)$ tals que $g \leqslant f \leqslant h$ m-q.a. i $I(h)=I(g)=I(f)$; és a dir, $I(h-g)=0$. Però $h-g \geqslant 0$ m-q.a. i per tant, $I(h-g)=I(|h-g|)=0$ d'on, per hipòtesi, se'n segueix que $h-g \simeq 0$, és a dir que $h \simeq g$ i per tant que $f \simeq g$. En conseqüència $f \in \mathcal{L}^+_A(m)$. Amb això queda provat que $\mathcal{L}^+_B(m) = \mathcal{L}^+_A(m)$. ■

Aquesta condició suficient és expressable en termes relatius només a la mesura. En efecte, tenim la següent

2.6.12. Proposició. Si M_+ és σ-subreticle, aleshores una condició necessària i suficient per a que es compleixi

$$I(|f|) = 0 \Rightarrow f \underset{m}{\simeq} 0$$

en $L_\omega(m)$, és que $m(\mathcal{a}) = \{m(A); A \in \mathcal{a}\}$ no contingui divisors de zero.

En efecte:

Vegem que la condició és suficient. Suposem que $m(\mathcal{a})$ no té divisors de zero i que $f \in L_\omega(m)$ és una funció tal que $I(|f|)=0$. Volem veure que $[f \neq 0]$ es m-nul.

Si $f \in \varepsilon_+$ i $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, amb $a_i \neq 0$, aleshores de

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i)$$

se'n segueix, en la hipòtesi feta, que ha de ser $m(A_i)=0$ per a cada $i \in \{1,\dots,n\}$, d'on $[f \neq 0] = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ és m-nul.

Si $f \in L_\sigma(m)$ i $\{f_n\}$ ε_+ es una successió tal que $f_n \uparrow f$, de $I(f) = \vee I(f_n) = 0$ se'n deriva que $I(f_n)=0$ per a cada $n \in \mathbb{N}$, i per tant que $[f_n \neq 0]$ es m-nul. D'aquí que $[f \neq 0] = \bigcup_n [f_n \neq 0]$ sigui m-nul.

Finalment si $f\in L_\omega(m)$, $|f|\in L_\sigma(m)$ i per tant si $I(|f|)=0$, és $[f\neq 0]=[|f|\neq 0]$ m-nul.

La condició també és necessària, ja que si $m(\mathcal{a})$ té divisors de zero, aleshores existeix al menys una funció $f\in L_\omega(m)$ per a la qual és $I(|f|)=0$ i en canvi $[f\neq 0]$ no es m-nul. En efecte, considerem dos elements $a,b\neq 0$ tals que $ab=0$ i sigui $b=m(A)$ per a algun $A\in\mathcal{a}$. Aleshores la funció $f=a\chi_A$ és simple, $[f\neq 0]=A$ no és m-nul i $I(f)=a\, m(A)=ab=0$. ■

D'aquestes dues darreres proposicions, juntament amb les propietats de la integral $(\mathcal{L}_A(m),I)$, se'n dedueix finalment el seguent

<u>2.6.13. Teorema.</u> Sigui R un ℓ-anell σ-c.c. amb el producte seqüencialment o-continu; $m:\mathcal{a}\to R_+$ una o-mesura definida en una σ-àlgebra $\mathcal{a}$ de parts d'un conjunt X. Si se satisfan les següents condicions:

1) La integral respecte m en ε_+ és seqüencialment o-contínua,
2) El conjunt M_+ de les funcions fortament mesurables positives es σ-subreticle,
3) $m(\mathcal{a})$ no conté divisors de zero.

aleshores

a) $\mathcal{L}_B(m)=\mathcal{L}_A(m)$ i $\mathcal{L}_B^+(m)=\mathcal{L}_A^+(m)$ és a dir, $f\in\mathcal{L}_B(m)$ si i només si $f\simeq g$ per a alguna funció $g\in L_\omega(m)$ i si $f\in\mathcal{L}_B^+(m)$, aleshores es pot prendre $g\in L_\sigma(m)$.

b) Si $F\in\mathcal{F}_m$ és una funció mesurable, aleshores $f\in\mathcal{L}_B(m)$ si i només si $|f|\in\mathcal{L}_B^+(m)$ i en aquest cas $|I(f)|\leqslant I(|f|)$.

c) Per a la R-integral $(\mathcal{L}_A(m)\ I)=(\mathcal{L}_B(m),I)$ es compleixen els teoremes clàssics de convergència monòtona, dominada i propietat de Fatou, 2.6.3, 2.6.4 i 2.6.5 respectivament.

En efecte:

a) En aquestes hipòtesis hem vist (2.6.11) que $\mathcal{L}_A^+(m)=\mathcal{L}_B^+(m)$ i per tant $\mathcal{L}_B(m)=\mathcal{L}_A(m)=\{f\in\mathcal{F}_m;\ f\simeq g,\ g\in L_\omega(m)\}$.

b) Ja sabem que si f $_B$(m) aleshores $|f|\in\mathcal{L}_B^+(m)$. Recíprocament suposem que $f\in\mathcal{F}_m$ es mesurable i que $|f|\in\mathcal{L}_B^+(m)$ i vegem que aleshores $f\in\mathcal{L}_B(m)$. Sigui g una funció definida per tot m-equivalent a f i mesurable. Aleshores $|g|\simeq|f|$ i com que $|f|\in\mathcal{L}_B^+(m)$ també $|g|\in\mathcal{L}_B^+(m)$. A més $g^+,g^-\in M_+$ i per tant $g^+,g^-\in L_\sigma(m)$ de manera que $g\in L_\omega(m)$, i essent $f\simeq g$, pel que acabem de veure en a), resulta que $f\in\mathcal{L}_B(m)$, tal com voliem provar. ■

Observi's que quan $R=\mathbb{R}$ se satisfan les tres condicions del teorema 2. .3, i per tant $\mathcal{L}_B(m)=\mathcal{L}_A(m)=\mathcal{L}_1(m)$. En la secció següent estudiem en quines condicions se satisfan les hipòtesis del Teorema anterior en el cas particular d'una o-mesura $m:\mathcal{a}\to\mathbb{R}^I$. Abans d'estudiar aquesta integral, volem fer observar que la condició sobre $m(\mathcal{a})$ no és necessària per a que sigui $\mathcal{L}_B(m)=\mathcal{L}_A(m)$ i per tant per a que en $(\mathcal{L}_B(m),I)$ es compleixin els teoremes de convergència. Efectivament tenim:

<u>2.6.14. Exemple.</u> Sigui $m:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to R_+$ una o-mesura valorada en un ℓ-anell σ-c.c. amb el producte seqüencialment o-continu. Aleshores per a la integral respecte a m de funcions $f:\mathbb{N}\to R$ és $\mathcal{L}_B(m)=\mathcal{L}_A(m)$ independentment de si $m(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ conté divisors de zero o no.

En efecte: Segons hem vist en l'Exemple 2.4.2, en aquestes hipòtesis M_+ és σ-subreticle i $M_+=\{f:\mathbb{N}\to R_+\}$. D'altra banda la integral respecte m en ε és seqüencialment o-continua, ja que pot considerar-se com un cas particular de l'Exemple 2.3.3.

Sigui (a_n) la successió que determina m (veure 1.7.7.). Si $f=(b_n)\in M_+$, aleshores les funcions $f_n=(b_1,b_2,\dots,b_n,0,\dots)\in\varepsilon_+$ són tals que $f_n\uparrow f$, de manera que, essent $I(f_n)=\sum_{i=1}^{n} b_i a_i$, $f\in L_\sigma(m)$ si i només si la sèrie o-$\Sigma\, b_n a_n$ és o-convergent.

Un conjunt $A\subset\mathbb{N}$ és m-nul si $A\subset A_o=\{n\in\mathbb{N};\ a_n=o\}$.

Vegem que $\mathcal{L}_B^+(m)\subset\mathcal{L}_A^+(m)$. Sigui $f\in\mathcal{L}_B^+(m)$. Com que M_+ és σ-subreticle, existeixen funcions $g,h \in L\ (m)$ tals que $g \leq f \leq h$ m-q.a. i $I(h)=I(f)=I(g)$. Sigui $B \in \mathfrak{P}(N)$ tal que $g \leq f \leq h$ en B i $m(B^c)=0$; aleshores $g\chi_B \leq f\chi_B \leq h\chi_B$ de manera que com que $h\chi_B \in L_\sigma(m)$, també és $f\chi_B \in L_\sigma(m)$. Finalment, de $f \simeq f\chi_B$ se'n segueix que $f \in \mathcal{L}^+_A(m)$.

7. LA INTEGRAL RESPECTE UNA o-MESURA $m: \mathcal{a} \to R^I$.

Sigui I un conjunt d'índexos qualsevol; $m: \mathcal{a} \to R^I$ una o-mesura positiva definida en una σ-àlgebra de parts d'un conjunt X; i sigui F una funció $F: X \to R^I$. Designem per F_i i m_i la component i-èssima de F i m respectivament; cada m_i es una mesura real positiva definida en $\mathcal{a}$.

Segons hem vist a l'Exemple 2.3.4, la integral respecte m[1] és seqüencialment o-contínua en el ℓ-submòdul de les funcions $\mathcal{a}$-simples $F: X \to R^I$, i per tant pot aplicar-se el mètode de Daniell per a estendre-la als conjunts $L_\sigma(m)$ i $L_\omega(m)$ i d'aquests estendre-la a $\mathcal{L}^+_B(m)$ i $\mathcal{L}_B(m)$. Recordem que si com és usual designem per $L^1(m_i)$ l'espai vectorial de les funcions reals m_i-integrables Lebesgue, definides en X, aleshores $L^1(m_i)=L_B(m_i)$, mentre que $L_\sigma(m_i)$ és el conjunt de les funcions reals finites i positives definides en X, $\mathcal{a}$-mesurables, m-integrables Lebesgue.

2.7.1. Proposició. Si $F: X \to R^I$ és una funció definida m-q.a. en X i $F \in L_B(m)$ aleshores $F_i \in L^1(m_i)$ per a cada $i \in I$ i $\int F dm = (\int F_i dm_i)$.

En efecte: Desglossarem la proposició en diversos cassos. Tenim:

1) $F \in \varepsilon_+ \Rightarrow F_i \in \varepsilon_+$ per a cada $i \in I$ i $\int F dm = (\int F_i dm_i)$. Aquest cas ja l'hem estudiat en l'exemple 2.3.4. abans citat.

2) $F \in L_\sigma(m) \Rightarrow F_i \in L_\sigma(m_i)$ per a cada $i \in I$ i $\int F dm = (\int F_i dm_i)$. Sigui $\{F_n\} \subset \varepsilon_+$ una successió tal que $F_n \underset{o}{\uparrow} F$. Aleshores $F^i_n \underset{o}{\uparrow} F_i$ per a cada $i \in I$ i $\{F^i_n\} \subset \varepsilon_+$; com que $\int F_n dm = (\int F^i_n dm_i)$, de l'existència de $\bigvee_n \int F_n dm$ se'n deriva la de $\bigvee_n \int F^i_n dm_i$ per a cada $i \in I$. D'aquí que $F_i \in L_\sigma(m_i)$. A més

$$\int F dm = \bigvee_N \int F_n dm = \bigvee_n \left(\int F^i_n dm_i \right) = \left(\bigvee_n \int F^i_n\, dm_i \right) = \left(\int F_i dm_i \right),$$

---

(1) A partir d'aquí usem indistintament els signes I(f) i f dm per a indicar la integral de f respecte a m.

tal com voliem veure.

3) $F\in L_B^+(m) \Rightarrow F_i\in L^1(m_i)$ per a cada $i\in I$ i $\int F dm = (\int F_i dm_i)$. Siguin $\{G_n\} \subset L_\delta(m)$, $\{H_n\} \subset L_\sigma(m)$ successions de funcions tals que $G_n\uparrow$, $H_n\downarrow$, $G_n \leq F \leq H_n$ m-q.a., per a cada n natural, i $\int(H_n-G_n) \overset{\circ}{\downarrow} 0$. Aleshores, com que $N_m = \bigcap_i N_{m_i}$, és

$$G_n^i \leq F_i \leq H_n^i \quad m_i\text{-q.a.}$$

per a cada n natural i $i\in I$; a més $H_n^i \in L_\sigma(m_i)$, com acabem de veure, i $G_n^i \in L_\delta(m_i)$ com anàlogament es provaria, de manera que $\int(H_n^i-G_n^i) \overset{\circ}{\downarrow} 0$ per a cada $i\in I$.

Amb això queda provat que cada funció F_i és m_i-integrable, és a dir, que $F_i\in L^1(m_i)$, i a més

$$\int F dm = \bigwedge_n \int H_n dm = \bigwedge_n (\int H_n^i dm_i) = (\bigwedge_n \int H_n^i dm_i) = (\int F_i dm_i).$$

Ara és immediat veure que si $F\in L_B(m)$, aleshores $F_i\in L^1(m_i)$ i també $\int F dm = (\int F_i dm_i)$, ja que si $F\in L_B(m)$ i és $F=G-H$ amb $G,H\in L_B^+(m)$, es té $F_i=G_i-H_i$ de manera que $G_i,H_i\in L^1(m_i)$. Per tant $F_i\in L^1(m_i)$. A més

$$\int F dm = \int G dm - \int H dm = (\int G_i dm_i)-(\int H_i dm_i) = \int F_i dm_i.$$

Amb això queda demostrada la Proposició. ∎

2.7.2. Observacions. Aquestes observacions fan referència a un possible recíproc de les diferents parts en que hem dividit la demostració de la proposició anterior.

a) Si $F_i\in\varepsilon_+$ per a cada $i\in I$ i I és finit, aleshores $F=(F_i)\in\varepsilon_+$; i no pot suprimir-se la condició de finitut de I.

En efecte, per a cada F_i queda determinat un nombre finit de conjunts $\{A_k^i\}\subset \mathcal{a}$ sobre els quals F_i és constant. Aleshores si I és finit les funcions $\{F_i\}$ determinen globalment un nombre finit de conjunts $\{A_k^i\}_{i\epsilon k}$ sobre els quals F és constant, i per tant F és α-simple.

Per a veure que no pot suprimir-se la condició de finitut de I considerem el següent cas:

Sigui $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ un conjunt numerable; $\alpha=(X)$ i I=X. Per a cada $n\epsilon N$ considerem la funció $F_n:X \to R$ definida per $F_n(x)=n$, si $x=x_n$, i $F_n(x)=0$, si $x\neq x_n$. Aleshores cada funció F_n és simple i $F=(F_n)$ no ho és ja que el conjunt de valors que pren F és el conjunt $\{a_n \epsilon R^X;\ a_n=(0,\ldots,0,n,0,\ldots)\}$ que és numerable. ■

b) Si $F_i\epsilon\,\varepsilon_+$ per a cada $i\epsilon I$ i I és numerable, aleshores $F=(F_i)\epsilon L_\sigma(m)$. A més no pot suprimir-se el que I sigui numerable. Posem $I=\{i_1,i_2,\ldots,i_n,\ldots\}$ i considerem per a cada n natural la funció $G_n:X \to R^I$ per a la que

$$G_n^i=\begin{cases} F_i & \text{si } \ i_1 \leqslant i \leqslant i_n, \\ 0 & \text{si } \ i_n < i. \end{cases}$$

Pel que hem vist a a), cada G_n és α-simple; $0\leqslant G_n \leqslant F$ i $G_n \underset{o}{\uparrow} F$, ja que per a cada $i=i_p\epsilon I$ tenim $G_n^i=F_i$ per a tots els $n\geqslant p$. A més $\{\int G_n dm\}$ és o-afitada car $\int G_n\, dm \leqslant (\int G_n^i dm_i) \leqslant (\int F_i\, dm_i)$; per tant $F\epsilon L_\sigma(m)$.

Que la numerabilitat de I no pot ser suprimida ho veurem al final de c).

c) Si $F_i\epsilon L_\sigma(m_i)$ i I és numerable aleshores $F=(F_i)\epsilon L_\sigma(m)$. A més no pot suprimirse el que I sigui numerable.

En efecte: Si per a cada $i\epsilon I$, $\{g_n^i\}\subset\varepsilon_+$ és una successió de funcions tal que $g_n^i \underset{o}{\uparrow} F_i$, resulta que les funcions $G_n=(g_n^i)$ són de $L_\sigma(m)$, pel que acabem de veure en b), i $G_n \underset{o}{\uparrow} F$; a més $\{\int G_n dm\}$ és o-afitada. Per tant $F\epsilon L_\sigma(m)$. ■

Conseqüència immediata de c) és el resultat que ja hem analitzat en l'Exemple 2.4.3: quan I és numerable $L_\sigma(m)$ és δ-complet.

Efectivament: si $\{F_n\} \subset L_\sigma$ i $F_n \overset{\circ}{\uparrow} F$, aleshores, per a cada $i \in I$, $\{F_n^i\} \subset L_\sigma(m)$ i $F_n^i \overset{\circ}{\uparrow} F_i$, de manera que cada F_i és real mesurable positiva; per tant $F_i \in L_\sigma(m_i)$ i, com que I és numerable, $F=(F_i)$ és també de $L_\sigma(m)$.

Vegem, amb l'exemple següent, que no pot suprimir-se la numerabilitat d'I ni en b) ni en c):

<u>2.7.3. Exemple.</u> Consideri's la funció $F\cdot[0,1] \to R^{[0,1]}$ definida per $F(x)=x\delta_x$. Cada component F_y de F és simple i $F \notin L_\sigma(m)$.

En efecte: Observem en primer lloc que per a cada $y \in R$ és $F_y = y\delta_y$, i per tant F_y és simple, ja que

$$F_y(x) = (x\delta_x)(y) = \begin{cases} y & \text{si } y=x \\ 0 & \text{si } y \neq x \end{cases} = (y\delta_y)(x).$$

D'aquí se'n segueix que si $G:[0,1] \to R^{[0,1]}$ és una funció tal que $0 \leqslant G \leqslant F$, ha de ser $0 \leqslant G(x) \leqslant x\delta_x$ per a cada $x \in [0,1]$ i per tant $G(x)=\alpha_x \delta_x$ per a algun nombre real α_x tal que $0 \leqslant \alpha_x \leqslant x$. En conseqüència, si $0 \leqslant G \leqslant F$ i $x \neq z$, aleshores $G(x) \wedge G(z)=0$, és a dir, G no pot pendre el mateix valor no nul en dos punts diferents. D'aquesta manera, si G és a més simple, ha de ser necessàriament nul.la, excepte en un nombre finit de punts com a màxim.

Si tenim funcions $G_n \in \varepsilon_+$ tals que $0 \leqslant G_n \leqslant F$, el conjunt $[G_n \neq 0]$ és finit, per a cada $n \in N$, de manera que si $G_n \overset{\uparrow}{\circ}$ aleshores $[\vee G_n \neq 0] = \bigcup_n [G_n \neq 0]$ és com a màxim numerable i, per tant, no podrà ser mai $G_n \underset{\circ}{\uparrow} F$, ja que $[F \neq 0]=[0,1]$.

Designem per N_m el σ-ideal dels conjunts m-nuls de $\mathcal{a}$ i per N_i el dels conjunts m_i-nuls de $\mathcal{a}$. És clar que $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ i per tant la m-equivalència de dues funcions $F,G:X \to R^I$ implica la m_i-equivalència de cadascuna de les components $F_i, G_i : X \to R$. El recíproc és fals en general. En efecte, tenim la següent propietat

d) Sigui $F=(F_i)$, $G=(G_i)$; I numerable. De la m-equivalència de F_i amb G_i per a cada $i \in I$, se'n segueix la m-equivalència de F i G si i només si $N_i = N_j$ per a tots els $i,j \in I$.

Quant al "si" tenim que si per a cada $i \in I$ existeix un conjunt $A_i \in N_i$ tal que $F_i = G_i$ en A_i^c, aleshores $A = \bigcup_i A_i$ és un conjunt de $\mathcal{a}$, m-nul, pel qual $F=G$ en A^c.

Pel que fa al "només si", provarem que si $N_i \neq N_j$ per a alguna parella d'indexos $i,j \in I$ aleshores existeixen al menys dues funcions F,G tals que cada F_i és m_i-equivalent a G_i pero F no és m-equivalent a G.

Sigui $A \in N_{i_o} - N_j$. Aleshores $m_{i_o}(A)=0$ i $m_j(A) \neq 0$. Per tant $m(A) \neq 0$. Considerem la funció $G=(G_i)$ definida així: $G_{i_o} = a\chi_A$, $G_i = 0$ per a tots els $i \neq i_o$. Cada component G_i de G és m_i-nul.la i si $a \neq 0$, G no és m-nul.la. ■

És fàcil veure que en la demostració de la part "sí" és essencial que I sigui numerable. Si no ho fos, no podriem assegurar que $A = \bigcup A_i \in \mathcal{a}$ ni, en cas de ser $A \in \mathcal{a}$, que $m(A)=0$. Efectivament, si considerem la funció $F:[0,1] \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ com en l'Exemple 2.7.3. definida per $F(x) = x\,\delta_x$, aleshores, prenent per a cada component $y \in [0,1]$ la mesura de Lebesgue de la longitud en $\mathcal{a} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, és $N_y = N_z$ per a tot $y,z \in [0,1]$ i es té $F_y \simeq 0$ per a cada $y \in [0,1]$, mentres que $F \not\simeq 0$, ja que $[F \neq 0] = [0,1]$.

e) La condició $N_i = N_j$, per a totes les parelles d'índexos $i,j \in I$, és equivalent a la de no haver-hi divisors de zero en $m(\mathcal{a})$.

Per acabar, i com a conseqüència de tot el que s'ha vist tenim la següent

<u>2.7.4. Proposició.</u> Sigui I un conjunt numerable i $m:\mathcal{a} \to \mathbb{R}^I$ una σ-mesura positiva per a la que $m(\mathcal{a})$ no conté divisors de zero, és a dir, per a la que $N_i = N_j$ per a tot $i,j \in I$. Aleshores

a) $\mathcal{L}_B(m) = \mathcal{L}_A(m)$

b) $F = (F_i) \in L_B(m) \Leftrightarrow F_i \in L^1(m_i)$ per a cada $i \in I$, i en aquest cas $\int F dm = (\int F_i dm_i)$.

En efecte:

a) Segons hem vist en 2.3.4. i en c), es compleixen les hipòtesis del teorema 2.6.13. i per tant $\mathcal{L}_B(m)=\mathcal{L}_A(m)$.

b) Com que la Proposició 2.7.1. ens dóna la implicació en el sentit ($\Rightarrow$), només ens cal provar l'altra. Sigui $F=(F_i)$ amb $F_i \in L^1(m_i)$ per a cada $i \in I$. Podem suposar que $F \geq 0$. Aleshores per a cada F_i existeix una funció $G_i \in L_\sigma(m_i)$ tal que $G_i \simeq F_i$. Per ser I numerable $G=(G_i) \in L_\sigma(m_i)$ i si a més $m(\mathcal{a})$ no conté divisors de zero resulta que $F \simeq G$. Per tant $F \in \mathcal{L}_A(m)$, és a dir, $F \in L_B(m)$.∎

8. LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Sigui R un ℓ-anell σ-c.c. amb el producte seqüencialment o-continu i $m:\mathcal{a} \to R_+$ una o-mesura definida en una σ-àlgebra $\mathcal{a}$ de parts d'un conjunt X.

Recordem que donades una mesura real $m:\mathcal{a} \to \mathbb{R}$ i una funció $f \in L^1(m)$, l'equació $\ell(A)=\int_A f dm = \int f\chi_A dm$ defineix una nova mesura en $\mathcal{a}$, que s'anomena la integral indefinida de f respecte m. És sabut que ℓ és absolutament m-continua, és a dir que

$$\lim_{|m|(A)\to 0} \ell(A) = 0,$$

o equivalentment, que $\ell(A)=0$ quan $|m|(A)=0$.

En aquest apartat estudiem l'anàleg de la integral indefinida respecte una o-mesura.

2.8.1. Definició. Donades una o-mesura $m:\mathcal{a} \to R_+$ i una funció f m-integrable anomenem integral indefinida de f respecte m la funció de conjunt $\ell:\mathcal{a} \to R$ definida per

$$\ell(A)= \int_A f dm = \int f\chi_A \, dm,$$

sempre que aquesta integral existeixi per a cada $A \in \mathcal{a}$.

Es tracta de veure en primer lloc si ℓ està definida per a totes les funcions $f \in \mathcal{L}_B(m)$ ó, en tot cas, per a quines funcions $f \in \mathcal{L}_B(m)$ hi està, i d'estudiar les propietats fonamentals de ℓ.

2.8.2. Teorema. Per a tota funció $f\in\mathcal{L}_B(m)$ està definida la integral indefinida de f respecte m. A més ℓ és una o-mesura o-afitada, seqüencialment m-contínua.

En efecte:

Suposem primer que f és simple i positiva. Aleshores si

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

i $A\in\mathcal{a}$ resulta que la funció

$$f\chi_A = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{AA_i}$$

és també simple i positiva i per tant, per a cada $A\in\mathcal{a}$, està definit $\ell(A) = \int_A f dm$.

És immediat que ℓ és additiva en $\mathcal{a}$. Quant a la σ-additivitat observem que si $\{A_p\}\subset\mathcal{a}$ és una successió tal que $A_p\downarrow\emptyset$ aleshores $A_pA_i\downarrow\emptyset$ per a cada $i\in\{1,\dots,n\}$; essent m o-mesura serà o-lim $m(A_pA_i)=0$, per a cada $i\in\{1,\dots,n\}$; per tant

$$\ell(A_p) = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_pA_i) \overset{o}{\to} 0.$$

Pel que fa a la m-continuïtat, observem que de la definició es dedueix, si $a=\vee\{f(x);x\in X\}=a_1\vee\dots\vee a_n$, que

$$\ell(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i m(AA_i) \leqslant a.\sum_{i=1}^{n} m(AA_i)=a.m(A),$$

on donem per suposat qut treballem amb la representació canònica de f, és a dir, que els conjunts A_i són mútuament disjunts; essent el producte en R seqüencialment o-continu, és clar que $\ell(A_n) \overset{o}{\to} 0$ quan $m(A_n) \overset{o}{\to} 0$, és a dir, que $\ell \ll_s m$.

Sigui ara $f\in L_\sigma(m)$ i $\{f_n\}$ ε_+ una successió tal que $f_n \uparrow_o f$ i $\int f dm = \vee\int f_n dm$. Aleshores per a cada $A\in\mathcal{a}$ resulta que $f_n\chi_A\in\varepsilon_+$, $f_n\chi_A \uparrow f\chi_A$ i $\{f_n\}\chi_A$ és I-afitada; per tant $f\chi_A\in L_\sigma(m)$ i $\int f\chi_A dm= =\vee \int f_n\chi_A dm$. La integral indefinida està doncs definida. Quant a les propietats de ℓ, observem que si designem per ℓ_n la integral indefinida de f_n, tenim $\ell_n \uparrow_p \ell$; així, tant la σ-additivitat com la convergència de la successió de o-mesures $\{\ell_n\}$ és uniforme i per tant, segons 1.4.5. és també σ-additiva.[1] Vegem que $\ell \underset{s}{<<} m$. Cal provar que si $m(A_i) \overset{o}{\to} 0$ aleshores $\ell(A_i) \overset{o}{\to} 0$, on $\{A_i\}$ és una successió d'elements de a.

Com que $\ell_n \underset{p}{\uparrow} \ell$ uniformement en a, existeix una successió $\delta_p \downarrow 0$ tal que, per a cada $A_i \in \{A_i\}$ i p natural,

$$0 \leqslant \ell(A_i) - \ell_p(A_i) \leqslant \delta_p. \qquad (*)$$

Vegem que existeix $o\text{-}\lim \ell(A_i)$ i és 0. De (*) i prenent suprems se'n dedueix que per a tot $p,n \in N$,

$$\bigvee_{i \geqslant n} \ell(A_i) \leqslant \bigvee_{i \geqslant n} \ell_p(A_i) + \delta_p$$

d'on, tenint en compte que $p \underset{s}{<<} m$,

$$0 \leqslant o\text{-}\underline{\lim}\ \ell(A_i) \leqslant o\text{-}\overline{\lim}\ \ell(A_i) = \bigwedge_n \bigvee_{i \geqslant n} \ell(A_i) \leqslant$$

$$\leqslant \bigwedge_n \bigvee_{i \geqslant n} \ell_p(A_i) + \delta_p = o\text{-}\lim\ \ell_p(A_i) + \delta_p = \delta_p;$$

i com que p és arbitrari i $\delta_p \downarrow 0$ resulta que existeix $o\text{-}\lim \ell(A_i)$ i que és 0, tal com voliem veure.

Observem de pas que en ser $\ell \underset{s}{<<} m$ i $\ell_n \uparrow \ell$ les ℓ_n resulten ser <u>uniformement seqüencialment m-contínues</u>, és a dir: Si $\{A_i\}$ a és una successió de conjunts tal que $m(A_i) \overset{o}{\to} 0$, aleshores existeix una successió $\delta_i \downarrow 0$ tal que, per a cada n natural i cada $A_i \in a$, es té $0 \leqslant \ell_n(A_i) \leqslant \delta_i$.

Finalment, sigui $f \in \mathcal{L}_B^+(m)$. Si $g_n \uparrow$, $h_n \downarrow$ són successions de funcions $\{g_n\} \subset L_\delta(m)$ i $\{h_n\} \subset L_\sigma(m)$ tals que, per a cada n natural, $g_n \leqslant f \leqslant h_n$ m-q.a. i $\int (h_n - g_n)\, dm \downarrow 0$, resulta que per a ca-

---

[1] En (1.4.5.) el grup G on prenien valors les o-mesures era c.c. i el resultat feia referència a xarxes; no hi ha problema en veure que si G es σ-c.c., aleshores el resultat és vàlid per a successions.

da $A\in\mathcal{a}$ és $g_n \chi_A \leqslant f\chi_A \leqslant h_n\chi_A$ m-q.a., on $\{g_n\chi_A\}\subset L_\delta(m)$ i $\{h_n\chi_A\}\subset L_\sigma(m)$; i com que $\int(h_n\chi_A-g_n\chi_A)dm = \int(h_n-g_n)\chi_A dm \leqslant (h_n-g_n)dm$, resulta que $\int(h_n\chi_A-g_n\chi_A)dm \overset{o}{\to} 0$. Per tant $f\chi_A\in\mathcal{L}^+_B(m)$ i, en conseqüència, està definida la integral indefinida de f respecte m, $\ell(A) = \int f\chi_A dm$.

A més $\ell(A)=V\int_A g_n dm = \Lambda\int_A h_n dm$. D'aquí que si ℓ_n designa la integral indefinida de h_n, el que tenim és que $\ell_n \overset{p}{\downarrow} \ell$ en $\mathcal{a}$. De nou, les o-mesures ℓ_n són uniformement σ-additives i $\ell_n\downarrow\ell$ uniformement en $\mathcal{a}$ i per tant, segons 1.4.5. resulta que ℓ és o-mesura. També, com que per a cada $n\in\mathbb{N}$ és $\ell_n<\!\!<_s m$ resultarà de $m(A_i) \overset{o}{\to} 0$ i $0\leqslant\ell(A_i)\leqslant \ell_n(A_i)$ que $(A_i) \overset{o}{\to} 0$, es a dir, que $\ell<\!\!<_s m$.

Ara no hi ha cap problema en considerar una funció $f\in\mathcal{L}_B(m)$. Si $f=g-h$ amb $g,h\in\mathcal{L}^+_B(m)$, serà $f\chi_A = g\chi_A-h\chi_A$, de manera que estarà definida la integral indefinida de f i serà

$$\ell(A) = \int f\chi_A\, dm = \int g\chi_A\, dm - \int h\chi_A\, dm = \ell_1(A)-\ell_2(A)$$

on per ℓ_1 i ℓ_2 designem les integrals indefinides de g i h respectivament. És clar que ℓ no depèn de l'expressió de f com a diferència de dues funcions de $\mathcal{L}^+_B(m)$. D'altra banda, ja que ℓ_1 i ℓ_2 són dues o-mesures positives i seqüencialment m-contínues ℓ és una o-mesura o-afitada i seqüencialment m-contínua.

Amb això queda acabada la demostració del teorema. ∎

9. LA INTEGRAL RESPECTE UNA o-MESURA I EL TEOREMA DE RADON-NIKODYM.

És clar que si $f\in\mathcal{L}_B(m)$ i $f\simeq g$ aleshores f i g defineixen la mateixa integral indefinida. Per tant el teorema anterior ens permet associar a cada funció $f\in L_B(m)$ una o-mesura o-afitada ℓ_f sequencialment m-contínua i per tant m-contínua. Serà possible establir algun anàleg del teorema de Radon-Nikodym?. És a dir, si $m:\mathcal{a}\to R_+$ i $\ell:\mathcal{a}\to R$ són dues o-mesures, i ℓ és seqüencialment m-contínua ó, senzillament, m-contínua, existeix alguna funció f m-integrable tal que $\ell(A)=\int_A f\, dm$ per a cada $A\in\mathcal{a}$?. I en cas d'exis tir és única?, és a dir, si h és una altra funció d'aquestes, és h=f m-q.a.?.

Pel que fa a l'existència de la funció és fàcil veure que el teorema no es compleix. En efecte, el següent exemple, inspirat en un de Wright [34], ho mostra:

2.9.1. Exemple. Sigui X={a,b} un conjunt de dos elements; $\mathcal{a}$ l'àlgebra dels subconjunts de X. Considerem les mesures $\ell, m: \mathcal{a} \to R^2$ definides per $m(a)=\ell(n)=(1,0)$, i $m(b)=\ell(a)=(0,1)$. Aleshores $\ell \ll_s m$, i per tant també $\ell \ll m$, i no existeix cap funció $f: X \to R^2$ tal que $\ell(A)=\int_A fdm$ en $\mathcal{a}$.

Efectivament. Si existís una tal funció per a A={b} tindriem

$$(1,0) = \ell(b) = \int_{\{b\}} fdm = f(b)\, m(b) = (0, f(b))$$

i això és impossible.

La unicitat de la possible derivada de Radon Nikodym, suposant que existeixi, tampoc es pot assegurar. En primer lloc és necessari que $m(\mathcal{a})$ no tingui divisors de zero. Precisant, tenim

2.9.2. Proposició. Siguin $m:\mathcal{a} \to R_+$ una o-mesura; f,g funcions m-integrables i ℓ_f, ℓ_g les o-mesures m-contínues definides per f i g. Una condició necessària per tal que

$$\ell_f = \ell_g \Rightarrow f = g \quad m\text{-q.a.}$$

és que $m(\mathcal{a})$ no tingui divisors de zero.

En efecte: Si $m(\mathcal{a})$ té divisors de zero aleshores la mesura idènticament nul.la pot obtenir-se tant de la funció f=0 com de la funció $f \in \varepsilon_+$, l'existència de la qual ha estat provada en 2.6.12, que és no m-nul.la i per a la que $\int fdm=0$. ■

Queda pendent la qüestió de si aquesta condició necessaria és també suficient.

En una aproximació a l'anàlisi d'aquest problema hem vist que en el cas particular de o-mesures valorades en el ℓ-anell $R=R^I$, aquesta condició, juntament amb la de que I sigui numerable, ens assegura no sols la unicitat si no també l'existència de la de rivada de Radon-Nikodym.

2.9.3. Proposició. Sigui I un conjunt numerable, $m:\mathcal{a} \to R^I$ una σ-mesura positiva en una σ-àlgebra $\mathcal{a}$ de parts d'un conjunt X i $\ell:\mathcal{a} \to R^I$ una σ-mesura qualsevol m-contínua. Si $N_i=N_j$ per a tot $i,j\in I$ (N_i és el σ-ideal dels conjunts m_i-nuls), aleshores existeix una funció $F\in\mathcal{L}_B(m)$ tal que $\ell(A)=\int_A F\, dm$, per a tot $A\in\mathcal{a}$.

Si H és una altra funció amb la mateixa propietat, aleshores H=F m-q.a.

Abans de provar aquesta Proposició, ens és útil fer les següents observacions, que apleguem en un Lema previ.

2.9.4. Lema. Siguin $\ell, m:\mathcal{a} \to R^I$ dues σ-mesures en una σ-àlgebra de parts $\mathcal{a}$ d'un conjunt X; m positiva. Designem per ℓ_i, m_i les components i-èssimes de ℓ i m respectivament. Aleshores

1) $\ell_i << m_i$ per a tot $i\in I \Rightarrow \ell << m$.
2) $\ell << m \Rightarrow \ell_i << m_i$ per a cada $i\in I$, si i només si $m(\mathcal{a})$ no té divisors de zero.
3) Si $m(\mathcal{a})$ no te divisors de zero, és a dir, si $N_i=N_j$ per a tot $i,j\in I$, aleshores $\ell << m$ si i només si $\ell \underset{s}{<<} m$.

En efecte:

1) és immediat: si $m(A)=0$ aleshores $m_i(A)=0$ per a cada $i\in I$ i per tant $\ell_i(A)=0$ per a cada $i\in I$. D'on resulta que $\ell(A)=0$. Amb això queda provat que $\ell << m$.

2) Per a veure el "si", suposem que $m(\mathcal{a})$ no té divisors de zero, és a dir que $N_i=N_j$ per a tot $i,j\in I$, i que $\ell << m$. Volem veure que aleshores $\ell_i << m_i$ per a cada $i\in I$.

Sigui $m_i(A)=0$. Aleshores serà $m(A)=0$ i per tant $\ell(A)=0$, d'on se segueix que $\ell_i(A)=0$.

Per a veure el "només si" basta provar que si $m(\mathcal{a})$ té divisors de zero aleshores no és cert que $\ell << m \Rightarrow \ell_i << m_i$. El mateix Exemple 2.9.1 ho mostra: allí $\ell << m$ i en canvi ni $\ell_1 << m_1$ ni $\ell_2 << m_2$.

3) Tota mesura seqüencialment m-contínua és m-contínua; per tant només cal veure el recíproc. Sigui $\ell << m$ i sigui $\{A_n\} \subset \mathcal{a}$ una successió tal que $m(A_n) \overset{o}{\to} 0$. Cal veure que aleshores $\ell(A_n) \overset{o}{\to} 0$.

Si $m(\mathcal{a})$ no té divisors de zero serà $\ell_i << m_i$, segons acabem de veure en 2); i, com que per a mesures reals definides en σ-àlgebres els dos conceptes coincideixen, resulta que $\ell_i \underset{s}{<<} m_i$. Així, si $m(A_n) \overset{o}{\to} 0$, serà $m_i(A_n) \underset{o}{\to} 0$ i per tant $\ell_i(A_n) \to 0$, per a cada $i \in I$, i en definitiva $\ell(A_n) \to 0$, tal com voliem provar. ■

Demostració de la Proposició 2.9.3. Sigui $\ell << m$. Volem veure que existeix una única (m-q.a.) funció $f \in \mathcal{L}_B(m)$ tal que $\ell(A) = \int_A f dm$ per a cada $A \in \mathcal{a}$.

Segons el que acabem de veure serà $\ell_i << m_i$ per a cada $i \in I$, i per tant, existiran funcions $f_i \in L'(m_i)$ tals que

$$\ell_i(A) = \int_A f_i \, dm_i,$$

per a cada $i \in I$ i $A \in \mathcal{a}$. Podem suposar que $f_i \in L_\omega(m_i)$, ja que si $f_i \in L^1(m_i)$, existeix alguna funció $g_i \in L_\omega(m_i)$ tal que $g_i \simeq f_i$ i i aleshores g_i i f_i determinen la mateixa integral indefinida ℓ_i. Aleshores les funcions $F_1 = (f_i^+)$ i $F_2 = (f_i^-)$ són de $L_\sigma(m)$ i per tant $F = F_1 - F_2 \in L_\omega(m)$. Finalment, tenim que $F\chi_A = (f_i \chi_A)$ d'on

$$\int_A F \, dm = \int F\chi_A \, dm = (\int f_i \chi_A \, dm_i) = (\int_A f_i dm_i) = (\ell_i(A)) = \ell(A),$$

és a dir, F és la funció que buscàvem. Per a veure que és única, suposem que $G \in \mathcal{L}_B^+(m)$ és una altra funció tal que, per a tot $A \in \mathcal{a}$,

$$\int_A F \, dm = \int_A G \, dm.$$

Aleshores serà $\int_A F_i dm_i = \int_A G_i \, dm_i$ per a cada $i \in I$ i $A \in \mathcal{a}$, de manera que serà $F_i \simeq G_i$. Però, essent I numerable i $N_i = N_j$ per a tot $i, j \in I$, això significa que $F \simeq G$. ■

10. SOBRE ALTRES FORMES DE CONSTRUCCIÓ DE LES EXTENSIONS DE LA INTEGRAL RESPECTE UNA o-MESURA.

a) Integral no positiva.

En lloc de treballar inicialment només amb funcions positives podiem haver partit del ℓ-mòdul ε de totes les funcions simples i considerar els conjunts

$$U = \{ f \in R \ ; \quad \exists \{f_n\} \subset E_+ \ , \quad f_n \overset{\uparrow}{\circ} f \},$$

$$L = \{ f \in R \ ; \quad \exists \{f_n\} \subset \varepsilon \ , \quad f_n \overset{\circ}{\downarrow} f \},$$

en una forma semblant a la construcció de la integral que es fa, per exemple, en [22] i [11] . Aleshores U i L, que contenen la funció idènticament nul.la, són estables respecte la suma, el producte per elements de R_+ i les operacions reticulars, i U=-L. Posant

$$I(f) = \vee \, I(f_n) \quad \text{si} \quad f \in U$$

i

$$I(f) = -I(-f) \quad \text{si} \quad f \in L$$

(que equival a posar $I(f) = \wedge I(f_n)$ quan $f \in L = -U$), s'obté una aplicació $I: U \cup L \to \bar{R}$, valorada en l'ampliat de R, que resulta esser ben definida, com es comprova de forma totalment anàloga al cas estudiat, i per a la qual

$$f \in U_+ \ , \quad I(f) < +\infty \ \Leftrightarrow \ f \in L_\sigma(m),$$

$$f \in L_+ \ \Leftrightarrow \ f \in L_\delta(m).$$

Quan $f \in U \cup L$ i $I(f) \neq \pm\infty$ diem que f té integral finita. En $L_\sigma(m)$ i $L_\delta(m)$ aquesta nova integral coincideix amb la primera extensió de la m-integral I en ε_+.

Si considerem el conjunt $\underline{\mathcal{L}_c^+(m)}$ de les funcions $f \in \mathcal{F}_m$ per a les que existeixen dues successions $\{g_n\} \subset L$ i $\{h_n\} \subset U$, de funcions amb integral finita, tals que

$$g_n \leqslant f \leqslant h_n \quad \text{m-q.a.} \quad \text{per a cada } n \in \mathbb{N} \, ,$$

i

$$I(h_n) - I(g_n) \overset{\circ}{\to} 0,$$

resulta, de la mateixa definició de $\mathcal{L}_c^+(m)$ i de les observacions fetes aquí dalt la següent

2.10.1. Proposició. Se satisfà $P(\mathcal{L}_c(m))=\mathcal{L}_B^+(m)$ i per tant $\mathcal{L}_c(m)=\mathcal{L}_{\bar{B}}(m)$.

En efecte:

La inclusió $\mathcal{L}_B^+(m)\subset P(\mathcal{L}_c(m))$ és immediata, car $L_\delta\subset -U$ i $L_\sigma\subset U$ i les dues integrals coincideixen. Vegem la inclusió en sentit contrari: sigui $f\in\mathcal{L}_c(m)$, $f\geqslant 0$; cal veure que aleshores $f\in\mathcal{L}_B^+(m)$. Si $f\geqslant 0$ i g_n, h_n són funcions tals que, per a cada n natural, és $g_n\in L$, $h_n\in U$, $g_n\leqslant f\leqslant h_n$ m-q.a. i $I(h_n)-I(g_n)\to 0$, aleshores $g_n^+\in L_+=L_\delta(m)$ i $h_n^+\in U_+$; com que $h_n\geqslant 0$ m-q.a., és $h_n^+\simeq h_n$ i, per tant, $I(h_n^+)=I(h_n)$ és finit. En conseqüència $h_n^+\in L_\sigma(m)$. A més $I(h_n^+-g_n^+)=I(h_n)-I(g_n^+)\leqslant I(h_n)-I(g_n)\to 0$. Amb això resulta que les successions $\{h_n^+\}\subset L_\sigma(m)$ i $\{g_n^+\}\subset L_\delta(m)$ compleixen les condicions que asseguren que $f\in\mathcal{L}_B^+(m)$. ■

D'aquesta proposició se'n segueix de forma immediata que si M_+ és σ-subreticle, aleshores, $\mathcal{L}_c(m)=\mathcal{L}_B(m)$.

b) Per m-equivalències.

A partir de la primera extensió $(L_\sigma(m),I)$ de la integral respecte una o-mesura m (ε,I), poden ser considerats diferents conjunts de funcions "m-integrables", tots ells introduits a través de les relació de m-equivalència.

En aquest sentit ja hem considerat el conjunt $\mathcal{L}_A^+(m)$ (definició 2.6.1). En general podriem prendre també els conjunts

$$\mathcal{L}_\omega(m) = \{f\in\mathfrak{F}_m;\ f\simeq g,\ g\in L_\omega(m)\}$$

$$\mathcal{L}_{\bar{\omega}}(m) = \{f\in\mathfrak{F}_m;\ f\simeq g,\ g\in L_{\bar{\omega}}(m)\}$$

pels quals tindriem $\mathcal{L}_{\bar{\omega}}(m)\subset\mathcal{L}_{\bar{A}}(m)\subset\mathcal{L}_A(m)\subset\mathcal{L}_\omega(m)$. Si M_+ és σ-subreticle, aleshores $L_\omega(m)=L_{\bar{\omega}}(m)$, i per tant en aquest cas els quatre conjunts coincidirien.

En relació als conjunts $\mathcal{L}_B(m)$ i $\mathcal{L}_{\bar{B}}(m)$ tindriem a més que $\mathcal{L}_{\bar{A}}(m)\subset\mathcal{L}_{\bar{B}}(m)$ i $\mathcal{L}_\omega(m)\subset\mathcal{L}_B(m)$.

Finalment si consideréssim, per a l'obtenció de la segona extensió, el conjunt de funcions $f:X \to R_+$ per a les que existeixen dues successions $\{g_n\} \subset L_\delta(m)$ i $\{h_n\} \subset L_\sigma(m)$ tals que $g_n \leqslant f \leqslant h_n$, per a tot $n \in N$, i $I(h_n - g_n) \overset{o}{\to} 0$, en una forma semblant a com es fa en [22] i a partir d'aquest conjunt, que indiquem per $L_E(m)$, consideréssim el conjunt

$$\mathcal{L}_E^+(m) = \{f \in \mathcal{F}_m; \quad f \simeq g, \quad g \in L_E(m)\},$$

obtindriem funcions m-integrables de manera que tindriem

$$\mathcal{L}_A^+(m) \subset \mathcal{L}_E^+(m) \subset \mathcal{L}_B^+(m).$$

Resumint, podriem representar les relacions entre aquests diferents conjunts de funcions m-integrables en el quadre que segueix:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_{\bar\omega}(m) \arrow[d] & & \\
\mathcal{L}_{\bar A}(m) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{L}_{\bar E}(m) \arrow[r, hook] & \mathcal{L}_{\bar B}(m) = \mathcal{L}_c(m) \\
\mathcal{L}_A(m) \arrow[d] & & \\
\mathcal{L}_\omega(m) \arrow[r, hook] & \mathcal{L}_E(m) \arrow[r, hook] & \mathcal{L}_B(m).
\end{tikzcd}$$

Per tot el que hem vist, si M_+ és σ-subreticle, els quatre conjunts de la primera columna coincideixen. La Proposició 2.6.10. ens prova que també coincideixen $\mathcal{L}_{\bar B}(m)$ i $\mathcal{L}_B(m)$. Finalment, una demostració anàloga a aquesta que acabem de citar ens provaria que $\mathcal{L}_{\bar E}(m) = \mathcal{L}_E(m)$.

Si a més $m(a)$ no conté divisors de zero, aleshores, segons hem vist en 2.6.13, $\mathcal{L}_B(m) = \mathcal{L}_A(m)$ i per tant, en aquest cas, tots els conjunts que apareixen en el quadre coincideixen.

c) <u>Integració de funcions no finites.</u>

En el plantejament que hem fet, en aconseguir els conjunts $\mathcal{L}_A(m)$ ó $\mathcal{L}_B(m)$, estem treballant amb funcions definides m-q.a., de manera que podem incloure-hi aquelles funcions $f:X \to \bar{R}$ definides m-q.a. i valorades en l'ampliat del ℓ-anell $\bar{R}$ per a les quals el conjunt $[f=\pm\infty]$ és m-nul.

Ara bé, si d'entrada admetéssim, per a les funcions definides en X i valorades a R els valors impropis $\pm\infty$, resultaría que tota successió $\{f_n\}\subset \varepsilon_+$ monòtona creixent tindria límit puntual. Podriem considerar el conjunt

$$L_\sigma^\infty = \{f:X \to \bar{R};\ \exists\{f_n\}\subset\varepsilon_+,\ f_n \underset{o}{\uparrow} f\}$$

i definir $I'(f) = VI(f_n)$, com usualment es fa, en construir la integral de Lebesgue respecte una mesura real.

Apuntem aquí uns problemes, que, per quedar pendents de resolució, poden justificar el que hagim treballat només amb funcions finites.

Primer. El primer problema que apareix és que així definida I' pot no estar "ben definida": volem dir, que si $\{g_n\}\subset\varepsilon_+$ és una altra successió tal que $g_n \underset{o}{\uparrow} f$ pot ésser que $VI(g_n)$ no coincideixi amb $VI(f_n)$.

En efecte, el raonament que utilitzàrem per a provar que era una "bona definició" quan consideràvem només funcions finites (2.1.6) no val aquí. Efectivament, de $g_n \underset{o}{\uparrow} f$ i $f_n \underset{o}{\uparrow} f$ no se'n pot deduir que $g_n \wedge f_m \underset{o}{\uparrow} g_n \wedge f = g_n$, ja que per a un $x\in X$ pel qual $f(x)=+\infty$ resulta que $(g_n\wedge f_m)(x)=g_n(x)\wedge f_m(x)\not\to g_n(x)$, (vegi's el comentari al final de l'apartat 2 del capítol 0).

I de fet, al menys en general, I' no pot definir-se en L_σ^∞, com mostra le següent:

2.10.2. Proposició. Si $m(\mathcal{a})$ conté algun divisor de zero, amb co-divisors positius per l'esquerra, que no és annulador per l'esquerra de l'anell R, aleshores no pot definir-se la integral a L_σ^∞.

En efecte: Sigui $a=m(A)$ un divisor de zero pel qual existeixi algun element $b\in R_+$ tal que $ba=0$ i algun $c\in R_+$ tal que $c\,a>0$.

Considerem la funció $f: X \to R\,\{+\infty\}$ definida per $f(x)=0$

si $x \notin A$ i $f(x) = +\infty$ si $x \in A$; aleshores $f \in L_\sigma^\infty$ ja que les funcions $f_n = nb\chi_A \in \varepsilon_+$ són tals que $f_n \underset{\circ}{\uparrow} f$. A més $I(f_n) = nbm(A) = nba = 0$ per a tot n natural. En conseqüencia hauria de ser $I'(f) = 0$.

D'altra banda també les funcions $g_n = nd\chi_A \in \varepsilon_+$ són tals que $g_n \underset{\circ}{\uparrow} f$. Però $I(g_n) = n.c.m(A) = n.c.a \uparrow +\infty$ i per tant hauria de ser $I'(f) = +\infty$. ■

Per tant, la construcció de la primera extensió de la integral respecte una σ-mesura per a la que se satisfan les hipotesis d'aquesta proposició, és inviable.

El cas de la integral respecte una σ-mesura $m: \mathcal{a} \to R^I$, per a la que fos $N_i \neq N_j$ per a algunes components m_i, m_j, és un cas concret on no pot treballar-se amb L_σ^∞.

<u>Segon.</u> Suposant que sigui possible definir la integral en L_σ^∞ apareix encara un segon problema.

Per a poder considerar els conjunts $L_\omega(m)$, $L-_\omega(m)$ i, en definitiva, $\mathcal{L}_B^+(m)$, cal sumar funcions de integral finita; i per a poder-les sumar caldria veure abans que si $f \in L_\sigma^\infty$ i $I'(f) < +\infty$ aleshores f és finita m-q.a. En aquest sentit tenim la següent

<u>2.10.3. Proposició.</u> Suposi's que pot definir-se la integral en L_σ^∞. Si no tots els elements de R_+ són divisors de zero, aleshores tota funció $f \in L_\sigma^\infty$ amb integral finita, per a la que $[f = +\infty] \in \mathcal{a}$, és finita m-q.a.

En efecte:

Sigui $b \in R_+$ un element positiu que no sigui divisor de zero; $\{f_n\} \subset \varepsilon_+$ una successió tal que $f_n \underset{\circ}{\uparrow} f$; $A = [f = +\infty]$. Considerem les funcions

$$g_n = f_n \chi_{A'} + n\, b\, \chi_A$$

i suposem que $m(A) = a > 0$. Aleshores $g_n \in \varepsilon_+$, per construcció, i $g_n \underset{\circ}{\uparrow} f$ i, per tant, $I'(f) = \bigvee I(g_n)$. Però $I(g_n) = I(f_n \chi_{A'}) + I(nb\chi_A) = I(f_n\chi_{A'}) + n.b.a$ i, com que per hipòtesi és $ba > 0$, resulta que $I(g_n) \uparrow +\infty$, contràriament a la hipòtesi que $I'(f) < +\infty$. ■

Queda obert el problema de determinar condicions que permetin, d'una banda, definir la integral a L_σ^∞ i, d'altra, assegurar que les funcions de L_σ^∞ amb integral finita són finites m-q.a. Tenint en compte que si $m(\mathcal{a})$ no té divisors de zero, aleshores pot aplicar-se la Proposició anterior, queda també pendent, per l'interès que pot tenir, el determinar si per a les funcions $f \in L_\sigma^\infty$ és $[f = +\infty] \in \mathcal{a}$ ó, si no és aixi, en quines condicions seria cert.

Per acabar i tornant a l'exemple de la σ-mesura $m: \mathcal{a} \to R^I$ resulta la següent situació:

<u>2.10.4. Exemple.</u> Sigui I un conjunt numerable. Considerem una σ-mesura $m: \mathcal{a} \to R^I$ amb $N_i = N_j$ per a tot $i, j \in I$. En aquest cas pot definir-se la integral per a les funcions $F \in L_\sigma^\infty$. A més si $\{F_n\} \subset \varepsilon_+$ és una successió amb $F_n \uparrow_\circ F$ i $\bigvee_n \int F^n \, dm < +\infty$ aleshores F és finita m-q.a., $F \in \mathcal{L}_B^+(m)$ i $\int F dm = \bigvee_n \int F^n \, dm$.

En efecte: Com que $N_i = N_j = N$ podem suposar d'entrada que $\mathcal{a}$ és la σ-àlgebra completada amb els conjunts m-nuls.

Sigui $F \in L_\sigma^\infty(m)$ i $\{F_n\} \subset \varepsilon_+$ una successió tal que $F_n \uparrow_\circ F$. Per a veure que podem definir $I'(F)$ per $\bigvee \int F_n dm$, bastarà provar que si $\int F_n dm \leq a$ per a algun element $a \in R^I$ aleshores $\{\int H_n dm\}$ també és o-afitada, per a tota altra successió $\{H_n\} \subset \varepsilon_+$ tal que $H_n \uparrow F$, i que $\bigvee \int F_n dm = \bigvee \int H_n dm$.

Per a cada $i \in I$ la successió $\{F_n^i\} \subset \varepsilon_+$ de funcions reals simples es monòtona creixent. Sigui G_i la funció $G_i : X \to \bar{R}$ definida per $G_i(x) = \bigvee_n F_i^n(x)$. Com que $\int F_n^i \, dm_i \leq a_i$ per a tot n natural, resulta pel T.C.M.a. $L'(m_i)$, que G_i es m_i-integrable. En conseqüència el conjunt $[G_i = +\infty]$ és m-nul. En suposar que m(a) no té divisors de zero és $N_i = N_m$ i per tant resulta que $[G_i = +\infty] \in N_m$ per a tot $i \in I$.

Com que $F(x) = +\infty$ si i només si $\bigvee F_i(x) = +\infty$ per a algun index $i \in I$ és $[F = +\infty] = \bigcup_i [G_i = +\infty]$, de manera que si I és numerable $[F = +\infty] \in \mathcal{a}$

i és m-nul. Es a dir, F és finita m-q.a. Vegem ara que $F\in\mathcal{L}_B^+(m)$ i que $\int Fdm = \bigvee_n \int F_n dm$.

Com que cada G_i és finita fora de A i A és m-nul, és $G_i \simeq G_i\chi_{A'}$, on $G_i\chi_A$ és una funció finita en tot X i m_i-integrable. En conseqüencia la funció $G=(G_i\chi_A)$ és de $\mathcal{L}_B^+(m)$, ja que se satisfan les hipòtesis necessàries per poder utilitzar 2.7.2, i a més $G=F\chi_A$. Per tant $F\in\mathcal{L}_B^+(m)$ i serà

$$\int Fdm = \int F\chi_A dm = (\int G_i\chi_A dm_i) = (\int G_i dm_i) = (\bigvee \int F_m^i dm_i) = \bigvee(\int F_n^i dm_i) =$$

$$= \bigvee \int F_n dm.$$

Naturalment, si $\{H_n\}\subset\varepsilon_+$ és una altra successió de funcions tal que $H_n \underset{o}{\uparrow} F$, aleshores, com que $F\in\mathcal{L}_B^+(m)$, és $\int H_n dm \leqslant \int Fdm$; és a dir, $\{\int H_n dm\}$ és o-afitada i, aplicant el raonament anterior a $\{H_n\}$, resulta de nou que $\bigvee \int H_n dm = \int Fdm$.

En aquest cas podria per tant definir-se la integral en L_σ^∞ de manera que si $F\in L_\sigma^\infty$ i $I'(F)<+\infty$ aleshores F és finita q.a. i $I'(F)=\int Fdm$.

BIBLIOGRAFIA

1) ALIPRANTIS BURKINSHAW. "Locally solid Riesz Spaces". Academic Press. New York, 1978.

2) ALSINA, C. "Producte, convexificació i completació d'espais mètrics generalitzats i probabilístics". Tesi doctoral. Pubs. Univ. Barcelona, (1977).

3) ALSINA, C. - TRILLAS, E., "On natural metrics". Stochastica, Vol II, nº. 3, 1977.

4) ASH, R. B., "Real Analysis and Probability". Academic Press. Londres, 1972.

5) BARTLE, R. G., "A general bilinear vector integral". Stud. Math. Vol. 15 (337-352), 1956.

6) BATLE, N., "Contribución a un estudio básico de los espacios métricos probabilísticos" Tesi doctoral. Publ. Univ. Barcelona, 1972.

7) BIGARD, A. - KEIMEL, K. - WOLFENSTEIN, S., "Groupes et anneaux reticulés". Lecture notes 608. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1977.

8) BIRKHOFF, G., "Lattice theory". Amer. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. 25. New York, 1968.

9) BOURBAKI. "Éléments de Mathématique. Topologie Générale. Hermann. Paris, 1971.

10) CRISTESCU, R., "Ordered Vector Spaces and Linear Operators". Abacus Press. Tunbridge Wells, Kent, 1976.

11) DESCOMBRES, R., "Intégration". Hermann. París, 1972.

12) DIEUDONNÉ, J., "Éléments d'Analyse, Tome II". Gauthier-Villars, Ed. Paris, 1974. (2a. Ed.).

13) DUNFORD, N. - SCHWARTZ, J., "Linear operators (part I)". Interscience. New York, 1967.

14) EVERETT, C. J., "Sequence completion of lattice modules". Duke Math. J. II, (109-119), 1944.

15) FAYRES, B. - MORRISON, T. J., "The Jordan Descomposition of vector-valued measures". Amer. Math. Soc. Vol. 60 (139-143), 1976.

16) FLOYD, E. E., "Boolean algebras with pathological order pro perties". Pacific J. Math. 5 (687-89), 1955.

17) FREMLIN, D. H., "Topological Riesz Spaces and Measure Theory". University Press. Cambridge, 1974.

18) FUCHS,L. "Partially ordered algebraic systems", Pergamon Press. Oxford, 1963.

19) JAMESON, G., "Ordered Linear spaces". Lecture notes in M. 141, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1970.

20) KAPPOS, D. A., "Probability algebras and Stochastic Spaces". Academic Press. New York, 1969.

21) KAPPOS, D. A., "Remarks on the structure of spaces of generalized random variables". Bull. Soc. Math. de Grece, N.S.6 (129-142), 1965.

22) LOOMIS, "An introduction to Abstract harmonic analysis". Princeton, 1953.

23) LUXEMBURG, W. - ZAANEN, A., "Riesz Spaces". North Holland. Amsterdam, 1971.

24) PAPANGELOU, F., "Order Convergence and topological completion of commutative lattice-groups". Math. Annalen 155, (81-107), 1964.

25) PERESSINI, A. L. "Ordered Topological Vector Spaces". Harper and Row. New York, 1967.

26) RIBENBOIM, P., "Théorie des groupes ordonnés", Univ. Nac. del Sur. Bahia Blanca, 1959.

27) SALES, F. de A., "Curso de Probabilidades", Offset. Univ. Barcelona, 1972.

28) SEGAL, I. E. - KUNZE, R.A., "Integrals and Operators". Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1978.

29) STUART, A. - STEINBERG. "On lattice-ordered rings in which the square of every element is positive". J. Austral. Math. Soc. 22 (Series A) (362-370), 1976.

30) TRILLAS, E., "Sobre distancias estadísticas". Tesi doctoral. Publ. Univ. Barcelona, 1972.

31) VULIKH, B. Z., "Introduction to the theory of partially ordered spaces". Wolters-Noordhoff. Groningen, 1967.

32) WILLARD.."General Topology". Addison. Wesley. Reading, 1970.

33) WRIGHT, J.D.M., "Stone-algebra-valued measures and integrals". Proc. London Math. Soc. (3) 19 (107-122), 1969.

34) WRIGHT, J.D.M., "A Radon-Nikodym theorem for Stone algebra valued measures". Trans. Amer. Math. Soc. 139 (75-94), 1969.

35) WRIGHT, J.D.M., "Vector Lattice Measures in Locally Compact Spaces". Math. Z., 120, (193-203), 1971.

36) WRIGHT, J.D.M., "The measure extension problem for vector lattices". Annales Inst. Fourier (Grenoble) 21, Fasc. 4, (65-85), 1971.

37) WRIGHT, J.D.M., "An algebraic characterization of vector lattices with de Borel regularity property". J. London Math. Soc. (2), (277-285), 1973.

38) WRIGHT, J.D.M., "Measures with values in partially ordered spaces: regularity and σ-additivity". Oberwolfach, 1975. Springer-Verlag. Berlin-Heilderberg, 1976.