MESURES I PROBABILITATS

EN ESTRUCTURES ORDENADES

Maria Congost Iglesias

Memòria presentada per optar al grau de Doctor en Matemàtiques per la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona.

Vull donar les gràcies a tots els que d'una manera o altra han fet possible l'elaboració d'aquesta memòria:

Al Dr. Nadal Batle, que m'encaminà en aquesta línea de investigació i sota la direcció del qual s'ha portat a terme el treball.

A tots els companys del Departament de Matemàtiques de l'E.T.S.A.B. i especialment al Claudi Alsina, la Montserrat Pons, l'Elisabet Saguer i en Joan Trias, que a més d'aportar en hores de treball nombroses suggerències han sabut estar sempre presents en els moments difícils.

I d'una manera molt especial vull donar les gràcies al Josep Lluís i als pares,que en tot moment m'han encoratjat a tirar endavant.

Barcelona, setembre 1980.

I N D E X

INTRODUCCIÓ

Per primera vegada, a l'any 1928, Riesz feu notar que la majoria dels espais vectorials que apareixen a l'anàlisi funcional són no solament espais de Banach sinó també espais reticulats. Cap als voltants del 1935 trobem els treballs de Riesz, Freudenthal i Kantorovitch, els quals amb les seves aportacions independents, són considerats els fundadors de la teoría dels espais vectorials reticulats.

Riesz es va interessar pel que avui coneixem com espai dual respecte a l'ordre. Freudenthal va obtenir l'anomenat "teorema espectral", de gran importància, ja que d'ell se'n deriven, entre altres resultats importants, el teorema espectral per a operadors hermítics en espais de Hilbert i el teorema de Radon-Nikodym. Kantorovitch inicià l'estudi de les propietats algebraïques i de convergència dels espais vectorials reticulats (o espais de Riesz), que posteriorment ha estat aplicat a la teoria d'operadors.

Després d'ells, la teoria deles espais de Riesz es desenvolupà àmpliament, amb aportacions de Nakano, Yosida, Stone, Bohnenblust, Vulikh, Pinsker, dels mateixos fundadors i de molts altres, com poden ésser Birkhoff ([8]) i Fuchs ([18]), que encara que no s'interessen particularment pels espais vectorials reticulats, contribueixen, amb els seus treballs sobre estructures ordenades més generals, al desenvolupament de la teoria.

En la majoria dels espais vectorials reticulats que apareixen a l'ànalisi s'hi poden considerar també, de forma natural, estructures topològiques. En aquest sentit, entre 1950 i 1970, s'ha portat a terme l'estudi dels espais vectorials topològics ordenats (és a dir, espais vectorials reticulats, en els que s'hi introdueix una topologia que és compatible tant amb l'estructura d'espai vectorial com amb l'estructura ordenada), en el que destaquen les contribucions de Nakano, Jameson ([19]) i Peressini ([25]), entre altres.

En el desenvolupament de la teoria dels espais de Riesz ens interessa assenyalar les seves aplicacions a la teoria de la mesura.

Kappos ([20]) en particular, ha aplicat les propietats de la convergència en espais de Riesz a l'estudi abstracte dels espais de probabilitat. Així, per exemple, per un procés usual en la teoria de la completació de grups reticulats commutatius ([14]), [24]) obté el conjunt de totes les variables aleatòries a partir de les variables aleatòries elementals; el mateix procés pot ser aplicat també per a definir variables aleatòries generalitzades valorades en grups reticulats commutatius o en reticles de Banach (Kappos, [20],[21]).

Més recentment, Fremlin ([17]) ha aplicat la teoria abstracte dels espais de Riesz a l'estudi dels espais de funcions que apareixen a la teoria de la mesura.

En una altre línea, han estat considerades les mesures valorades en un espai vectorial reticulat condicionalment complet o σ-condicionalment complet (resp. c.c. ó σ-c.c.) per a les que la σ-additivitat es defineix en termes de propietats reticulars; és a dir, si $(X,\mathcal{a})$ és un espai de mesura i V és un espai vectorial reticulat σ-c.c., una funció additiva $m:\mathcal{a} \to V$ és una mesura σ-additiva en ordre si és positiva i si per a cada successió monòtona creixent de conjunts en $\mathcal{a}$, $A_n \uparrow A$, és $m(A) = \bigvee_n m(A_n)$. (Wright, [33]).

En el cas especial que V és el dual d'un reticle de Banach, la condició $m(A) = \bigvee_n m(A_n)$ equival a que $m(A) = \lim m(A_n)$, en la topologia feble*. Pero en general (Floyd, [16]), no existeix per a V una topologia d'espai vectorial T_1, per a la que tota successió monòtona creixent afitada en V sigui convergent cap al seu suprem. Sembla ser, aquesta, la raó per la qual els resultats i els mètodes de l'estudi d'aquest tipus de mesures difereixen dels de les mesures en espais vectorials topològics.

L'objecte d'aquesta memòria és desenvolupar alguns aspectes de l'estudi del tipus de funció σ-additiva definit anteriorment. Dos han sigut els centres d'interès, entorn dels quals ha girat l'elaboració de la memòria:

1) En primer lloc, fer un estudi de les funcions de conjunt additives i σ-additives en ordre, valorades en un grup reticulat σ-c.c. ó c.c. (vàlid també per a les valorades en anells reticulats i espais de Riesz), a partir de l'estructura reticulada i de les propietats de convergència en ordre, prescindint dels aspectes topològics que en una altra línea podrien ser considerats. Ens ha interessat especialment la possibilitat d'establir anàlegs dels teoremes clàssics de descomposició (de Jordan-Hahn, de Yosida-Hewitt i de Lebesgue).

Bàsicament en l'estudi fet, que correspon al Capítol 1, hem utilitzat resultats de la teoria de grups reticulats, relacionats sobretot amb la convergència en ordre, i, d'alguna manera, nocions relatives a la teoria d'espais mètrics generalitzats.

2) L'altre centre d'interès, que correspon al Capítol 2, ha estat la construcció d'una integral respecte a una mesura σ-additiva en ordre definida en una σ-àlgebra de parts d'un conjunt X i valorada en un anell reticulat R, per a funcions definides en X i que prenen valors en el mateix anell R (en una situació per tant distinta de la que tracta Wright ([33]), el qual construeix una integral respecte a una mesura valorada en un espai vectorial reticulat σ-c.c. per a funcions reals i també de la de Cristescu ([10]) que construeix la integral per a funcions valorades en un espai vectorial reticulat).

De les diverses formes que coneixem de desenvolupar una teoría de integració, hem elegit la que correspon al mètode de Daniell, perquè dóna un gran paper a la relació d'ordre i deixa en segon terme les referències de tipus topològic. La integral que hem construït en el cas particular que R és el cos dels nombres reals, coincideix amb la integral usual de Lebesgue.

Les diferències bàsiques que apareixen entre els resultats obtinguts i els de la teoria clàssica de la mesura i integració reals semblen provenir essencialment de la substitució de l'ordre total de R per un ordre parcial, encara que aquest sigui reticulat i σ-c.c. Així, per exemple, la propietat que tota mesura real finita σ-additiva definida en una σ-àlgebra és afitada, ja no es conserva si es tracta de mesures valorades en grups reticulats c.c. no totalment ordenats.

A continuació passem a descriure el contingut de cadascun dels capítols que composen aquesta memòria:

El capítol 0 inclou un recull de les definicions i resultats generals de la teoria de ℓ-grups i d'altres estructures ordenades que d'una manera constant apareixen en el treball, així com alguna referència a conceptes i terminologia de la teoria dels espais mètrics generalitzats ([30]).

Es desenvolupa amb cert detall el procés d'adjunció dels elements formals $\pm\infty$ a un ℓ-grup (ℓ-grup ampliat) i finalment, es fa una anàlisi de ls sumabilitat en termes d'ordre, els resultats de la qual són utilitzats en el capítol 1.

El capítol 1 està dedicat a l'estudi de les funcions de conjunt finitament additives (ó mesures) i σ-additives en ordre (ó o-mesures) definides en un anell $\mathcal{a}$ de parts d'un con-junt X i que prenen valors en l'ampliat d'un ℓ-grup G c.c.

Com en el cas real, s'obté que la família ba($\mathcal{a}$;G) de les mesures finites i afitades (en ordre) és un ℓ-grup c.c. del que la subfamília bca($\mathcal{a}$;G) de les σ-additives en ordre n'és un subgrup sòlid i c.c. considerat com a ℓ-grup. Aquest resultat es el que permet obtenir un anàleg del teorema de descomposició de Jordan-Hahn per a mesures finitament additives valorades en ℓ-grups c.c., el qual representa una generalització del que Fayres i Morrison ([15]) obtenen, amb tecniques pròpies d'espais vectorials reticulats, per a les funcions additives $m:\mathcal{a} \to V$ definides en una àlgebra de Boole i que prenen valors en un espai vectorial reticulat c.c.

Mitjançant els contraexemples corresponents, s'ha vist que el teorema obtingut no és generalitzable al cas de funcions σ-additives no finites definides en σ-àlgebres, com ocorre en el cas de mesures reals; també s'ha vist que per a mesures σ-additives en ordre definides en σ-àlgebres, no existeix en general conjunt de descomposició de Jordan, i que tampoc és cert un anàleg de la propietat que tenen les mesures reals finites σ-additives definides en una σ-àlgebra de ser afitades.

Després d'introduir la variació i la semivariació d'una mesura en termes d'ordre, són estudiats diferents tipus de convergència en el conjunt de les mesures: la puntual, la uniforme i la de l'ordre.

Quant a la puntual, s'ha vist que la σ-additivitat es conserva en el pas al límit de xarxes monòtones de mesures finites. D'aquesta propietat se'n segueix que $bca(\mathcal{a};G)$ és una banda i un T_o-tancat de $ba(\mathcal{a};G)$; i com a consequència s'obté un anàleg del teorema de Yosida-Hewitt per a mesures en ordre segons el qual tota mesura $m\in ba(\mathcal{a};G)$ admet una única expressió de la forma $m=m_c+m_a$ on $m_c\in bca(\mathcal{a};G)$, $m_a\in ba(\mathcal{a};G)$ és purament additiva i m_c i m_a són ortogonals.

Pel que fa a la convergència uniforme en $ba(\mathcal{a};G)$, s'ha vist que el límit uniforme d'una xarxa de mesures que són uniformement σ-additives també és σ-additiva; la condició de la σ-additivitat uniforme pot suprimir-se en el cas que la o-convergència en G té la propietat diagonal.

En forma anàloga al cas de mesures escalars o vectorials valorades en espais de Banach de dimensió finita, la convergència en ordre uniforme de mesures additives afitades valorades en un ℓ-grup c.c. G, resulta ser normable per la G-norma generalitzada $\|\ \|_o: ba(\mathcal{a};G)\to G_+$ definida posant $\|m\|_o=V\{|m(A)|,\ A\in\mathcal{a}\}$. És a dir, la convergència en ordre uniforme de mesures additives afitades és equivalent a la $\|\ \|_o$-convergència (lligada a la semivariació en ordre) la qual és equivalent, al seu torn, a la convergència segons la G-norma generalitzada $q: ba(\mathcal{a};G)\to G_+$ definida per $q(m)=|m|(X)$ (lligada a la variació en ordre).

Introduint les topologies $T^{\sigma}_{\|\,\|_o}$ i $T_{\|\,\|_o}$ associades a la norma generalitzada $\|\,\|_o$, el teorema anterior permet provar que $(ba(\mathcal{a};G),\|\,\|_o)$ és un ℓ-grup G-normat $\|\,\|_o$-complet de manera que si la o-convergència en G té la propietat diagonal per a successions (resp. per a xarxes) aleshores $bca(\mathcal{a};G)$ és $T^{\sigma}_{\|\,\|_o}$-tancat (resp. $T_{\|\,\|_o}$-tancat). Queda, no obstant, oberta la qüestió de si en general $bca(\mathcal{a};G)$ és $T^{\sigma}_{\|\,\|_o}$-tancat, com ocorre en el cas de les mesures escalars o vectorials.

A l'apartat següent són introduïdes les nocions de <u>continuitat</u> i <u>singularitat respecte a una mesura m</u>. S'ha vist que dins $ba(\mathcal{a};G)$ les mesures m-singulars constitueixen un subgrup sòlid i les mesures m-contínues una banda, que indiquem per $ba_{mc}(\mathcal{a};G)$.

De la segona afirmació se'n deriva un quasi anàleg del teorema de descomposició de Lebesgue segons el qual tota mesura afitada es expressable de forma única com a suma de dues mesures afitades, l'una m-contínua i l'altra que és de l'ortogonal de $ba_{mc}(\mathcal{a};G)$.

En el cas real, quan m és σ-additiva i $\mathcal{a}$ és una σ-àlgebra, resulta que $(bca_{mc}(\mathcal{a};G))^{\perp}$ coincideix amb el conjunt de les mesures m-singulars i per tant s'obté el teorema de Lebesgue. Ara bé, la identificació dels dos conjunts s'obté (Luxemburg, [23]) mitjançant el conjunt de descomposició de Jordan associat a una mesura i, com que en el cas de mesures en ordre valorades en un ℓ-grup c.c. arbitrari aquest conjunt ja no existeix, no és possible, per un camí anàleg, obtenir aquesta identificació, en cas de donar-se. És un problema que queda obert; hem obtingut però una condició suficient per tal que coincideixin. Aquesta condició és que el grup de valors sigui super condicionalment complet; en aquest cas hem obtingut, directament, l'<u>anàleg del teorema de descomposició de Lebesgue.</u>

S'analitza a continuació, la construcció d'alguns tipus especials d'o-mesures, com són les <u>o-mesures valorades en ℓ-grups</u>

producte i les o-mesures discretes, i s'obtenen alguns exemples d'o-mesures valorades en diversos ℓ-grups.

El capítol es clou amb l'estudi de les mesures definides en la σ-àlgebra $\mathcal{a}$ de les parts d'un conjunt numerable X i valorades en l'àlgebra de Banach reticulada $\ell_1(\mathbb{R})$, de les successions de nombres reals absolutament sumables.

En una primera part es veu que l'àlgebra de Banach reticulada i c.c. de les mesures reals σ-additives i finites definides en $\mathcal{a}$ es isomorfa i isomètrica com a tal a $\ell_1(\mathbb{R})$. A continuació s'estudia la construcció d'un $\ell_1(R)$ a partir d'un anell reticulat R, en una forma anàloga a com a partir del cos dels nombres reals es construeix $\ell_1(\mathbb{R})$: a $\ell_1(R)$ hi considerem les successions d'elements de R absolutament sumables en ordre; amb les operacions definides convenientment i amb la hipòtesi addicional que el producte de R és seqüencialment o-continu, $\ell_1(R)$ resulta ser un anell reticulat c.c. R-normat i complet (respecte a la R-norma) que és isomorf i isomètric com a tal a l'anell reticulat i R-normat bca($\mathcal{a}$;R).

Finalment, es considera el cas especial de l'anell reticulat R= $\ell_1(\mathbb{R})$, que està dotat a més d'una norma real, i s'obté la caracterització següent: les mesures vectorials valorades en l'espai de Banach $\ell_1(\mathbb{R})$ de variació total finita són les o-mesures afitades en ordre.

El capítol 2, dedicat a la construcció d'una integral respecte a o-mesures, pot considerar-se dividit en quatre seccions.

1) La primera estudia les condicions generals que permeten aplicar el mètode d'extensió de Daniell a integrals valorades en anells reticulats σ-c.c.

2) En la segona s'analitzen les condicions i l'aplicació de la secció anterior al cas particular de la integral definida de la forma usual en el conjunt de les funcions simples, respecte a una o-mesura (funcions i mesura valorades en un mateix anell reticulat σ-c.c.).

3) L'objecte de la tercera és obtenir una segona extensió de la integral respecte a una o-mesura.

4) La quarta inclou l'estudi de la integral indefinida, així com una aproximació a un possible anàleg del teorema de Radon-Nikodym.

Seguidament comentem amb detall cadascuna d'aquestes seccions:

Primera. Introduim les nocions de R-integral i R-integral positiva en X:

Si R és un ℓ-anell σ-c.c. amb el producte seqüencialment o-continu, una R-integral en X és una parella (L,I) formada per un ℓ-submodul L de R^X i un morfisme d'ordre $I:L \to R$ homogeni seqüencialment o-continu. Una R-integral positiva en X és una parella (S,I) formada per un ℓ-subsemigrup de R^X, S, estable pel producte per elements de R_+, i un morfisme $I:S \to R$ positivament homogeni i seqüencialment o-continu cap amunt.

Si (L,I) es una R-integral en X, I s'estén al conjunt $\underline{L}_\sigma$, de les funcions $f:X \to R$ que són límit puntual d'una successió monòtona creixent $\{f_n\}$ de funcions de $L_+=\{f\in L,\ f \geqslant 0\}$, per a la que $\{I(f_n)\}$ està afitat, posant $I(f)=\bigvee_n I(f_n)$. Aleshores (L_σ, I) és una R-integral positiva en X i I s'estén al seu torn, com a morfisme d'ordre homogeni, al ℓ-submòdul $L_\omega = L_\sigma - L_\sigma$.

Quant a la o-continuïtat de l'extensió s'ha vist que si el conjunt $\underline{M}_+$, de les funcions $f:X \to R$ que són límit puntual d'una successió monòtona creixent de funcions de L_+, és σ-subreticle, aleshores es pot afirmar que I és seqüencialment o-continu en L_σ i també que (L_ω, I) es una R-integral en X per a la que es poden provar els anàlegs dels teoremes clàssics de convergència: el de convergència monòtona generalitzat, el de convergència dominada i la propietat de Fatou.

Segona. Si $m:\mathcal{a} \to R_+$ és una o-mesura definida en una σ-àlgebra de parts d'un conjunt X que pren valors en la part positiva d'un anell reticula σ-c.c. R, queda com hem dit definida, de forma anàloga al cas real, la integral respecte a m per a les funcions simples $f:X \to R$.

El conjunt ε de les funcions simples és un ℓ-submòdul de R^X i la integral, com a aplicació que assigna a cada funció $f\in\varepsilon$ un element de l'anell R, és un morfisme d'ordre homogeni.

Si $R=\mathcal{R}$, ε es el conjunt de les funcions $\mathfrak{a}$-mesurables simples finites, I es la integral ordinària de Lebesgue respecte a m i, per tant, I és seqüencialmente o-contínua. En un cas general, creiem que I pot no ser-ho, ja que les demostracions que coneixem d'aquesta propietat per al cas real depenen fortament de l'ordre total de $\mathcal{R}$; no obstant, en els exemples que donem, I és seqüencialment o-contínua i en conseqüència (ε, I) és una R-integral. En aquest cas, els resultats de la secció anterior permeten construir l'extensió $(L_{\sigma}(m), I)$, de tal forma que si el conjunt M_{+} és σ-subreticle, aleshores $(L_{\omega}(m), I)$ és una R-integral a X, que anomenem, la <u>primera extensió de la integral respecte a la o-mesura m.</u>

Si $R=\mathcal{R}$, aleshores M_{+} coincideix amb el conjunt de les funcions reals finites $\mathfrak{a}$-mesurables positives i, per tant, M_{+} és σ-subreticle, $L_{\omega}(m)$ és el conjunt de les funcions reals finites $\mathfrak{a}$-mesurables i m-integrables Lebesgue i I és la integral de Lebesgue respecte a m.

En aquesta secció són considerats cassos distints en els que M_{+} és també σ-subreticle i per tant està definida la primera extensió $(L_{\omega}(m), I)$.

<u>Tercera.</u> A fi d'obtenir una classe més àmplia de funcions integrables, s'observa en primer lloc, que la reiteració del procés que ha permès obtenir la primera extensió $(L_{\sigma}(m), I)$ a partir de (L, I), no en genera una de nova, sinó que condueix a la mateixa $(L_{\sigma}(m), I)$; d'aquesta manera, si es vol obtenir una segona extensió cal recórrer a altres mètodes. La idea és fer integrables aquelles funcions que d'alguna manera són aproximables per funcions que ja ho són. En aquest sentit, és introduïda la noció de <u>conjunt m-nul</u> i en relació a ella s'estudia, a continuació, l'obtenció d'una <u>segona extensió de la integral respecta una o-mesura</u>. S'en consideren dues.

La primera, indicada per $(\mathcal{L}_{A}^{+}(m), I)$, representa la forma més natural d'ampliar la classe de funcions integrables:

Una funció f definida m-quasi arreu en X (breument, m-q.a.) es diu que és m-integrable si és m-equivalent a alguna funció $g \in L_\sigma(m)$. En aquest cas es defineix la integral de f per $I(f)=I(g)$. ($\mathcal{L}_A^+(m)$ indica el conjunt de tals funcions m-integrables).

Si M_+ és σ-subreticle, aleshores el conjunt $\mathcal{L}_A(m)=\mathcal{L}_A^+(m)-\mathcal{L}_A^+(m)$ coincideix amb el conjunt de les funcions definides m-q.a. en X que són m-equivalents a alguna funció de $L_\omega(m)$ i resulta que <u>$(\mathcal{L}_A(m),I)$ es una R-integral en X</u>, per a la que es compleixen els teoremes de convergència.

Amb aquesta segona extensió, si $R=\mathbb{R}$, s'obté exactament el conjunt $\mathcal{L}_1(m)$ de les funcions m-integrables Lebesgue.

En el cas real hi ha diverses caracteritzacions dels elements de $\mathcal{L}_1(m)$. Així, si es considera el conjunt $L_\delta(m)$ de les funcions que són límit puntual d'una successió monòtona decreixent de funcions de ε_+, resulta que una funció $f:X \to \overline{\mathbb{R}}$, definida m-q.a., és m-integrable si i només si se satisfà una de les dues condicions següents ([11]):

(i) $\inf\{I(h);h \geq f \text{ m-q.a.}, h\in L_\sigma(m)\}=\sup\{I(g);g\leq f \text{ m-q.a.}, g\in L_\delta(m)\}$;

(ii) Per a cada $\varepsilon>0$ existeixen dues funcions $g\in L_\delta(m)$ i $h\in L_\sigma(m)$ tals que $g \leq f \leq h$ m-q.a. i $I(h-g)<\varepsilon$.

Naturalment, si R és un anell arbitrari, (i) i (ii) ja no són equivalents ni representa, cap d'elles, una caracterització dels elements de $\mathcal{L}_A^+(m)$. D'aquesta manera cadascuna d'aquestes condicions pot donar lloc a una altra possible extensió de la R-integral positiva $(L_\sigma(m),I)$.

En aquest sentit la condició (ii), més general que (i), ha suggerit la construcció de l'extensió que indiquen per <u>$(\mathcal{L}_B^+(m),I)$</u>:

Una funció f definida m-q.a. en X es diu que es m-integrable si existeixen dues successions de funcions $\{g_n\}$ en $L_\delta(m)$ i $\{h_n\}$ en $L_\sigma(m)$ tals que $g_n \leq f \leq h_n$ m-q.a. per a cada $n\in\mathbb{N}$, i $I(h_n-g_n) \overset{\circ}{\to} 0$. ($\mathcal{L}_B^+(m)$ indica el conjunt de tals funcions m-integrables). Si $f\in\mathcal{L}_B^+(m)$ es pot definir la integral de f respecte a m per $I(f) = \vee I(g_n) = \wedge I(h_n)$.

De les definicions anteriors es desprèn que $(\mathcal{L}_B^+(m),I)$ constitueix una segona extensió de la integral respecte a m, que estén també a $(\mathcal{L}_A^+(m),I)$. En l'estudi que es fa del parell $(\mathcal{L}_B^+(m),I)$ s'obtenen de forma natural condicions per tal que sigui $\mathcal{L}_A^+(m)=\mathcal{L}_B^+(m)$; aquestes condicions semblen ser d'altra banda les més adequades per a poder obtenir els teoremes de convergència a $(\mathcal{L}_B(m),I)$ (on $\mathcal{L}_B(m)=\mathcal{L}_B^+(m)-\mathcal{L}_B^+(m)$) i permeten enunciar en definitiva el següent teorema sobre la integració respecte a o-mesures:

<u>Teorema.</u> Si R és un ℓ-anell σ-c.c. amb el producte seqüencialment o-continu, $m:\mathcal{a}\to R_+$ una o-mesura definida en una σ-àlgebra de parts d'un conjunt X i se satisfan les següents condicions:

1) La integral respecte a m en ε_+ és seqüencialment o-contínua.

2) El conjunt M_+ és σ-subreticle.

3) $m(\mathcal{a})=\{m(A);A\in\mathcal{a}\}$ no conté divisors de zero,

aleshores

a) $\mathcal{L}_B(m)=\mathcal{L}_A(m)$ i $\mathcal{L}_B^+(m)=\mathcal{L}_A^+(m)$, es a dir, $f\in\ _B(m)$ si i només si $f\simeq g$ per a alguna funció $g\in L_\omega(m)$ i si $f\in\mathcal{L}_B^+(m)$ aleshores es pot prendre $g\in L_\sigma(m)$.

b) Si f és una funció definida m-q.a. equivalent a alguna funció de $M=M_+-M_+$, aleshores $f\in\mathcal{L}_B(m)$ si i només si $|f|\in\mathcal{L}_B^+(m)$ i en aquest cas $|I(f)|\leqslant I(|f|)$.

c) Per a la R-integral $(\mathcal{L}_A(m),I)=(\mathcal{L}_B(m),I)$ es compleixen els teoremes clàssics de convergència monòtona, dominada i propietat de Fatou.

Seguidament, es fa un estudi del cas particular de la integral respecte a una o-mesura valorada en el ℓ-anell producte $R=\mathbb{R}^I$, on I és un conjunt d'índexos qualsevol. Finalment, aquesta secció inclou unes consideracions sobre altres formes d'estendre la integral.

<u>Quarta.</u> En un primer apartat s'estudia la <u>integral indefinida d'una funció m-integrable respecte una o-mesura m.</u> S'ha vist que per a

tota funció $f \in \mathcal{L}_B(m)$ està definida la integral indefinida de f respecte a m i que a més és una o-mesura o-afitada seqüencialment m-contínua.

L'apartat següent és una aproximació al que podria ser un anàleg del <u>teorema de Radon-Nikodym</u> per a o-mesures.

Havent vist que tota funció $f \in \mathcal{L}_B(m)$ determina una o-mesura o-afitada seqüencialment m-contínua, hom pot plantejar-se la qüestió inversa, és a dir: Si $m:\mathcal{a} \to R_+$ i $\ell:\mathcal{a} \to R$ són dues o-mesures i ℓ és o-afitada i seqüencialment m-contínua, existeix alguna funció f m-integrable tal que $\ell(A)=\int_A f\, dm$ per a cada $A \in \mathcal{a}$?. I en cas d'existir, serà única? (única a menys de m-equivalència).

Quant a l'existència, un contraexemple mostra que en general el teorema no es compleix. La unicitat de la possible derivada de Radon-Nikodyn, suposant que existeixi, tampoc pot ser assegurada. Es dóna una condició necessària per tal que hi hagi unicitat: que m(a) no contingui divisors de zero; però queda pendent la questió de si aquesta condició necessària és també suficient. En una aproximació a l'anàlisi d'aquest darrer problema, hem vist que en el cas particular de o-mesures valorades en el ℓ-anell producte R^I aquesta condició, juntament amb que I sigui numerable, assegura no sols la unicitat sino també l'existència de la derivada de Radon-Nikodyn.

Com a problemes que podrien ser interessants en el context d'aquest capítol 2 i que queden oberts, podem citar, a més a més del relatiu al teorema de Radon-Nikodym, el d'establir algun tipus de representació per a les R-integrals; es a dir, veure si donada una R-integral I en un conjunt X, es possible obtenir una o-mesura definida en una σ-àlgebra convenient de parts de X, que doni lloc precisament a la R-integral donada.

En un altre sentit, hi hauria la possibilitat de desenvolupar una integral per a funcions valorades en un ℓ-anell R_1 respecte d'una o-mesuma valorada en un ℓ-anell R_2, seguint una metodologia inspirada en la que utilitza Bartle en el seu conegut article "A general bilinear vector integral" ([5]).

<u>C A P I T O L   0</u>

Preliminars

1. DEFINICIONS I PROPIETATS GENERALS.

A) Conjunts ordenats i o-convergència.

0.1.0. Definicions i comentaris. Sigui $(S,\leqslant)$ un conjunt ordenat. S és superiorment filtrant (resp. inferiorment) si tota parella d'elements està mejorada superiorment (resp. inferiorment); si ho és de les dues formes alhora, es diu senzillament filtrant.

S és reticle si per a cada parella d'elements $a,b\in S$ existeixen $\sup\{a,b\}$ i $\inf\{a,b\}$, elements que denotarem per $a\vee b$ i $a\wedge b$ respectivament. Si $A=\{a_i;i\in I\}$ és un conjunt d'elements de S i existeix algun element $a\in S$ tal que $a\geqslant a_i$ per a cada $i\in I$ (resp. $a\leqslant a_i$) es diu que A està superiorment afitat (resp. inferiorment); si ho és de les dues formes alhora es diu simplement afitat (ó o-afitat). En el cas que existeixin el suprem i l'ínfim de A, aquest s'indicarà indistintament per $\bigvee_{i\in I} a_i$ i $\bigvee\{a_i;i\in I\}$, i anàlogament per a l'ínfim. S és condicionalment complet (resp. σ-condicionalment complet) si existeixen el suprem i l'ínfim de tot subconjunt no buit (resp. numerable) afitat; escrivim c.c. (resp. σ-c.c.) per abreujar-ho.

Sigui $\{x_i\}_{i\in I}$ una xarxa d'elements de S, indexada en un conjunt superiorment filtrant I. $\{x_i\}_{i\in I}$ és monòtona creixent (resp. decreixent) si $i\leqslant j$ en I implica $x_i\leqslant x_j$ en S (resp. $x_i\geqslant x_j$), i escriurem $x_i\uparrow$ (resp. $x_i\downarrow$) per a indicar-ho. Una xarxa $\{x_i\}_{i\in I}$ en S és convergent en ordre (ó o-convergent) cap a l'element $x\in S$ si existeixen dues xarxes en S, $y_i\uparrow$, $z_i\downarrow$ i un índex $i_o\in I$ tals que

$$y_i\leqslant x_i\leqslant z_i, \quad \text{per a tot} \quad i\geqslant i_o,$$

$$\bigvee_{i\in I} y_i=x \quad , \quad \bigwedge_{i\in I} z_i=x.$$

També es diu que x és el límit en ordre de la xarxa $\{x_i\}_{i\in I}$ i escriurem $x=\text{o-lim}\, x_i$ ó $x_i\xrightarrow{o} x$ per a indicar-ho. Si la xarxa és monòtona és $x_i\uparrow x$ (resp. $x_i\downarrow x$) si i només si $x=\bigvee_{i\in I} x_i$ (resp, $x=\bigwedge_{i\in I} x_i$).

Es diu que la xarxa $\{x_i\}_{i\in I}$ és <u>o-afitada</u> si existeix un índex $i_o \in I$ per al qual $\{x_i\}_{i\geq i_o}$ és o-afitat; en aquest cas, si G és c.c., estan definits els elements

$$\underline{x} = \bigvee_{i\geq i_o} \bigwedge_{j\geq i} x_j, \qquad \bar{x} = \bigwedge_{i\geq i_o} \bigvee_{j\geq i} x_j,$$

anomenats respectivament <u>límit inferior</u> i <u>límit superior</u> en ordre de la xarxa i que indicarem per $\text{o-}\underline{\lim}\, x_i$ i $\text{o-}\overline{\lim}\, x_i$ respectivament.

Tota xarxa o-convergent és o-afitada. Si G és c.c., aleshores una xarxa o-afitada $\{x_i\}_{i\in I}$ és o-convergent cap a x si i només si $\text{o-}\underline{\lim}\, x_i = \text{o-}\overline{\lim}\, x_i = x$.

<u>0.1.2. Definicions.</u> Es diu que la o-convergència en un conjunt ordenat $(S, \leq)$ té la <u>propietat diagonal per a xarxes</u> ([32]) si donada una xarxa $x_i \overset{o}{\to} x$, $i\in I$, tal que per a cada $i\in I$ existeix una xarxa $x_j^i \overset{o}{\to} x_i$ on $j\in J_i$, aleshores existeix una subxarxa de la $\{x_j^i\}_{(i,j)\in N}$ que o-convergeix cap a x, essent $N=\{(i,j);\ i\in I \text{ i } j\in J_i\}$, amb l'ordre lexicogràfic de I primer i els J_i després:

$$(i,j) \leq (i',j') \Leftrightarrow \begin{cases} i < i' \\ \text{ó} \\ i = i' \text{ i } j\leq j', \end{cases}$$

la qual cosa equival a l'existència d'un subconjunt I' cofinal en I de manera que per a cada $i\in I'$ existeix al menys un $j=j(i)\in J_i$ tal que $\{x_{j(i)}^i\}_{i\in I'}$ o-convergeix cap a x.

Es diu que la o-convergència en G té la <u>propietat diagonal per a successions</u> ([23]) si donada una successió doble $\{a_n^m\}_{(n,m)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ tal que $a_n^m \xrightarrow[m\to\infty]{} a_n$ i $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, aleshores existeix per a cada $n\in\mathbb{N}$ un $m=m(n)$ adequat de manera que $a_n^{m(n)} \overset{o}{\longrightarrow} a$.

Per exemple l'espai $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de les successions de nombres reals té la propietat diagonal per a la o-convergència de successions.

( ) Una successió d'elements d'un conjunt X, $\{x_n;\ x_n\ X,\ n\ \}$, s'indicarà en tot el que segueix, per x_n X ó simplement per x_n si la referència a X pot donar-se per sobreentesa sense ambigüitat.

<u>0.1.3. Definició.</u> Si $(S,\leqslant)$ i $(T,\leqslant)$ són dos conjunts ordenats, una aplicació $f:S \to T$ és un <u>morfisme d'ordre</u> (ó creixent) si $a \leqslant b$ en S implica $f(a) \leqslant f(b)$ en T. Es diu que f és <u>o-continu cap amunt</u> (resp. cap avall) en S si $x_i \uparrow x$ en S implica $f(x_i) \uparrow f(x)$ en T (resp. $x_i \downarrow x$ en S implica $f(x_i) \downarrow f(x)$ en T). Si f té aquesta propietat només per a successions es diu que f és <u>seqüencialment o-continu cap amunt</u> (resp. cap avall) en S.

B) <u>Grups i anells reticulats.</u>

<u>0.1.4. Definicions i comentaris.</u> Sigui $(G,+)$ un grup. Un conjunt $P \subset G$ que satisfa

1) $P+P \subset P$, 2) $P \cap (-P) = \{0\}$, 3) $a+P-a \subset P$, $\forall a \in G$;

permet definir un ordre en G: $a \leqslant b \Leftrightarrow b-a \geqslant 0$, que és compatible amb la suma: si $a,b,x \in G$

$$a \leqslant b \Rightarrow a+x \leqslant b+x \quad \text{i} \quad x+a \leqslant x+b.$$

La terna $(G,+,\leqslant)$ rep el nom de <u>grup ordenat</u>; P és el <u>con dels positius.</u> Recíprocament, si $(G,+,\leqslant)$ és un grup amb un ordre compatible amb la suma, el conjunt $P=\{a \in G;\ a \geqslant 0\}$ és el con dels positius per a l'ordre donat. Aquest conjunt P s'indicarà per G_+. Si $H \subset G$ indicarem $H \cap G_+$ per H_+. Un grup ordenat és reticulat si l'estructura ordenada subjacent és un reticle. Un <u>grup reticulat</u> s'anomena també un <u>ℓ-grup.</u>

<u>0.1.5. Proposició.</u> ([26]). Sigui $(G,+,\leqslant)$ un grup ordenat, $A=\{a_i;\, i \in I\}$ i $B=\{b_j;\, j \in J\}$ subconjunts no buits de G; a un element de G. Aleshores

1) $\bigvee_{i \in I} a_i = - \bigwedge_{i \in I} (-a_i)$;

2) $a + \bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee_{i \in I} (a+a_i)$ i $a + \bigwedge_{i \in I} a_i = \bigwedge_{i \in I} (a+a_i)$;

3) $\bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in J} (a_i+b_j) = \bigvee_{i \in I} a_i + \bigvee_{j \in J} b_j$ i $\bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} (a_i+b_j) = \bigwedge_{i \in I} a_i + \bigwedge_{j \in J} b_j$.

on s'entén que si existeixen els elements que apareixen en un dels membres, aleshores existeixen els de l'altre membre i se satisfà la igualtat.

Un grup ordenat $(G,+,\leqslant)$ és reticulat si i només si per a tot element $a\in G$ existeix $a\vee 0$. Si a és un element d'un grup reticulat $(G,+,\leqslant)$, es consideren els elements $a^+=a\vee 0$ (part positiva d'a); $a^-=(-a)\vee 0= -(a\wedge 0)$ (part negativa d'a), $|a| = a\vee(-a)$ (valor absolut d'a).

<u>0.1.6. Proposició.</u> ([7],[26]). Sigui $(G,+,\leqslant)$ un grup reticulat. Se satisfan les propietats que segueixen: Si $a,b,c\in G$,

1) G no té torsió: $na = 0 \Rightarrow a = 0$;

2) $(G,\leqslant)$ és un reticle distributiu;

3) $(-a)^+ = a^-$ i $(-a)^- = a^+$;

4) $a= a^+- a^-$ i $|a| = a^+ + a^-$;

5) $a\leqslant b \Leftrightarrow a^+\leqslant b^+$ i $a^-\geqslant b^-$;

6) $(a+b)^+ \leqslant a^+ + b^+$ i $(a+b)^- \leqslant a^- + b^-$;

7) $|a| \leqslant b \Leftrightarrow -b\leqslant a\leqslant b$;

8) $|a|\geqslant 0$ i $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

9) $a\vee b = a+(b-a)^+$; $a\wedge b= a-(b-a)^-$;

10) $(a\vee b)^+= a^+\vee b^+$, $(a\vee b)^- = a^-\wedge b^-$, $(a\wedge b)^+=a^+\wedge b^+$, $(a\wedge b)^-=a^-\vee b^-$;

11) $a\vee(\bigwedge_{i\in I} a_i) = \bigwedge_{i\in I}(a\vee a_i)$ i $a\wedge(\bigvee_{i\in I} a_i)= \bigvee_{i\in I}(a\wedge a_i)$, on s'entén que les igualtats se satisfan si tenen sentit.

Un grup reticulat és commutatiu si i només si se satisfà: $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ per a tota parella d'elements $a,b\in G$. En un <u>grup reticulat commutatiu</u>, se satisfà la següent propietat: si $a,b\in G$ aleshores $a+b=(a\vee b)-(a\wedge b)$.

Un <u>ℓ-grup</u> és <u>arquimedià</u> ([7]) si: $na\leqslant b$ per a tot $n\in\mathbb{N}$ implica $a\leqslant 0$. Tot ℓ-grup arquimedià és commutatiu. Tot grup totalment ordenat arquimedià és isomorf a un subgrup de $\mathbb{R}$ (Teorema de Hölder,[7]). Tot ℓ-grup c.c. es σ-c.c. i tot ℓ-grup σ-c.c. és arquimedià i per tant commutatiu.

<u>0.1.7. Proposició.</u> Sigui $(G,+,\leq)$ un ℓ-grup. Siguin $x_i \overset{o}{\to} x$, $y_i \overset{o}{\to} y$ dues xarxes en G, indexades en un mateix conjunt I. Aleshores:

a) $x_i \overset{o}{\to} x$ si i només si existeixen una xarxa $\delta_i \downarrow 0$ en G i un índex $i_o \in I$ tals que $|x_i - x| \leq \delta_i$ per a tot $i \geq i_o$;

b) Si $x_i \leq y_i$ per a tot $i \geq i_o$, aleshores $x \leq y$;

c) $x_i + y_i \overset{o}{\to} x+y$, $x_i \vee y_i \overset{o}{\to} x \vee y$, $x_i \wedge y_i \overset{o}{\to} x \wedge y$;

d) $-x_i \overset{o}{\to} -x$, $x_i^+ \overset{o}{\to} x^+$, $x_i^- \overset{o}{\to} x^-$, $|x^i| \overset{o}{\to} |x|$;

e) Si $|x_i| \leq a$ per a tot $i \geq i_o$, aleshores $|x| \leq a$.

<u>0.1.8. Definicions i comentaris.</u> Sigui H un subgrup d'un grup reticulat $(G,+,\leq)$. H és un <u>subgrup subreticulat</u> (ℓ-subgrup) si és subgrup i subreticle; H és subreticulat si i només si : $a \in H \Rightarrow a^+ \in H$.

H es un <u>subgrup convex</u> si: $a \in H$, $|b| \leq a \Rightarrow b \in H$;

H és un <u>subgrup sòlid</u> si és subgrup subreticulat i convex ó, equivalentment, si és un subgrup convex i $x \in H$ implica $x^+ \in H$. Un subgrup sòlid H és o-tancat ([7]) si és estable respecte als suprems que existeixen en G: si $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq H$ i $x = \bigvee_{i \in I} x_i$ en G, aleshores $x \in H$; un subgrup sòlid es o-tancat si i només si : $x_i \uparrow_o x$ en G, $\{x_i\}_{i \in I} \subset H \Rightarrow x \in H$ (vegi's [23]). H es <u>banda</u> si H és subgrup normal, sòlid i o-tancat de G.

Un subconjunt $A \subset G$ es diu que és un polar si existeix un conjunt $B \subset G$ tal que $A = \{a \in G;\ |a| \wedge |b| = 0,\ \forall b \in B\}$; en aquest cas s'escriu $A = B^{\perp}$.

<u>0.1.9. Proposició.</u> ([7]). En un ℓ-grup $(G,+,\leq)$ se satisfan les següents propietats:

a) Tot polar és un subgrup sòlid o-tancat, i per tant si el grup és commutatiu, una banda.

b) G és arquimedià si i només si tot ℓ-subgrup o-tancat és un polar.

c) Si G és c.c. tot polar és sumand directe.

Si A,B són subgrups normals sòlids tals que $AB=\{o\}$ es dir que són suplementaris directes; un subgrup sòlid A que admet un suplementari directe B s'anomena un <u>sumand directe de G</u>; en aquest cas s'escriu $G=A\oplus B$ i és $A=B^{\perp}$ i $B=A^{\perp}$.

<u>0.1.10. Definicions.</u> Un <u>anell ordenat</u> és un anell dotat d'un ordre compatible amb la suma i amb el producte: si $a,b,x\in R$ aleshores

$$a\leqslant b,\ x\geqslant 0 \Rightarrow ax\leqslant bx \quad i \quad xa\leqslant xb$$

és a dir, el grup subjacent és un grup ordenat commu-tatiu i a més $R_+R_+\subset R_+$. R és un <u>anell reticulat</u> o <u>ℓ-anell</u> si l'estructura ordenada subjacent es un reticle.

En el capítol 2, on es treballa amb ℓ-anells, és sovint convenient suposar que el producte és compatible amb la convergència en ordre. Per això donem la següent

<u>0.1.11. Definició.</u> Sigui R un ℓ-anell. Direm que <u>el producte és seqüencialment o-continu</u> en R si i només si de

$$\text{o-lim } x_n = x$$
$$\text{o-lim } y_n = y$$

se'n segueix $\text{o-lim}(x_ny_n) = xy$.

En particular en tot f-anell arquimedià el producte és seqüencialment o-continu.

És útil observar que hi ha una formulació més simple d'aquesta condició. Tenim:

<u>0.1.12. Proposició.</u> Sigui R un ℓ-anell. Són equivalents:

a) $\left.\begin{array}{l}\text{o-lim } x_n=x\\ \text{o-lim } y_n=y\end{array}\right\} \Rightarrow \text{o-lim}(x_n\, y_n)=xy;$

b) $\left.\begin{array}{l}x_n \downarrow 0\\ y\geqslant 0\end{array}\right\} \Rightarrow y\, x_n\downarrow 0 \quad i \quad x_n y\downarrow 0;$

c) $\left.\begin{array}{l} x_n \uparrow x \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y\, x_n \uparrow x$ i $x_n y \uparrow x$.

En efecte: Evidentment a) $\Rightarrow$ b). Vegem que b) $\Rightarrow$ a). Podem escriure

$$|x_n y_n - xy| \leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \leq |x_n|\,|y_n - y| + |x_n - y|\,|y|;$$

però si $y_n \overset{o}{\rightarrow} y$, existeix una successió $\delta_n \downarrow 0$ tal que per a cada $n \in \mathbb{N}$ és $|y_n - y| \leq \delta_n$, i anàlogament n'existeix una altra $\delta'_n \downarrow 0$ tal que per a cada $n \in \mathbb{N}$ és $|x_n - x| \leq \delta'_n$. A més $\{x_n\}$ es o-afitada, és a dir, existeix algun $a \in R_+$ amb la propietat que $|x_n| \leq a$ per a cada $n \in \mathbb{N}$. Per tant;

$$0 \leq |x_n y_n - xy| \leq a\,\delta_n + \delta'_n |y|$$

i, com que per hipòtesi, $a\delta_n \downarrow 0$ i $\delta'_n |y| \downarrow 0$, resulta que o-lim $x_n y_n = xy$, tal com voliem provar.

Pel que fa a l'equivalència de b) amb c) no hi ha res a dir. És immediata. ∎

<u>0.1.13. Definicions.</u> Sigui R un anell ordenat, G un ℓ-grup commutatiu. G és un <u>ℓ-mòdul per l'esquerra sobre R</u> o un <u>R-mòdul per l'esquerra reticulat</u> ([29]) si G és un R-mòdul per l'esquerra i $R^+ G_+ \subset G_+$, es a dir, l'ordre és compatible amb el producte per elements de R: si $a \in R$, $x \in G$,

$$a \geq 0,\ x \geq 0 \Rightarrow ax \geq 0.$$

Si R és unitari (u) s'exigeix també que $ux = x$ per a tot $x \in G$. Diem que <u>el producte per elements de R és seqüencialment o-continu</u> en G si

a) $x_n \overset{o}{\rightarrow} x$ en G, $a \in R \Rightarrow ax_n \overset{o}{\rightarrow} a_x$.

Si G i R són reticulats, i $a \in R$ i $x \in G$, aleshores $|ax| \leq |a|\,|x|$, de manera que a) és equivalent a

b) $x_n \downarrow 0$ en G, $a \in R_+ \Rightarrow ax_n \downarrow 0$.

Per exemple, si R és un ℓ-anell i X un conjunt qualsevol, el ℓ-anell producte R^X de les funcions de X en R és un R-mòdul reticulat amb el producte $(a,f) \to af$, que és seqüencialment o-continu en R^X, si el producte de R ho és.

Si L és un subconjunt de G direm que una aplicació $I:L \to R$ és un <u>morfisme homogeni</u> si se satisfà:

(i) $x,y,x+y\in L \Rightarrow I(x+y)=I(x)+I(y)$,

(ii) $a\in R,\ x,ax\in L \Rightarrow I(ax) = aI(x)$;

si (ii) se satisfà només per als elements $a\in R_+$ direm que I és <u>positivament homogeni</u>.

C) <u>Altres estructures ordenades. Morfismes. Productes.</u>

<u>0.1.14. Definicions.</u> E és un <u>espai vectorial reticulat</u>, (ℓ-espai vectorial o espai de Riesz) si és un espai vectorial real dotat d'un ordre compatible amb el producte per escalars: si $a,b\in E$ i $\lambda\in R$

$$a\leqslant b,\ \lambda\geqslant o \Rightarrow \lambda a\leqslant\lambda b$$

E és un <u>reticle de Banach</u> si E és un espai vectorial reticulat i normat, complet respecte la convergència en norma, en el que l'ordre és compatible amb la norma:

$$|x|\leqslant|y| \Rightarrow \|x\|\leqslant\|y\|$$

A és una <u>àlgebra de Banach reticulada</u> si A és una àlgebra normada, completa respecte la convergència en norma i amb l'ordre compatible amb la suma, el producte per escalars, el producte en A i la norma.

<u>0.1.15. Definició.</u> Si G i G' són dos grups reticulats (resp. anells, àlgebres, etc.), una aplicació $f:G\to G'$ és un <u>morfisme de grups reticulats</u> (resp. d'anells, d'àlgebres, etc.) si és morfisme de grups (resp. d'anells, d'àlgebres, etc.) i de reticles: si $a,b\in G$

$$f(a\wedge b) = f(a)\wedge f(b) \quad i \quad f(a\vee b) = f(a)\vee f(b);$$

en aquest cas és també morfisme d'ordre.

<u>0.1.16. Definicions i comentaris</u>. S'anomena <u>grup producte directe ordenat</u> (resp. anells) de la familia de grups ordenats $\{G_i\}_{i\in I}$ (resp. anells..., el grup producte directe (resp. anell ...) $G=\prod_{i\in I} G_i$, amb les operacions definides component a component, dotat de la relació (que és un ordre compatible amb la suma (resp. producte,...)):

$$(x_i) \leqslant (y_i) \text{ en } G \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i \text{ en } G_i, \text{ per a cada } i\in I.$$

El con dels positius de G és el conjunt producte $P=\prod_{i\in I} P_i$ dels cons dels positius P_i de cada grup G_i.

Quan tots els grups ordenats G_i (resp. anells,...) coincideixen amb un grup H (resp. anell,...) s'escriu <u>$G=H^I$</u>; en aquest cas G és el grup (resp. anell,...) de les aplicacions de I en H, amb l'ordre $f \leqslant g$ en G si i només si $f(i) \leqslant g(i)$ per a cada $i\in I$.

Si els G_i són reticulats aleshores G és reticulat i s'anomena <u>ℓ-grup producte</u> (resp. ℓ-anell,...). Aleshores, si $(a_i),(b_i)\in G$

$$(a_i)\vee(b_i) = (a_i\vee b_i) \quad i \quad (a_i)\wedge(b_i)=(a_i\wedge b_i),$$

i les projeccions $\pi_i:G \to G_i$ són morfismes reticulars.

Si els G_i són arquimedians aleshores G també ho és.

G és c.c. (resp. σ-c.c.) si i només si cada G_i és c.c. (resp. σ-c.c.) i aleshores si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ és un subconjunt de G (resp. numerable) i $x_\alpha=(x_\alpha^i)$, és

$$\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha = (\bigvee_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha^i) \quad i \quad \bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha = (\bigwedge_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha^i),$$

(on s'entén que si existeix un dels membres, aleshores existeix l'altre i val la igualtat corresponent) i les projeccions són o-contínues (resp. seqüencialment o-contínues).

0.1.17. Proposició. Sigui $G=\prod_{i\in I} G_i$ el ℓ-grup producte de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$ de ℓ-grups; sigui $x=(x_i)\in G$, i $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}\subset G$ una xarxa d'elements $x_\alpha=(x_\alpha^i)\in G$. Aleshores:

1) $x_\alpha \overset{\circ}{\to} x \Rightarrow x_\alpha^i \to x_i$, per a cada $i\in I$;

2) Si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ és un conjunt -afitat en G,

$$x_\alpha \overset{\circ}{\to} x \Leftrightarrow x_\alpha^i \overset{\circ}{\to} x_i, \text{ per a cada } i\in I;$$

3) Si es tracta d'una successió $\{x_n\}$

$$x_n \overset{\circ}{\to} x \Leftrightarrow x_n^i \overset{\circ}{\to} x_i, \text{ per a cada } i\in I.$$

D) Topologies de l'ordre. Distàncies generalitzades.

0.1.18. Definicions i comentaris. Sigui X un conjunt i G un ℓ-grup. Es diu que (X,G_+,d) és un espai mètric generalitzat (1) (breument e.m.g.) quan d és una aplicació de XxX en G_+ que satisfà les propietats:

1) $d(x,y)=0$ si i només si $x=y$;

2) $d(x,y)=d(y,x)$, per a tots els $x,y\in X$;

3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$, per a tots els $x,y,z\in X$.

Així com en [6] es definien amb criteris seqüencials les nocions de d-convergència, d-fonamentalitat i d-complet, hom pot definir, per extensió i de forma natural, aquets conceptes per a xarxes.

En un e.m.g. (X,G_+,d) direm que una xarxa $\{x_i\}_{i\in I}$ d'elements de X es d-convergent cap a x, i escriurem $x=d\text{-}\lim x_i$ ó $x_i \overset{d}{\to} x$, quan $d(x_i,x) \overset{\circ}{\to} 0$, és a dir, quan existeix una xarxa $\delta_i \downarrow 0$ en G i un índex $i_o\in I$ de manera que

$$d(x_i,x)\leqslant \delta_i \text{ per a cada } i\geqslant i_o.$$

Es dirà que la xarxa $\{x_i\}_{i\in I}$ és d-fonamental quan existeixin una xarxa $\delta_i\downarrow 0$ a G i un índex $i_o\in I$ de manera que

$$d(x_i,x_j)\leqslant \delta_i, \text{ per a cada } j\geqslant i \text{ i } i\geqslant i_o.$$

---

(1) La definició d'e.m.g. és més general ([30]) però aquí ens és suficient prendra-la d'aquesta forma.

En general tota xarxa d-convergent es d-fonamental però no tota d-fonamental és d-convergent. Hom diu que (X,G_+,d) és d-complet (resp. seqüencialment d-complet) quan tota xarxa (resp. successió) d-fonamental és d-convergent. [1]

Si G es un ℓ-grup commutatiu i es pren com a conjunt X el propi G amb la mètrica natural $d(x,y)=|x-y|$ resulta que la d-convergència coincideix amb la o-convergència definida en 0.1.0. (Proposició 0.1.7. a)). Hom parla de xarxes o-fonamentals i de ℓ-grups o-complets sempre que es considera la mètrica natural del ℓ-grup. És conegut [24] que tot ℓ-grup c.c. (resp. σ-c.c.) és o-complet (resp. seqüencialment o-complet).

Observi's que la o-convergència i o-fonamentalitat aquí definides coincideixen amb la τ-convergència i la τ-fonamentalitat definides per Papangelou [24]. En efecte, respecte a la convergència només cal comparar les dues definicions i en quan a la fonamentalitat es tracta de provar la següent

0.1.19. Proposició. Sigui G un ℓ-grup commutatiu $\{x_i\}_{i\in I}$ una xarxa en G. Són equivalents:

a) Existeixen una xarxa $\delta_i \downarrow 0$ i un índex $i_o \in I$ de manera que

$$|x_i - x_j| \leqslant \delta_i, \text{ per a cada } j \geqslant i \quad i \quad i \geqslant i_o.$$

b) Existeixen una xarxa $\delta_{ij} \downarrow 0$, indexada en el producte cartesià del conjunt d'índexos, i un índex (i_o, j_o) de manera que $|x_i - x_j| \leqslant \delta_{ij}$ per a tot $(i,j) \geqslant (i_o, j_o)$. [Definició de xarxa τ-fonamental de Papangelou].

Demostració.

(a) $\Rightarrow$ b)). Posem per a cada (i,j), $\delta_{ij} = \delta_i + \delta_j$. És immediat que $\delta_{ij} \downarrow 0$ i a més, si $k \geqslant i,j$ es té

$$|x_i - x_j| \leqslant |x_i - x_k| + |x_k - x_j| \leqslant \delta_i + \delta_j = \delta_{ij},$$

---

(1) El tema de la completació en e.m.g. ha estat considerat en [2] i [3].

mentre sigui $i \geq i_o$ i $j \geq j_o$, és a dir, $(i,j) \geq (i_o,j_o)$.

(b) $\Rightarrow$ a)). Posem $\delta_i = \delta_{ii}$. És immediat que $\delta_i \downarrow 0$ i a més, si $k_o \geq i_o, j_o$, resulta que per a cada $i \geq k_o$ i $j \geq i$ es té $(i,j) \geq (k_o,k_o) \geq (i_o,j_o)$ i per tant $|x_i - x_j| \leq \delta_{ij} \leq \delta_{ii} = \delta_i$. ■

L'equivalència expressada en la Proposició 0.1.19 està demostrada per a successions en [6] .

Si (X,G_+,d) és un e.m.g., els conjunts estables pel d-límit de xarxes (resp. successions) constitueixen una família de <u>tancats</u> per a una certa topologia que designarem per T_d (resp. T_d^σ). És a dir, un conjunt $F \in \mathcal{P}(X)$ és T_d-tancat si de $x_i \to x$ i $\{x_i\}_{i\in I} \subset F$ se'n segueix $x \in F$.

En general la d-convergència implica la T_d-convergència però no al revés ([31]).

En cas de ser G commutatiu, $X=G$ i $d(x,y)=|x-y|$ es parlarà de les topologies de l'ordre T_o i T_o^σ per a designar respectivament T_d i T_d^σ i de conjunts <u>o-tancats</u> i <u>seqüencialment o-tancats</u>.

Introduïm ara les normes generalitzades:

<u>0.1.20. Definicions i comentaris.</u> Siguin H un grup i G un ℓ-grup. Una <u>G-norma</u> <u>(generalitzada)</u> en H és una aplicació $n: H \to G_+$ que satisfà:

1) $n(x)=0$ si i només si $x=0$;

2) $n(x+y) \leq n(x)+n(y)$, per a tots els $x,y \in H$;

3) $n(-x)=n(x)$, per a cada $x \in H$.

Diem que (H,n) es un grup <u>G-normat</u>.

Tota G-norma n en un grup H determina una distància generalitzada $d_n: H\times H \to G_+$ posant $d_n(x,y)=n(x-y)$, que resulta ser invariant per translacions ($d_n(x+z, y+z)=d_n(x,y)$, per a qualssevol $x,y,z \in H$). Recíprocament, tota distància generalitzada invariant per translacions $d: H\times H \to G_+$ determina una G-norma $n_d: H \to G_+$, posant $n_d(x)=d(x,0)$.

Designarem per T_n i T_n^{σ} les topologies induïdes per la distància d_n determinada per n i parlarem de xarxes n-convergents, n-fonamentals i de grup G-normat n-complet per a designar respectivament aquests conceptes referits a la distància associada d_n.

Si H és un ℓ-grup diem que (H,n) és un <u>ℓ-grup G-normat</u> quan n sigui una G-norma en H <u>compatible amb l'ordre</u>, és a dir, que satisfà

4) $|x| \leqslant |y| \Rightarrow n(x) \leqslant n(y)$.

En tot ℓ-grup commutatiu G, $n(x)=|x|$ és una G-norma de ℓ-grup, l'associada a la distància natural.

Una R-norma generalitzada de ℓ-grup en R^N és la definida per $n((x_n))=\Sigma \frac{1}{2^n} \frac{|x_n|}{1+|x_n|}$, l'associada a la distància que, com es ben conegut, metritza la topologia de la convergència puntual. Aquesta R-norma n no és una norma en el sentit usual.

<u>2. L'AMPLIACIÓ $\bar{G}$ D'UN ℓ-GRUP.</u>

Si G és un ℓ-grup hom pot adjuntar formalment a G(1), com en el cas de $G=R$, un parell d'elements que designarem per $+\infty$ i $-\infty$, pels quals adoptarem els següents convenis. Per a cada $a \in G$:

$$(\pm\infty) \pm a = \pm\infty ,$$

$$-(\pm\infty) = \mp \infty,$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$$

$$-\infty < a < +\infty.$$

Escriurem $\bar{G}=G \cup \{\pm\infty\}$. Amb aquesta convenció dir que $\vee x_i=+\infty$ (resp. $\wedge x_i=-\infty$) és equivalent a dir que la familia $\{x_i\}$ d'elements $x_i \in G$ no està superiorment o-afitada (resp. inferiorment).

(1) En el mateix sentit que Wright ([33]), el qual considera només l'element $+\infty$, i que Vulikh ([31]).

Si G és c.c. la introducció d'aquests dos elements implica que donada una xarxa qualsevol $\{x_i\}_{i\in I}$ d'elements de G estaran sempre definits en $\bar{G}$ els elements

$$\underline{x} = \bigvee_{i \geq i_0} \left(\bigwedge_{i' \geq i} x_{i'} \right) \quad \text{i} \quad \bar{x} = \bigwedge_{i \geq i_0} \left(\bigwedge_{i' \geq i} x_{i'} \right),$$

que anomenarem respectivament o-limit inferior i superior de la xarxa ($\underline{x}, \bar{x}$ no depenen del i_o elegit). Tenim:

(i) $\bar{x}<+\infty \Leftrightarrow$ existeix un índex $i_o \in I$ per al qual $\{x_i\}_{i \geq i_o}$ és superiorment afita en G.

(ii) $\underline{x}>-\infty \Leftrightarrow$ existeix un índex $i_o \in I$ per al qual $\{x_i\}_{i \geq i_o}$ és inferiorment afita en G.

(iii) $\underline{x}, \bar{x} \in G \Leftrightarrow$ existeix un índex $i_o \in I$ per al qual $\{x_i\}_{i \geq i_o}$ és afitat en G.

Definint

a) $x_i \uparrow +\infty$ si $\{x_i\}_{i\in I}$ és creixent i no està superiorment afitada en G.

b) $x_i \overset{o}{\rightarrow} +\infty$ si existeix una xarxa $x_i' \uparrow +\infty$ tal que per a un índex $i_o \in I$ és $x_i' \leq x_i$ per a tot $i \geq i_o$,

i anàlogament $x_i \downarrow -\infty$ i $x_i \overset{o}{\rightarrow} -\infty$, resulta que $x_i \overset{o}{\rightarrow} x$ equival a $\bar{x}=\underline{x}=+\infty$ i $x_i \overset{o}{\rightarrow} -\infty$ a $\underline{x}=\bar{x} = -\infty$, fet que permet estendre la definició de o-convergència de xarxes en G posant

<u>0.2.1. Definició.</u> Sigui G un ℓ-grup c.c.; $\bar{G}$ l'ampliat de G amb els elements $\pm\infty$. Direm que la xarxa $\{x_i\}_{i\in I}$ d'elements de G és o-convergent cap a l'element $x \in \bar{G}$, i escriurem $\text{o-lim } x_i = x$, si $\underline{x}=\bar{x}=x$. (Si G és σ-c.c. la definició val només per a successions).

Aquesta generalització de la definició d'o-convergència fa que hom utilitzi la que hem donat en 0.1.0, que com hem dit coincideix amb la que Papangelou anomena τ-convergència [24], deixant de banda altres tipus de convergència en ordre que, segons la finalitat, són considerats per Peresini [25] i Cristescu [10], Vulick [31], Aliprantis-Burkinshaw [1] ó Papangelou [24].

Observi's finalment que, en les darreres definicions, no hi ha cap inconvenient en suposar que els termes de la xarxa o successió puguin ser no finits, i aleshores és immediat que si G és c.c., $\overline{x}=+\infty$ sempre que $\{x_i; x_i=+\infty\}$ és una subxarxa de $\{x_i\}_{i\in I}$ i, anàlogament, $\underline{x} = -\infty$ sempre que $\{x_i;\ x_i= -\infty\}$ és una subxarxa de $\{x_i\}_{i\in I}$.

En aquestes hipòtesis és immediat comprovar que encara és cert que si $\{x_i\}_{i\in I}$ i $\{y_i\}_{i\in I}$ són dues xarxes (en $\bar{G}$) indexades en el mateix conjunt, tals que $x_i \overset{o}{\to} x$, $y_i \overset{o}{\to} y$ i $x_i \leqslant y_i$ per a cada $i \geqslant i_o$, aleshores $x \leqslant y$.

També es conserva la compatibilitat de la suma amb l' o-convergència en el següent sentit:

<u>0.2.2. Proposició.</u> Sigui G un ℓ-grup; $\bar{G}$ l'ampliat de G amb dos elements $\pm\infty$. Si $x_i \overset{o}{\to} x$ i $y_i \overset{o}{\to} y$ de manera que l'element x+y està definit, aleshores existeix un index $i_o \in I$ per al qual x_i+y_i està definit per a cada $i \geqslant i_o$ i la xarxa $\{x_i+y_i\}_{i\geqslant i_o}$ és o-convergent cap a x+y.

En efecte: De les observacions fetes se'n segueix que si x i y són finits existeix un índex i_o a partir del qual x_i i y_i també són finits i per tant és cert que $x_i+y_i \overset{o}{\to} x+y$ (Prop. 0.1.7. b)). Suposem doncs que x ó y són no finits. Per a fixar idees, sigui $x=+\infty$. Aleshores serà $y\neq-\infty$. Si

$$x'_i \uparrow +\infty \text{ és tal que } x'_i \leqslant x_i \text{ per a cada } i \geqslant j_o,$$

i

$$y'_i \uparrow y \quad \text{és tal que } y'_i \leqslant y_i \text{ per a cada } i \geqslant k_o,$$

pel que hem dit, per a un cert $i_o \geqslant j_o, k_o$ podem suposar que $x'_i > -\infty$ i $y'_i > -\infty$ per a tot $i \geqslant i_o$, de manera que estarà definit $x'_i+y'_i$ i, per tant també, x_i+y_i. A més $x'_i+y'_i \leqslant x_i+y_i$ per a cada $i \geqslant i_o$ i $y'_i+x'_i \uparrow +\infty$. És a dir, $x_i+y_i \overset{o}{\to} +\infty = x+y$. Anàlogament es provaria en cas de ser $x = -\infty$. ∎

En canvi no es conserva la compatibilitat amb les operacions reticulars. Per exemple en el ℓ-grup $G=R^2$ ampliat considerin-se les successions definides per $x_n=(n,o)$ i $y_n=(0,1)$. Aleshores $x_n\uparrow+\infty$, $y_n \overset{o}{\to} (0,1)$; $x_n\wedge y_n = (0,0) \not\to (0,1)=(0,1)\wedge(+\infty)$.

3. FAMÍLIES o-SUMABLES EN UN ℓ-GRUP c.c.

Encara que en un ℓ-grup no hi considerem cap topologia hom pot donar una definició de famílies sumables respecte l'ordre. Per a notació i terminologia, seguim, donada l'analogia amb la sumabilitat en grups topològics, la de [9].

Siguin G un ℓ-grup, $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia d'elements $a_i\in G$ i $\mathfrak{F}(I)$ el filtre de les parts finites d'I que, sempre que no sigui ambigu, designarem per $\mathfrak{F}$.

Per a cada $J\in\mathfrak{F}$ posem $S_J = \sum_{i\in J} a_i$. La col.lecció $\{S_J\}_{J\in\mathfrak{F}}$ és una xarxa d'elements de G.

<u>0.3.1. Definició.</u> Diem que la família $\{a_i\}_{i\in I}$ d'elements d'un ℓ-grup G és <u>o-sumable en G</u> si i només si existeix el o-lim S_J. Aquest límit s'anomena la <u>suma de la família</u> i s'escriu S(a) ó o-$\sum_{i\in I} a_i$ per a designar-la. Diem que $\{a_i\}_{i\in I}$ es <u>absolutament o-sumable</u> quan $\{|a_i|\}_{i\in I}$ és o-sumable.

Usarem també les notacions $\{a_i\}$, o-Σa_i i $\{S_J\}$ per a designar $\{a_i\}_{i\in I}$, o-$\sum_{i\in I} a_i$ i $\{S_J\}_{J\in\mathfrak{F}}$ respectivament.

De la definició i les propietats del o-límit en un ℓ-grup se'n segueixen, de forma immediata, les següents propietats:

<u>0.3.2. Proposició.</u> Sigui G un ℓ-grup commutatiu c.c. Aleshores:

a) Si $\{a_i\}_{i\in I}$ i $\{b_i\}_{i\in I}$ són dues famílies o-sumables indexades en un mateix conjunt I aleshores $\{a_i+b_i\}_{i\in I}$ també és o-sumable i o-$\Sigma(a_i+b_i)$ = o-Σa_i+ o-Σb_i.

b) Si $\{a_i\}_{i\in I}$ és o-sumable aleshores $\{-a_i\}_{i\in I}$ també ho és i $o\text{-}\Sigma(-a_i)=-(o\text{-}\Sigma a_i)$.

En forma semblant al cas de la sumabilitat d'una família d'elements d'un grup topològic complet hom pot obtenir un equivalent de l'anomenat criteri de Cauchy que dóna una caracterització de la o-sumabilitat en ℓ-grups c.c.

0.3.3. Proposició. Sigui G un ℓ-grup c.c. Una família $\{a_i\}_{i\in I}$ és o-sumable en G si i només si existeixen una xarxa $\delta_J\downarrow 0$ a G, $J\in\mathcal{F}$, i un $J_o\in\mathcal{F}$ de manera que per a cada $J\in\mathcal{F}$ amb $J\supseteq J_o$ és $|S_k|\leq\delta_J$ per a tots els $K\in\mathcal{F}$ disjunts amb J.

En efecte: Suposem primerament que $\{a_i\}_{i\in I}$ és o-sumable. Aleshores $\{S_J\}$ és una xarxa o-fonamental. Existeix en conseqüència una xarxa $\delta_J\downarrow 0$ tal que $|S_J-S_{J'}|\leq\delta_I$ per a cada $J\supseteq J'$, $J'\in\mathcal{F}$ i $J\supseteq J_o$. Aleshores, donats $J,K\in\mathcal{F}$ disjunts tals que $J\supseteq J_o$, considerem $J'=J\cup K$. És $J'\in\mathcal{F}$, $J'\supset J$ i com que $S_{J'}=S_J+S_k$ resulta que $|S_k|\leq\delta_J$. I això per a cada $K\in\mathcal{F}$ disjunt amb J i $J\supseteq J_o$, tal com voliem provar.

Recíprocament, suposem que existeixen una xarxa $\delta_J\downarrow 0$ i un $J_o\in\mathcal{F}$ de manera que $|S_k|\leq\delta_J$ per a tots els $K,J\in\mathcal{F}$ disjunts tals que $J\supseteq J_o$. Volem veure que existeix o-lim S_J. Com que tot ℓ-grup c.c. és o-complet bastarà provar que (S_J) és o-fonamental.

Donats $J,J'\in\mathcal{F}$ tals que $J_o\subseteq J\subset J'$ agafem $K=J\cup J'$. És $K\in\mathcal{F}$, $K\cap J=\emptyset$ i $K\cup J=J'$ de manera que $|S_J-S_{J'}|=|S_k|\leq\delta_J$. I això, que és cert sigui quin sigui el $J'\supset J$, $J'\in\mathcal{F}$, ens dóna la o-fonamentalitat de $\{S_J\}$ que voliem. ∎

Observem que aquesta condició es necessària encara que G no sigui c.c. i suficient només si G és o-complet.

En la proposició següent donem una relació de propietats referents a la o-sumabilitat.

0.3.4. Proposició. Sigui G un ℓ-grup commutatiu c.c. Aleshores,

a) Tota subfamília d'una família o-sumable és o-sumable;

b) Si $\{a_i\}_{i\in I}$ és absolutament o-sumable aleshores és o-sumable i a més

$$|o\text{-}\Sigma a_i| \leqslant o\text{-}\Sigma |a_i|;$$

c) Si $\{a_i\}_{i\in I}\{b_i\}_{i\in I}$ són dues famílies indexades en un mateix conjunt I tals que $0 \leqslant a_i \leqslant b_i$, per a cada $i\in I$, i $\{b_i\}_{i\in I}$ és o-sumable aleshores $\{a_i\}_{i\in I}$ també ho és i $o\text{-}\Sigma a_i \leqslant o\text{-}\Sigma\, b_i$;

d) Una família $\{a_i\}_{i\in I}$ és absolutament o-sumable si i només si les families associades de les parts positives i negatives, $\{a_i^+\}_{i\in I}$ i $\{a_i^-\}_{i\in I}$, són o-sumables i aleshores

$$\text{(i)} \quad o\text{-}\Sigma |a_i| = \Sigma a_i^+ + o\text{-}\Sigma a_i^-;$$

$$\text{(ii)} \quad o\text{-}\Sigma a_i = o\text{-}\Sigma a_i^+ - o\text{-}\Sigma a_i^-.$$

En efecte:

a) Sigui $a=\{a_i\}_{i\in I}$ una família de termes positius o-sumable i $a'=\{a_i\}_{i\in I'}$ una subfamília ($I'\subset I$). De $a_i \geqslant o$ en resulta que $\{S_{J'}\}_{J'\in \mathfrak{F}(I')}$ i $\{S_J\}_{J\in\mathfrak{F}(I)}$ són xarxes monòtones creixents; per tant existeix o-lim $S_{J'}$ si i només si $\{S_{J'}\}$ està superiorment o-afitada (si G és c.c.). Però aquest és el cas, car $S_{J'} \leqslant S(a)$ per a tots els $J'\in\mathfrak{F}(I')$. A més serà $o\text{-}\sum_{i\in I'} a_i \leqslant o\text{-}\sum_{i\in I} a_i$.

b) Suposem que $\{a_i\}_{i\in I}$ és una família absolutament o-sumable. Segons la caracterització de la proposició anterior, $\{a_i\}_{i\in I}$ serà o-sumable si i només si existeixen una xarxa $\delta_J \downarrow 0$, $J\in\mathfrak{F}$, i un $J_o\in\mathfrak{F}$ de manera que per a cada $J\in\mathfrak{F}$ i $J\supseteq J_o$, és $|S_k| \leqslant \delta_S$ per a tot $K\in\mathfrak{F}$ disjunt amb J.

Per a la família $\{|a_i|\}_{i\in I}$ existeixen una xarxa $\delta_J\downarrow 0$ i un $J_o\in\mathfrak{F}$ amb aquesta propietat, és a dir, tals que

$$|\sum_{i\in K} |a_i|\,| \leqslant \delta_J ,$$

per a cada $J,K\in\mathfrak{F}$, $K\ J=\emptyset$, $J\supset J_o$. Però

$$|S_k| = |\sum_{i\in k} a_i| \leqslant \sum_{i\in k} |a_i| ,$$

de manera que $\{a_i\}_{i\in I}$ serà efectivament o-sumable. A més de $|\sum_{i\in k} a_i| \leq \sum_{i\in k} |a_i|$ en resulta que $|o\text{-}\Sigma a_i| \leq o\text{-}\Sigma|a_i|$.

c) Si per a cada $J\in\mathfrak{F}$ posem $S_J(a) = \sum_{i\in J} a_i$ i $S_J(b) = \sum_{i\in J} b_i$ resulta $S_J(a) \leq S_J(b)$ i per tant, essent les dues xarxes monòtones creixents i $\{S_J(b)\}$ o-convergent també ho serà $\{S_J(a)\}$, d'on la o-sumabilitat de $\{a_i\}_{i\in J}$ i que $o\text{-}\Sigma a_i \leq o\text{-}\Sigma b_i$.

d) és conseqüència immediata de la Proposició 0.3.2. i de c). ■

Pel que fa a <u>l'associativitat</u> d'aquesta suma en ordre són certs els següents resultats, vàlids en tot ℓ-grup commutatiu c.c.

<u>0.3.5. Proposició.</u> (Associativitat per a famílies absolutament o-sumables). Siguin $\{a_i\}_{i\in I}$ una família absolutament o-sumable en un ℓ-grup commutatiu c.c. i $\{I_\lambda\}_{\lambda\in L}$ una partició qualsevol d'I. Aleshores si $S_\lambda = o\text{-}\sum_{i\in I_\lambda} a_i$, resulta que $\{S_\lambda\}_{\lambda\in L}$ és absolutament o-sumable i $o\text{-}\sum_{\lambda\in L} S_\lambda = o\text{-}\sum_{i\in I} a_i$, és a dir,

$$o\text{-}\sum_{i\in I} a_i = o\text{-}\sum_{\lambda\in L} (o\text{-}\sum_{i\in I_\lambda} a_i).$$

En efecte: Si la família $\{a_i\}_{i\in I}$ és de termes positius i $S=o\text{-}\sum_{i\in I} a_i$, posem, per a cada $K\in\mathfrak{F}(L)$, $\sigma_K = \sum_{\lambda\in K} S_\lambda$. Hem de veure que existeix el o-lim σ_K i és S. Com que $a_i \geq 0$, (σ_K) és una xarxa monòtona creixent i bastarà provar que existeix $\vee\sigma_K$ i és S.

Donat $K\in\mathfrak{F}(L)$, prenguem, per a cada $\lambda\in K$, un $J_\lambda \subset I_\lambda$ finit qualsevol i posem, $J = \bigcup_{\lambda\in K} J_\lambda$. $J\subseteq I$ serà finit i tindrem

$$\sum_{\lambda\in K} S_{J_\lambda} = \sum_{\lambda\in K} \sum_{i\in J_\lambda} a_i = \sum_{i\in J} a_i = S_J \leq S.$$

Ara bé, el primer terme d'aquesta cadena de igualtats és una suma finita de termes S_J tals que per a cada $\lambda\in K$ és $S_{J_\lambda} \uparrow S_\lambda$, d'on

$$\sum_{\lambda\in K} S_\lambda \leqslant S,$$

és a dir, $\sigma_K \leqslant S$. Essent G c.c. i $K\in\mathcal{F}(L)$ arbitrari resulta que existeix $V\sigma_K$ i és $V\sigma_K \leqslant S$.

Falta provar que $V\sigma_K = S$. Donat un $J\in\mathcal{F}(I)$ considerem el conjunt $K=\{\lambda\in L;\ J_\lambda = I_\lambda \cap J = \emptyset\}$, que és finit. Es satisfà

$$\sigma_K = \sum_{\lambda\in K} S_\lambda \geqslant \sum_{\lambda\in K} S_{J_\lambda} = S_J.$$

Així, donat un $J\in\mathcal{F}(I)$, sempre podem trobar un $K\in\mathcal{F}(L)$ tal que $\sigma_K \geqslant S_J$, d'on $V\sigma_K \geqslant V S_J = S$ i per tant $V\sigma_K = S$, tal com voliem provar.

En general, si $\{a_i\}_{i\in I}$ és absolutament o-sumable la família $\{|S|_\lambda\}$ de les sumes

$$|S|_\lambda = o\text{-}\sum_{i\in I_\lambda} |a_i|$$

serà, pel que acabem de veure, o-sumable i, com que $|S_\lambda| \leqslant |S|_\lambda$, $\{S_\lambda\}$ serà absolutament o-sumable. A més, segons 0.3.4. d)

$$o\text{-}\sum_{i\in I} a_i = o\text{-}\sum_{i\in I} a_i^+ - o\text{-}\sum_{i\in I} a_i^-,$$

de manera que, per l'associativitat de les famílies de termes positius $\{a_i^+\}_{i\in I}$ i $\{a_i^-\}_{i\in I}$ i tenint en compte la Proposició 0.3.2. podem escriure

$$o\text{-}\sum_{i\in I} a_i = o\text{-}\sum_{\lambda\in L} (o\text{-}\sum_{i\in I_\lambda} a_i^+) - o\text{-}\sum_{\lambda\in L} (o\text{-}\sum_{i\in I_\lambda} a_i^-) =$$

$$= o\text{-}\sum_{\lambda\in L} (o\text{-}\sum_{i\in I_\lambda} a_i^+ - o\text{-}\sum_{i\in I_\lambda} a_i^-) = o\text{-}\sum_{\lambda\in L} (o\text{-}\sum_{i\in I_\lambda} (a_i^+ - a_i^-)) = o\text{-}\sum_{\lambda\in L} (o\text{-}\sum_{i\in I_\lambda} a_i). \blacksquare$$

<u>0.3.6. Proposició.</u> Siguin $\{a_i\}_{i\in I}$ una família d'elements d'un ℓ-grup c.c. G i $I = \bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda$ una partició d'I. Si cada família $\{a_i\}_{i\in I_\lambda}$ és absolutament o-sumable i la família $\{S_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de les sumes $S_\lambda = \sum_{i\in I_\lambda} a_i$

és absolutament o-sumable, aleshores $\{a_i\}_{i\in I}$ es absolutament o-sumable i

$$o-\sum_{i\in I} a_i = o-\sum_{\lambda\in L}(o-\sum_{i\in I_\lambda} a_i).$$

En efecte: Sigui $|S|_J = \sum_{i\in J}|a_i|$ i $|S|_\lambda = o-\sum_{i\in I_\lambda}|a_i|$. La família $\{a_i\}_{i\in I}$ serà absolutament o-sumable si existeix el

$$o-\lim_{J\in \mathfrak{F}(I)} |S|_J$$

ó, equivalentment, si $\{|S|_J\}_{J\in\mathfrak{F}(I)}$ està superiorment afitat. Ara bé, donat un $J\in\mathfrak{F}(I)$ considerem el conjunt $L_o=\{\lambda\in L; J_\lambda = I_\lambda \cap J\neq\emptyset\}$ que serà finit, així com ho són els J_λ amb $\lambda\in L_o$. Aleshores

$$|S|_J = \sum_{i\in J}|a_i| = \sum_{\lambda\in L_o}(\sum_{i\in J_\lambda}|a_i|) = \sum_{\lambda\in L_o}|S|_{J_\lambda} \leq \sum_{\lambda\in L_o}|S|_\lambda \leq o-\sum_{\lambda\in L_o}|S|_\lambda .$$

Per tant $\{a_i\}_{i\in I}$ serà absolutament o-sumable i, per l'associativitat provada en la proposició anterior, serà

$$o-\sum_{i\in I} a_i = o-\sum_{\lambda\in L}(o-\sum_{i\in I_\lambda} a_i). \blacksquare$$

Finalment vegem que en general, encara que G no sigui c.c. val una propietat semblant a la darrera per a famílies o-sumables i particions finites. És a dir

<u>0.3.7. Proposició.</u> Sigui $\{a_i\}_{i\in I}$ una família d'elements d'un ℓ-grup commutatiu G. Si $I=\bigcup_{\lambda\in L_o} I_\lambda$ és una partició finita d'I i $\{a_i\}_{i\in I}$ és o-sumable per a cada $\lambda\in L_o$, aleshores $\{a_i\}_{i\in I}$ és o-sumable i

$$o-\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in L_o}(o-\sum_{i\in I_\lambda} a_i).$$

En efecte: N'hi ha prou en provar la propietat per a $\# L_o=2$. Posem doncs $I=I_1\cup I_2$, on $I_1\cap I_2=\emptyset$, i suposem $\{a_i\}_{i\in I_1}$ o-sumable amb suma S_1 i $\{a_i\}_{i\in I_2}$ o-sumable amb suma S_2. Siguin $\{\delta_{J^1}\}_{J^1\in\mathcal{F}(I_1)}$ i $\{\delta_{J^2}\}_{J^2\in\mathcal{F}(I_2)}$ xarxes tals que

$$|S_{J^1}-S_1|\leqslant \delta_{J^1}\downarrow 0, \quad \text{per a cada } J^1\supseteq J_o^1,$$

i

$$|S_{J^2}-S_2|\leqslant \delta_{J^2}\downarrow 0, \quad \text{per a cada } J^2\supseteq J_o^2.$$

Per a cada $K\in\mathcal{F}(I)$ considerem els conjunts $K_1=KI_1\in\mathcal{F}(I_1)$ i $K_2=KI_2\in\mathcal{F}(I)$, per als quals se satisfà, si $K\supseteq K_o=J_o^1\cup J_o^2$,

$$|S_K-(S_1+S_2)|\leqslant |S_{K_1}-S_1|+|S_{K_2}-S_2|\leqslant \delta_{K_1}+\delta_{K_2},$$

i posem $\delta_K=\delta_{K_1}+\delta_{K_2}$.

És immediat comprovar que $\{\delta_K\}$ es una xarxa decreixent. A més com que donats $J^1\in\mathcal{F}(I_1)$ i $J^2\in\mathcal{F}(I_2)$ arbitraris, per al conjunt $K=J^1\cup J^2$ se satisfà $\delta_K=\delta_{J^1}+\delta_{J^2}$, resulta que $\delta_K\downarrow 0$. Queda per tant provat que o-lim $S_K=S_1+S_2$, és a dir, que $\{a_i\}_{i\in I}$ és o-sumable i que

$$\text{o-}\sum_{i\in I} a_i=\text{o-}\sum_{i\in I_1} a_i+\text{o-}\sum_{i\in I_2} a_i. \blacksquare$$

4. SÈRIES EN UN ℓ-GRUP.

<u>0.4.1. Definició.</u> [21] . Donada una successió $\{x_n\}$ d'elements d'un ℓ-grup G considerem la successió associada de les sumes parcials $\{S_n\}$ definida per a cada $n\in\mathbb{N}$ per $S_n=x_1+\ldots+x_n$. Del parell $(\{x_n\},\{S_n\})$ en direm una <u>sèrie</u> d'elements de G i la denotarem per o-$\sum_n x_n$ ó o-$\sum x_n$.

<u>0.4.2. Definició.</u> Direm que la sèrie o-$\sum x_n$ és <u>o-convergent</u> i que la seva suma és x si i només si o-lim $S_n=x$. En aquest cas escriurem o-$\sum x_n=x$.

Diem que o-Σx_n és <u>absolutament o-convergent</u> si la sèrie associada dels valors absoluts, o-$\Sigma|x_n|$, és o-convergent.

Diem que o-Σx_n és <u>incondicionalment o-convergent</u> (i escriurem i.c. per abreujar-ho) si tota reordenada o-convergeix cap a un mateix element.

De la definició i de la compatibilitat de la suma amb la o-convergència en un ℓ-grup se'n segueix de forma immediata que en tota sèrie o-Σx_n o-convergent el terme general tendeix a zero, és a dir, o-lim $x_n=0$. Semblantment es dedueix fàcilment la següent

<u>0.4.3. Proposició.</u> Siguin o-Σx_n, o-Σy_n dues sèries en un ℓ-grup G.

(a) Si les dues són o-convergents i $a_n \leq b_n$, aleshores o-$\Sigma a_n \leq$ o-Σb_n.

(b) Si G és σ-c.c. i $0 \leq a_n \leq b_n$, aleshores o-$\Sigma a_n \leq$ o-Σb_n en el sentit que si o-Σb_n és o-convergent, o-Σa_n també ho és i val la desigualtat, i si o-Σa_n és o-divergent (1), aleshores o-Σb_n també ho és.

Donades dues sèries o-Σx_n i o-Σy_n en G podem considerar la sèrie o-$\Sigma(x_n+y_n)$, que anomenarem la <u>sèrie suma</u> de les dues primeres. Les convergències d'una i altra estan relacionades de la forma següent:

<u>0.4.4. Proposició.</u> Siguin o-Σx_n, o-Σy_n dues sèries d'elements d'un ℓ-grup commutatiu G i considerem la sèrie suma o-$\Sigma(x_n+y_n)$.

a) Si o-Σx_n i o-Σy_n són o-convergents aleshores o-$\Sigma(x_n+y_n)$ també ho és i o-$\Sigma(x_n+y_n)=$ o-Σx_n+ o-Σy_n;

b) Si $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ i G és σ-c.c. aleshores de l'o-convergència de la sèrie suma o-$\Sigma(x_n+y_n)$ se'n segueix la de les dues sèries o-Σx_n+o-Σy_n i encara val o-$\Sigma(x_n+y_n)=$o-Σx_n+o-Σy_n.

Efectivament, la definició d'o-convergència i la compatibilitat de la suma amb l'o-convergència en un ℓ-grup asseguren a).

---

(1) En cas de ser G σ-c.c. una sèrie de termes positius o-Σx_n o bé és o-convergent o bé o-lim $S_n=+\infty$. En aquest cas diem que la sèrie és <u>o-divergent.</u>

I respecte a b) basta referir-se a la Proposició anterior, part b). ■

Donada una sèrie o-Σx_n podem considerar les sèries associades dels valors absoluts, o-$\Sigma|x_n|$, i de les parts positives i negatives, o-Σx_n^+ i o-Σx_n^-, dels termes de la sèrie. Del que acabem de dir en resulta:

<u>0.4.5. Proposició.</u> Una sèrie o-Σx_n en un ℓ-grup commutatiu σ-c.c. és absolutament o-convergent si i només si o-Σx_n^+ i o-Σx_n^- són o-convergents i aleshores

a) o-$\Sigma|x_n|$ = o-Σx_n^+ + o-Σx_n^-;

b) o-Σx_n és o-convergent i o-Σx_n = o-Σx_n^+ - o-Σx_n^-;

c) |o-$\Sigma x_n| \leqslant$ o-$\Sigma|x_n|$.

És d'observar que aquesta darrera desigualtat té sentit sempre que o-Σx_n sigui o-convergent, tant si o-$\Sigma|x_n|$ ho és com si no ho és, car aleshores serà o-$\Sigma|x_n| = +\infty$ (en $\bar{G}$).

Finalment, els termes d'una sèrie o-Σx_n determinen una família del qual es pot estudiar l'o-sumabilitat.

Direm que la sèrie o-Σx_n és <u>o-sumable</u> quan la família dels seus termes és o-sumable.

Les relacions entre les diferents o-convergències de la sèrie i l'o-sumabilitat estan expressades en la següent:

<u>0.4.6. Proposició.</u> En un ℓ-grup G commutatiu,

a) Tota sèrie o-sumable amb suma x és incondicionalment o-convergent cap a x.

b) Per a una sèrie de termes positius ser o-convergent és equivalent a ser o-sumable;

c) Si G és σ-c.c. aleshores tota sèrie absolutament o-convergent és o-sumable i incondicionalment o-convergent.

En efecte:

a) és immediat, tenint en compte que la successió de les sumes parcials, en qualsevol reordenació de la sèrie, és una subxarxa de la xarxa de les sumes finites $\{S_J\}_{J\in\mathcal{P}(\mathbb{N})}$.

Pel que fa a b), basta provar que si els termes de la sèrie o-convergent són positius, aleshores $\{S_J\}$ és una xarxa monòtona creixent per a la qual, si posem $n_J = \text{màx}\,\{n\in J\}$, és $S_J \leq S_{n_J}$.

D'aquí que sigui o-convergent i a més que o-lím S_J= o-lím S_n.

Finalment, quant a c) només cal recordar que si G és σ-c.c., aleshores tota sèrie absolutament o-convergent és o-convergent. ∎

C A P I T O L   1

Funcions de conjunt σ-additives en ordre valorades en un ℓ-grup

1. DEFINICIONS I PROPIETATS GENERALS.

En tot el que segueix X és un conjunt no buit, $\mathcal{a}$ un anell de parts de X (es a dir, estable respecte diferència i unions finites), $\bar{G}$ l'ampliat d'un ℓ-grup G, segons ha estat indicat en l'apartat 2 del Capítol 0.

1.1.1. Definicions. Direm que una funció de conjunt $m:\mathcal{a} \to \bar{G}$ és una mesura additiva, o simplement una mesura quan satisfaci les següents condicions:

a) prengui, si és el cas, un dels valors $+\infty, -\infty$ com a màxim,

b) $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$, per a qualssevol $A,B\in\mathcal{a}$ tals que $AB=\emptyset$.

Si a més satisfà:

c) $m(\cup A_n) = o\text{-}\Sigma\ m(A_n)$,

per a tota successió $\{A_n\}\subset\mathcal{a}$ de conjunts mútuament disjunts tal que $\cup A_n\in\mathcal{a}$, direm que m és una mesura σ-additiva en ordre o simplement una o-mesura (essent la sèrie $o\text{-}\Sigma\ m(A_n)$ incondicionalment convergent en ordre cap a $m(\cup A_n)$).

A menys que sigui $m(\mathcal{a})=\{+\infty\}$ ó $m(\mathcal{a})=\{-\infty\}$, és $m(\emptyset)=0$. Direm que m és finita quan $m(\mathcal{a})\subset G$ i si a més $m(\mathcal{a})$ és o-afitat en G, direm que m és o-afitada. En cas de ser G un ℓ-grup c.c., dir que m és o-afitada és equivalent a dir que té sentit associar a m l'element de G

$$\|m\|_o = \vee\{|m(A)|;A\in\mathcal{a}\}.$$

Direm que m és positiva quan $m(\mathcal{a})\subset\bar{G}_+=G_+\cup\{+\infty\}$. Quan m sigui positiva i finita direm que m és una probabilitat generalitzada o una o-probabilitat.

Observi's que en la sèrie $o\text{-}\Sigma\ m(A_n)$ pot aparèixer algun terme no finit; en aquest cas, com es desprèn de les observacions fetes arran de la Definició 0.2.1., la condició c) segueix tenint sentit.

Donem a continuació un exemple simple però significatiu

1.1.2. Exemple d'una o-mesura. Considerem el ℓ-grup $b(\mathbb{R}^X)$ de les funcions reals afitades definides en un conjunt X amb la suma i l'ordre puntuals. Sigui $\mathcal{A}$ una σ-àlgebra de parts de X. La funció de conjunt

$$m:\mathcal{A} \to b(\mathbb{R}^X)$$

$$A \to \varphi_A$$

que fa correspondre a cada conjunt $A\in\mathcal{A}$ la funció característica φ_A, és una o-mesura positiva i o-afitada, és a dir, una o-probabilitat, que no és mesura si considerem en $b(\mathbb{R}^X)$ la topologia de la convergència uniforme.

En efecte, l'additivitat és immediata; per a la σ-additivitat és suficient recordar que en $b(\mathbb{R}^X)$ la o-convergència de successions monòtones equival a la convergència puntual i per tant, si $\{A_n\}\subset\mathcal{A}$ és una successió de conjunts mútuament disjunts,

$$o\text{-}\Sigma\, m(A_n) = o\text{-}\lim \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = o\text{-}\lim m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = o\text{-}\lim \varphi_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} =$$

$$= \varphi_{\cup A_n} = m(\cup A_n).$$

En canvi la sèrie $\Sigma m(A_n)$ no és convergent per la topologia de la convergència uniforme, car

$$\| m(A) - \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \| = \| \varphi_A - \varphi_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \| = 1,$$

per a cada $n\in\mathbb{N}$. És a dir, m no és mesura com a funció de conjunt valorada en l'espai de Banach $b(\mathbb{R}^X)$. ■

Es diu que una topologia $\mathcal{T}$ en un ℓ-grup és σ-compatible ([33]) quan és topologia de grup i per a tota successió monòtona $x_n \uparrow_o x$ resulta que $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$. L'exemple que acabem de considerar mostra que la topologia de la convergencia uniforme en $b(\mathbb{R}^X)$ no és σ-compatible. En canvi ho és la topologia de la convergència puntual.

No tot ℓ-grup admetrà topologies Hausdorff σ-compatibles, com pot veure's en el següent exemple (Floyd, [16]):

<u>Exemple.</u> Sigui $G=B^{\infty}[0,1]/_{M}$, on $B^{\infty}[0,1]$ designa l'àlgebra reticulada de les funcions reals mesurables afitades en $[0,1]$ i M l'ideal de les que s'anul.len fora d'un conjunt magre. L'aplicació $(x,y) \to x-y$ de ExE en E no és simultàniament contínua respecte a les dues variables per a cap topologia T_1 en E σ-compatible amb l'ordre d'E.

En les proposicions que segueixen recollim les propietats generals que comporta l'additivitat i en especial la σ-additivitat en ordre. En particular, obtenim una caracterització de les mesures additives que són σ-additives en ordre en termes de continuïtat seqüencial, anàloga a la coneguda per a mesures escalars o vectorials.

<u>1.1.3. Proposició.</u>

a) Si $m:\mathcal{a} \to \bar{G}$ és additiva aleshores $m(A\cup B)+m(A\cap B)=m(A)+m(B)$ per a qualssevol $A,B\in\mathcal{a}$.

b) Si $m:\mathcal{a} \to \bar{G}_+$ és additiva aleshores m és creixent, finitament sub-additiva i superadditiva respecte a famílies arbitràries de conjunts mútuament disjunts.

En efecte: Provarem la propietat referent a la superadditivitat, que pressuposa la o-convergència, perquè la demostració de les altres pot establir-se seguint la metodologia de les mesures reals.

Sigui $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{a}$ una familia de conjunts mútuament disjunts tals que $A=\cup A_i\in\mathcal{a}$, Cal provar que $m(\cup A_i)\geqslant o\text{-}\Sigma\, m(A_i)$. Si $m(A_i)=+\infty$ per a algun $i\in I$, serà $m(A)=+\infty$ i per tant la desigualtat és certa. Suposem doncs que $m(A_i)<+\infty$ per a cada $i\in I$. Recordem que $S=o\text{-}\Sigma\, m(A_i)$ és el o-límit de la xarxa $(S_J)_J$ de les sumes

$$S_J = \sum_{i\in J} m(A_i),$$

indexada en el conjunt filtrant $\mathcal{F}$ de les parts finites d' I. Per a cada $J\in\mathcal{F}$ es té

$$m(\bigcup_{i\in J} A_i) = \sum_{i\in J} m(A_i) = S_J.$$

Ara bé, de $m\geqslant 0$ se'n dedueix també que $m(\bigcup_{i\in I} A_i)\leqslant m(A)$ i que $S_J\uparrow S$, de manera que $m(A)\geqslant S$, tant si $S=+\infty$ com si $S<+\infty$. ■

<u>1.1.4. Proposició.</u> Sigui $m:\mathcal{a} \to \bar{G}$ additiva. Són equivalents les següents propietats:

a) m és σ-additiva en ordre;

b) Si $A_n\uparrow A$ en $\mathcal{a}$, aleshores $m(A_n) \overset{o}{\to} m(A)$.

En efecte:

(a) ⇒ b)). Sigui $\{A_n\}\subset \mathcal{a}$ una successió tal que $A_n\uparrow A$ i $A\in\mathcal{a}$. Hem de veure que $m(A_n) \overset{o}{\to} m(A)$. Si posem $B_1=A_1$ i $B_n=A_n-A_{n-1}$ per a $n>1$, resulta que $B_n\in\mathcal{a}$, els B_n són mutuament disjunts,

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = A_n \quad \text{i} \quad \bigcup_{n} B_n = A.$$

Per la σ-additivitat en ordre de m tenim:

$$m(A)=o\text{-}\Sigma\, m(B_n)=o\text{-}\lim \sum_{i=1}^{n} m(B_i)=o\text{-}\lim(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)=o\text{-}\lim\, m(A_n).$$

(b) ⇒ a)). Sigui $\{A_n\}\subset \mathcal{a}$ una successió de conjunts mútuament disjunts tal que $A=\bigcup A_n\in\mathcal{a}$. Hem de veure que $m(A)=o\text{-}\Sigma\, m(A_n)$. Si per a algun $n\in\mathbb{N}$ és $m(A_n)=\pm\infty$ aleshores $m(A)=\pm\infty$ i és certa la igualtat. Suposem doncs $m(A_n)\neq\pm\infty$ per a $n\in\mathbb{N}$. Aleshores si posem, per a cada n, $B_n=\bigcup_{i\,I}^{n} A_i$, resulta que $B_n\in\mathcal{a}$ i $B_n\uparrow A$ i per tant, que

$$m(A)=o\text{-}\lim\, m(B_n)=o\text{-}\lim \sum_{i=1}^{n} m(A_i)=o\text{-}\Sigma\, m(A_n). \;■$$

Hem vist que una mesura additiva respecta el pas al límit en successions monòtones creixents si i només si és σ-additiva en ordre. No ocorre el mateix, en general, amb les successions monòtones decreixents a menys que posem alguna condició a la mesura o a la successió. Precisant, tenim la següent

<u>1.1.5. Proposició.</u> Sigui $m:\mathcal{a} \to \bar{G}$ additiva. Aleshores

a) Si m és σ-additiva en ordre, resulta que $m(A_n) \overset{o}{\to} 0$ cada vegada que $A_n \downarrow \emptyset$ en $\mathcal{a}$ i $m(A_1) \neq \pm\infty$;

b) Si m és finita i $m(A_n) \overset{o}{\to} 0$ cada vegada que $A_n \downarrow \emptyset$ en $\mathcal{a}$, aleshores m és σ-additiva en ordre.

En efecte:

a) Sigui $\{A_n\} \subset \mathcal{a}$ una successió de conjunts tal que $A_n \downarrow \emptyset$ i $m(A_1) \neq \pm\infty$; aleshores $m(A_n) \neq \pm\infty$ per a tot $n \geqslant 1$. Hem de veure que $m(A_n) \overset{o}{\to} 0$. Posem $B_n = A_n - A_{n+1}$; resulta que $B_n \in \mathcal{a}$; els B_n són mútuament disjunts, $\cup B_n = A_1$ i

$$\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i = A_1 - A_n,$$

de manera que $m(A_1) = o\text{-}\Sigma\, m(B_n)$ i per tant

$$o\text{-}\lim m(A_n) = o\text{-}\lim \left[m(A_1) - \sum_{i=1}^{n+1} m(A_i) \right] = 0.$$

Observi's que el raonament continua essent vàlid si $m(A_i) \neq \pm\infty$ per a algun i, encara que sigui $i > 1$.

b) Sigui $\{A_n\} \subset \mathcal{a}$ una successió de conjunts mútuament disjunts tal que $A = \cup A_n \in \mathcal{a}$. Posem

$$B_1 = A \quad \text{i} \quad B_n = A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i>n} A_i, \text{ per a cada } n > 1.$$

Es compleix que $B_n \in \mathcal{a}$, $B_n \downarrow \emptyset$ i, per tant, $m(B_n) \overset{o}{\to} 0$. D'altra banda,

$$o\text{-}\Sigma\, m(A_n) = o\text{-}\lim \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = o\text{-}\lim m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = o\text{-}\lim m(A - B_n),$$

i essent m finita, $m(A-B_n) = m(A) - m(B_n)$, de manera que resulta en definitiva, $o\text{-}\Sigma\, m(A_n) = m(A)$, com s'havia de veure. Observi's que en la demostració és essencial que m sigui finita. ■

Resumint podem posar:

<u>1.1.6. Corol.lari.</u> Sigui $m:\mathcal{a} \to G$ additiva i finita. Són equi-

valents les següents propietats:

a) m és σ-additiva en ordre;

b) $A_n \uparrow A \Rightarrow m(A_n) \overset{o}{\to} m(A)$;

c) $A_n \downarrow A \Rightarrow m(A_n) \overset{o}{\to} m(A)$;

d) $A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow m(A_n) \overset{o}{\to} 0$.

Amb aquest corol.lari posem en evidència que, essent m finita, són respectats els límits de successions monòtones de conjunts de $\mathcal{a}$. En general, si $\mathcal{a}$ es una σ-àlgebra, hom pot considerar els límits inferior i superior d'una successió $\{A_n\} \subset \mathcal{a}$ i s'obté la següent

<u>1.1.7. Proposició.</u> Sigui $m:\mathcal{a} \to G_+$ σ-additiva en ordre definida en la σ-àlgebra, G un ℓ-grup σ-c.c. i $\{A_n\} \subset \mathcal{a}$ una successió de conjunts de $\mathcal{a}$. Aleshores

$$m(\underline{\lim}\, A_n) \leqslant o\text{-}\underline{\lim}\, m(A_n) \leqslant o\text{-}\overline{\lim}\, m(A_n) \leqslant m(\overline{\lim}\, A_n)$$

(o-lim $m(A_n)$ i o-$\overline{\lim}$ $m(A_n)$ considerats en $\bar{G}$).

En efecte: Basant-nos en b) i c) del Corol.lari anterior

$$m(\underline{\lim}\, A_n) = m(\bigcup_n \bigcap_{i\geqslant n} A_i) = \bigvee_n m(\bigcap_{i\geqslant n} A_i) \leqslant \bigvee_n \bigwedge_{i\geqslant n} m(A_i) = o\text{-}\underline{\lim}\, m(A_n),$$

$$m(\overline{\lim}\, A_n) = m(\bigcap_n \bigcup_{i\geqslant n} A_i) = \bigwedge_n m(\bigcup_{i\geqslant n} A_i) \geqslant \bigwedge_n \bigvee_{i\geqslant n} m(A_i) = o\text{-}\overline{\lim}\, m(A_n). \blacksquare$$

<u>1.1.8. Corol.lari.</u> En les hipòtesis de la proposició anterior, si $A=\lim A_n$ aleshores $m(A)=o\text{-}\lim m(A_n)$.

Donem a continuació un parell d'exemples d'o-mesures.

<u>1.1.9. Exemple d'una o-mesura finita no positiva.</u> Siguin I un conjunt qualsevol, $\mathcal{a}$ una àlgebra de parts d'un conjunt X i $\{m_i:\mathcal{a} \to \mathbb{R};\ i\in I\}$ una col.lecció de mesures reals. Les mesures m_i determinen una o-mesura $m:\mathcal{a} \to \mathbb{R}^I$, definida per $m(A)=(m_i(A))$, que és o-afitada si i només si les m_i són afitades.

En efecte, m és naturalment additiva; com que en R^I la o-convergència de successions equival a la convergencia per coordenades, resultarà, de la σ-additivitat de les m_i, que sempre que $A_n \downarrow \emptyset$ en $\mathcal{A}$, $m(A_n) \overset{o}{\to} 0$ i això és suficient, essent m finita, per a la σ-additivitat en ordre de m.

D'altra banda es immediat que m és o-afitada si i només si cada m_i és afitada.

<u>1.1.10. Exemple d'una σ-mesura no finita.</u> Considerem una col. lecció $(m_i)_{i\in I}$ indexada en un conjunt I, de mesures reals σ-additives en una σ-àlgebra $\mathcal{A}$, i suposem que cada m_i és finita excepte per a un índex $i=i_o$ pel qual m_{i_o} és no finita i positiva. Considerem el ℓ-grup producte R^I ampliat amb $\pm\infty$ i posem per a cada $A\in\mathcal{A}$

$$m(A) = \begin{cases} +\infty \quad , & \text{si} \quad m_{i_o}(A)=+\infty \\ (m_i(A)), & \text{si} \quad m_{i_o}(A)< +\infty. \end{cases}$$

Aquesta funció de conjunt $m:\mathcal{A} \to R^I$ o$\{\pm\infty\}$ és una -mesura.

En efecte: Només provarem que és σ-additiva en ordre. Per a això sigui $A_n \uparrow A$ una successió creixent de conjunts d' $\mathcal{A}$; cal veure que $m(A_n) \overset{o}{\to} m(A)$:

Si $m(A)<+\infty$, serà $m(A_n)<+\infty$ per a cada n, i per tant $m_i(A_n) \to m_i(A)$ en R, per a cada $i\in I$; i doncs $m(A_n)=(m_i(A_n)) \overset{o}{\to} (m_i(A))=m(A)$.

Si $m(A)=+\infty$, és $m_{i_o}(A)=+\infty$ i aleshores o bé $m_{i_o}(A_n)<+\infty$, per a cada $n\in N$, o bé $m_{i_o}(A_{n_o})=\infty$ per a algun n_o.

Si $m_{i_o}(A_n)<+\infty$ per a cada n aleshores, en ser $m_{i_o} \geqslant o$, és $m_{i_o}(A_n)=b_n\uparrow+\infty$ i per tant també $m(A_n) \overset{o}{\to} +\infty$ car, posant $a_i=\sup|m_i(A)|$, per a $i\neq i_o$, i

$$\alpha_n = (\alpha_i^n) \in R^I, \text{ on } \alpha_i^n = -a_i \text{ si } i\neq i_o \text{ i } \alpha_{i_o}^n=b_n,$$

s'obté una successió $\alpha_n\uparrow+\infty$ en R^I tal que $\alpha_n \leqslant m(A_n)$ per a cada n.

Si $m_{i_o}(A_{n_o})=+\infty$, aleshores $m(A_n)=+\infty$ per a cada $n\geqslant n_o$ i per tant

$m(\overset{\circ}{A_n}) \to +\infty$ car, si posem

$$\alpha_n=(\alpha_i^n)\in R^I \text{ on} \begin{cases} \alpha_{i_o}^n=n \text{ i } \alpha_i^n=-a_i \text{ per a } i\neq i_o, \text{ si } n\geqslant n_o, \\ \alpha_{i_o}^n=o \text{ i } \alpha_i^n=-a_i \text{ per a } i\neq i_o, \text{ si } n<n_o, \end{cases}$$

obtenim una successió $\alpha_n\uparrow+\infty$ en R^I tal que $\alpha_n\leqslant m(A_n)$ per a cada n. ■

2. EL GRUP RETICULAT DE LES MESURES O-AFITADES.

Siguin G un ℓ-grup i $\mathcal{a}$ un anell de parts d'un conjunt X. Podem considerar els següents conjunts de mesures definides en $\mathcal{a}$ i valorades en G:

$a = a(\mathcal{a};\bar{G})$ additives no necessàriament finites,

$a_F=a_F(\mathcal{a};G)$ additives i finites,

$ba=ba(\mathcal{a};G)$ additives finites i o-afitades,

i els subconjunts respectius de σ-additives en ordre ca, ca_F i bca.

Entre els elements de a que no prenen valors impropis diferents podem definir una suma posant, si $m,n\in a$ i $A\in\mathcal{a}$, $(m+n)(A) = m(A)+n(A)$, que resulta ser associativa i commutativa. La mesura idènticament nul.la és el neutre per a aquesta suma, però no existeix invers en general. En el conjunt a hi podem definir també un ordre parcial posant, si $m,n\in a$, $m\geqslant n$ si $m(A)\geqslant n(A)$ per a cada $A\in\mathcal{a}$.

Estudiem a continuació les propietats bàsiques en relació a l'ordre i la suma suara definits.

1.2.1. Proposició, (propietats de l'ordre). Si G és c.c., aleshores

a) En el parcialment ordenat $(a,\leqslant)$ existeixen, per a cada $m\in a$, els elements $m\vee 0$, $m\wedge 0$ i $m\vee(-m)$ (per 0 designem la mesura idènticament nul.la) denotats per m^+, m^- i $|m|$ respectivament, els quals satisfan

(i) $m^{+}(A) = \vee\{m(B);\ B\subset A,\ B\in\mathcal{a}\}$

(ii) $m^{-}(A) = -\wedge\{m(B);\ B\subset A,\ B\in\mathcal{a}\}$

(iii) $|m| = m^{+} + m^{-}$

(iv) $m^{+} = m + m^{-}$ quan m és finita o pren el valor $+\infty$

$m^{-} = m^{+} - m$ quan m és finita o pren el valor $-\infty$

A més si $m\in ca$ aleshores $m^{+}, m^{-}, |m|\in ca$.

b) Si $\{m_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{R}}$ és una col.lecció d'elements $m_\alpha\in a$ tal que per a un cert $m\in a$ que no pren el valor $+\infty$(resp. $-\infty$), és $m_\alpha\leqslant m$ (resp. $m_\alpha\geqslant m$) per a cada $\alpha\in\mathcal{R}$, aleshores existeix $\vee m_\alpha$ en a (resp.$\wedge m_\alpha$). I si $m, m_\alpha\in ca$ i $\vee m_\alpha(A) > -\infty$ per a cada $A\in\mathcal{a}$ (resp.$\wedge m_\alpha(A) < +\infty$), aleshores $\vee m_\alpha\in ca$ (resp.$\wedge m_\alpha\in ca$).

Demostració de a). Sigui m qualsevol mesura de a i considerem la funció de conjunt $M:\mathcal{a}\to\bar{G}$ definida per

$$M(A) = \vee\{m(B);\ B\subset A,\ B\in\mathcal{a}\}.$$

Es tracta de comprovar que $M\in a$ i que $M = m \vee o$. Si $A, A'\in\mathcal{a}$ són tals que $AA' = \emptyset$ hem de veure que $M(A\cup A') = M(A) + M(A')$. Si $M(A)$ ó $M(A')$ és $+\infty$ no cal provar res. Suposem per tant que $M(A) < +\infty$ i $M(A') < +\infty$. Aleshores donat un $C\subset A\cup A'$, $C\in\mathcal{a}$, tenim

$$m(C) = m(CA) + m(CA') \leqslant M(A) + M(A'),$$

d'on prenent suprems resulta $M(A\cup A') \leqslant M(A) + M(A')$. D'altra banda, si $B\subseteq A$ i $B'\subseteq A'$ on $B, B'\in\mathcal{a}$, és

$$m(B) + m(B') = m(B\cup B') \leqslant M(A\cup A'),$$

d'on prenent suprems sobre els $B\subseteq A$ i $B'\subseteq A'$ resulta $M(A) + M(A') \leqslant \leqslant M(A\cup A')$. Per a veure que $M = m\vee 0$ observem en primer lloc que de la definició de M és $M\geqslant 0$ i $M\geqslant m$. Sigui ara $n\in a$ tal que $n\geqslant 0$ i $n\geqslant m$; per a cada $A\in\mathcal{a}$ i $B\subset A$, $B\in\mathcal{a}$, tenim $m(B)\leqslant n(B)\leqslant n(A)$, d'on $M(A)\leqslant n(A)$, és a dir $M\leqslant n$.

Pel que acabem de veure, donada qualsevol mesura $m\in a$ està assegurada d'existència de $(-m)^{+}=(-m)\vee 0$, on $-m$ és la mesura definida per $(-m)(A)=-m(A)$; d'altra banda és immediat comprovar que $(-m)\vee 0=-(m\wedge 0)$, d'on en resulten l'existència de la mesura m^{-} i la igualtat de (ii).

Finalment vegem que $m^{+}+m^{-}=m\vee(-m)$, amb la qual cosa quedaran provats l'existència de la mesura $|m|$ i (iii). Certament $m^{+}+m^{-}$ és una mesura que majora m i $-m$ alhora. Sigui $n\in a$ tal que $n\geqslant m$ i $n\geqslant -m$; cal veure que $n\geqslant m^{+}+m^{-}$. Com que $n(A)\geqslant|m(A)|$, n és positiva i, per tant, per a cada $A\in a, n(A)\in G_{+}$ ó $n(A)=+\infty$. Si $n(A)=+\infty$ no hi ha res a dir; en cas contrari, com que tambe $n\geqslant m^{+}$ i $n\geqslant m^{+}$ serà $m^{+}(A)<+\infty$ i $m^{-}(A)<+\infty$ i també $m(B)\in G$, per a tots els $B\in a$ tals que $B\subseteq A$, com es dedueix de les expressions de (i) i (ii). Podrem escriure en conseqüència, posant $\bigvee_{B\subseteq A} m(B)$ per a designar $\vee\{m(B);\ B\subseteq A,\ B\in a\}$ i anàlogament per a l'expressió de (ii),

$$m^{+}(A)+m^{-}(A)=\bigvee_{B\subseteq A} m(B)+\bigvee_{C\subseteq A}[-m(c)]=\bigvee_{B,C\subseteq A}\{m(B)-m(c)\}.$$

Per tant, donats $B,C\subseteq A$ qualssevol tenim

$$m(B)-m(C)=m(B-C)+m(BC)-m(C-B)-m(BC)\leqslant$$

$$\leqslant n(B-C)+n(C-B)\leqslant n(B\cup C)\leqslant n(A)$$

d'on, prenent suprems respecte als $B,C\subseteq A$ resulta $m^{+}(A)+m^{-}(A)\leqslant n(A)$, tal com voliem provar.

Falta veure les relacions enunciades en (iv). Si m és finita o pren el valor $+\infty$, és, si $m(A)=+\infty$, $m^{+}(A)=+\infty$ i per tant $m^{+}(A)=$ $=m(A)+m^{-}(A)$; i si $m(A)<+\infty$, com que per a tots els $B\subseteq A$ serà $m(B)<+\infty$, podrem escriure

$$m^{+}(A)=\bigvee_{B\subseteq A} m(B)=\bigvee_{C\subseteq A} m(A-C)=\bigvee_{C\subseteq A}\{m(A)-m(C)\}=m(A)-\bigwedge_{C\subseteq A} m(C)=m(A)+m^{+}(A).$$

Si m és finita o pren el valor $-\infty$ aleshores $-m$ és finita o pren el valor $+\infty$ i per tant $(-m)^{+}=-m+(-m)^{-}$, ès a dir, $m^{-}=m^{+}-m$.

Per acabar vegem que si $m\in ca$ aleshores $m^{+}\in ca$ i per tant també m^{-}, $|m|\in ca$. Donada una successió $\{A_n\}\subset a$ de conjunts mútuament disjunts tals que $A=\cup A_n \in \mathcal{a}$, cal veure que $m^+(A)=o-\Sigma m^+(A_n)$. En ser m^+ additiva i positiva serà també superadditiva (Proposició 1.1.3b)) i per tant $m^+(A)\geqslant o-\Sigma m^+(A_n)$. Falta veure l'altra desigualtat: Si $o-\Sigma m^+(A_n)=+\infty$ no hi ha res a dir. En cas contrari considerem qualsevol conjunt $B\in\mathcal{a}$ tal que $B\subseteq A$. Posem $B_n=AA_n$. De la σ-additivitat en ordre de m i de $m(B_n)\leqslant m^+(A_n)$ se'n dedueix que $m(B)=o-\Sigma m(B_n)\leqslant o-\Sigma m^+(A_n)$, d'on, prenent suprem sobre els $B\subseteq A$, se segueix $m^+(A)\leqslant o-\Sigma m^I(A_n)$.

<u>Demostració de b).</u> Sigui $\{m_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ una col.lecció de mesures $m_\alpha\in a$ tals que per a una certa mesura $m\in a$ és

$$m_\alpha\leqslant m, \qquad \text{per a tots els } \alpha\in\mathfrak{A},$$

i $$m(A)<+\infty, \qquad \text{per a tots els } A\in\mathcal{a}.$$

Per a cada $A\in\mathcal{a}$ posem

$$n(A)=\vee\{\Sigma\, m_{\alpha_i}(A_i);\ \{A_i\}\in D(A),\{\alpha_i\}\subset\mathfrak{A}\}$$

on D(A) designa el conjunt de les particions finites de A en $\mathcal{a}$. Obtenim d'aquesta manera una funció de conjunt $n:\mathcal{a}\to\bar{G}$. Es tracta de veure que $n\in a$ i que $n=\vee m_\alpha$.

En primer lloc n no pren el valor $+\infty$ car per a qualssevol $\{A_i\}\in D(A)$ i $\{\alpha_i\}\subset\mathfrak{A}$ es té $\Sigma m_{\alpha_i}(A_i)\leqslant\Sigma m(A_i)=m(A)<+\infty$. Vegem que n és additiva: Si $A,B\in\mathcal{a}$ són conjunts tals que $AB=\emptyset$, cal veure que $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$. Considerem particions $\{A_i\}\in D(A)$, $\{B_j\}\in D(B)$ i conjunts d'índexos $\{\alpha_i\},\{\beta_j\}\subset\mathfrak{A}$ arbitraris; la col.lecció de conjunts $\{A_i\}\cup\{B_j\}$ és una partició d' $A\cup B$ de manera que

$$\Sigma\, m_{\alpha_i}(A_i)+\Sigma\, m_{\beta_j}(B_j)\leqslant n(A\cup B),$$

d'on $n(A)+n(B)\leqslant n(A\cup B)$. D'altra banda, donats $\{C_i\}\in D(A\cup B)$ i $\{\alpha_i\}\subset\mathfrak{A}$, obtenim particions $\{A_i\}\in D(A)$ i $\{B_i\}\in D(B)$ posant $A_i=AC_i$ i $B_i=BC_i$, de manera que

$$\Sigma\, m_{\alpha_i}(C_i)=\Sigma\, m_{\alpha_i}(A_i)+\Sigma\, m_{\alpha_i}(B_i)\leqslant n(A)+n(B)$$

i per tant $n(A\cup B)\leqslant n(A)+n(B)$. Pel que fa a la igualtat $n=\vee m_\alpha$, observi's que per construcció $n\geqslant m_\alpha$ per a cada $\alpha\in\mathfrak{A}$; i si $n'\in a$ és tal que $n'\geqslant m_\alpha$, per a cada $\alpha\in\mathfrak{A}$, aleshores resulta que

$$\Sigma\, m_{\alpha_i}(A_i) \leqslant \Sigma\, n'(A_i) = n'(A),$$

per a qualssevol $\{A_i\}\in D(A)$ i $\{\alpha_i\}\subset\mathfrak{K}$. Per tant $n(A)\leqslant n'(A)$, és a dir, $n=\vee m_\alpha$.

Si les mesures $m_\alpha, m\in a$ són σ-additives en ordre de manera que $\vee m_\alpha(A)>-\infty$ per a tots els $A\in\mathcal{a}$, aleshores n també és σ-additiva en ordre. Efectivament, per a cada $A\in\mathcal{a}$ i $\alpha\in\mathfrak{K}$ és $m_\alpha(A)\leqslant n(A)\leqslant m(A)$ d'on, si m no pren el valor $+\infty$, cada vegada que $A_n \downarrow \emptyset$ en $\mathcal{a}$ tindrem, de $m_\alpha(A_n) \overset{o}{\to} 0$ i $m(A_n) \overset{o}{\to} 0$, que $n(A) \overset{o}{\to} 0$. I com que n és additiva i no pren ni el valor $+\infty$ ni el valor $-\infty$, ja que $n(A)\geqslant \vee m_\alpha(A)>$ $>-\infty$ per hipòtesi, això és suficient per a la σ-additivitat en ordre de n.

Finalment, és immediat comprovar que si $\{m_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{K}}$ és una col.lecció de mesures $m_\alpha\in a$ tals que per a una certa mesura $m\in a$ que no pren el valor $-\infty$, és $m_\alpha\geqslant m$, per a cada $\alpha\in\mathfrak{K}$, aleshores $\vee(-m_\alpha)=-\wedge m_\alpha$ i, per tant, en cas de ser $m, m_\alpha\in ca$ i $\wedge m_\alpha(A)<+\infty$ per a cada $A\in\mathcal{a}$, serà $\wedge m_\alpha \in ca$. La Proposició està demostrada. ∎

<u>En tot el que segueix suposem que G és c.c.</u>

<u>1.2.2. Proposició.</u> $(a_F,+,\leqslant)$ és un grup ordenat c.c. del qual ba i ca_F en són subgrups ordenats convexos i c.c. considerats com a grups ordenats.

En efecte: És immediat comprovar que en a_F l'ordre és compatible amb la suma, i l'apartat b) de la proposició anterior ens assegura la completesa condicional d'aquest grup ordenat, així com la dels grups ordenats ca_F i ba. És immediat que ba és subgrup convex, i de la caracterització de la σ-additivitat (1.1.6) en resulta que ca_F és subgrup convex de a_F. ∎

<u>1.2.3. Proposició.</u> $(ba,+,\leqslant)$ és un ℓ-grup c.c. del qual bca n'és un subgrup sòlid i c.c. considerat com a ℓ-grup.

Demostració. En ser ba un grup ordenat bastarà provar que existeix $m\vee 0$, per a tot $m\in ba$, per a poder afirmar que és un ℓ-grup. La Proposició 1.2.1. a) ens assegura l'existència de $m^+=m\vee 0$ en a, però és immediat veure que $m^+ \in ba$ quan $m \in ba$, car es té

$$0 \leqslant m^+(A) \leqslant m^+(X) = V\{m(A);\ A \in \mathcal{a}\} < +\infty.$$

El subgrup bca és també subreticle ja que si $m \in bca$ aleshores m^+, que és un element de ba, és a més σ-additiva en ordre, segons hem vist en 1.2.1. a). Finalment, de la caracterització de la σ-additivitat (1.1.6.) se'n segueix que bca és convex en ba i per tant un ℓ-grup c.c. ■

1.2.4. Exemples d'o-mesures o-afitades. Sigui $\mathcal{a}$ una σ-àlgebra de parts d'un conjunt X.

a) Sigui $(m_i)_{i \in I}$ una col.lecció de mesures reals $m_i : \mathcal{a} \to R$ σ-additives i per tant afitades. La o-mesura $m : \mathcal{a} \to R^I$, definida com en l'exemple 1.1.9., per $m(A) = (m_i(A))$ és o-afitada. A més $m^+(A) = (m_i^+(A))$, $m^-(A) = (m_i^-(A))$ i $|m|(A) = (|m_i|(A))$.

b) Sigui $f : X \to R$ una funció qualsevol. La funció de conjunt $m : \mathcal{a} \to R^X$ definida per $m(A) = f\varphi_A$ és una o-mesura o-afitada per a la qual $m^+(A) = f^+\varphi_A$, $m^-(A) = f^-\varphi_A$ i $|m|(A) = |f|\varphi_A$.

La Proposició 1.2.2. ès la que en definitiva ens permet obtenir una anàleg del teorema de descomposició de Jordan-Hahn per a les mesures valorades en ℓ-grups c.c.

1.2.5. Teorema (de Jordan-Hahn). Una mesura $m : \mathcal{a} \to G$ additiva, en un anell $\mathcal{a}$ de parts d'un conjunt X i valorada en un ℓ-grup c.c. G, és expressable com a diferència de dues mesures positives i finites si i només si és o-afitada. Si m és σ-additiva en ordre aleshores aquestes dues també ho són.

Demostració. Si $m = m_1 - m_2$ on les m_1, m_2 són mesures positives i finites, evidentment m és o-afitada. Recíprocament si m és o-afitada les mesures m^+ i m^- determinades en el ℓ-grup ba donen la descomposició de m desitjada. ■

1.2.6. Comentaris.

a) Aquest teorema inclou en particular el que donen Fayres i Morrison en [15] referent a la descomposició de les funcions additives $m:\mathcal{A} \to V$ en una àlgebra de Boole i a valors en un espai vectorial reticulat c.c. V, i que és obtinguda amb tècniques pròpies d'espais vectorials reticulats.

b) En el cas de mesures reals no finites $m:\mathcal{A} \to \bar{R}$, σ-additives en una σ-àlgebra, encara és possible donar un teorema de descomposició del tipus de Jordan-Hahn. És obligat preguntar-nos si en el nostre cas de mesures en ordre serà també possible.

Per a mesures reals aquesta descomposició s'obté via el conjunt de descomposició de Jordan; si D és tal conjunt per a la mesura m, aleshores $m^+(A)=m(AD)$ i $m^-(A)=-m(AD^c)$ són dues mesures positives, almenys una d'elles finita, que satisfan $m=m^+-m^-$. En primer lloc, la pretensió de trobar un conjunt de descomposició és vana en general, fins i tot quan es treballa amb mesures vectorials valorades en espais de Banach de dimensió finita, com mostra la següent

<u>1.2.7. Exemple d'una o-mesura sense conjunt de descomposició.</u>

Siguin $m_i:\mathcal{A} \to R$, i=1,2, dues mesures σ-additives en una σ-àlgebra $\mathcal{A}$. La funció de conjunt $m:\mathcal{A} \to R^2$ definida per $m(A)=(m_1(A),m_2(A))$ és una o-mesura, i una mesura en l'espai normat R^2, que no té conjunt de descomposició de Jordan.

Efectivament, si existís un tal conjunt D de manera que m fos positiva en D i negativa en D^c, aleshores m_1 i m_2 serien totes dues positives en D i negatives en D^c, fet que contradiu l'arbitrarietat de m_1 i m_2.

Exclosa la possibilitat d'obtenir la descomposició via el conjunt de Jordan, observi's que és possible expressar $m:\mathcal{A} \to \bar{G}$, additiva, com a diferència de dues additives i positives només si almenys una d'elles és finita ó, equivalentment, si almenys una de les dues mesures m^+ ó m^- és finita.

És ben sabut que per al teorema de descomposició de Jordan-Hahn en el camp de les mesures reals, és essencial treballar amb mesures σ-additives definides en σ-àlgebres. És a dir per a una mesura real m (finita o no) que no sigui σ-additiva ó, que essent-ho, no estigui definida en una σ-àlgebra, pot molt ben ser que m^+ i m^- siguin totes dues no finites. Per tant l'interès estarà en veure si per a una mesura m valorada en un ℓ-grup σ-additiva en ordre i definida en una σ-àlgebra és possible que m^+ i m^- siguin no finites. I així és com mostren els següents exemples:

<u>1.2.8. Exemple. Una o-mesura en una σ-àlgebra, no finita i no expressable com a diferència de dues o-mesures positives.</u> Sigui $\mathcal{a}$ una àlgebra finita. És també σ-àlgebra. Sigui $m_o : \mathcal{a} \to \bar{R}_+$ una mesura positiva no finita. La funció de conjunt

$$m : \mathcal{a} \to \bar{R}^2$$
$$A \to m(A) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } m_o(A) = +\infty \\ (m_o(A), -m_o(A)), & \text{si } m_o(A) < +\infty. \end{cases}$$

valorada en l'ampliat del ℓ-grup R^2 amb dos elements impropis $\pm\infty$ segons els convenis usuals és una o-mesura no finita, en una σ-àlgebra, per a la qual m^+ i m^- són no finites.

En efecte, és immediat que m és additiva i també σ-additiva en ordre ja que si $A_n \uparrow A$ en $\mathcal{a}$ ha de ser $A_n = A$ a partir d'un cert n_o i per tant $m(A_n) \overset{o}{\to} m(A)$, tant si $m(A) = +\infty$ com si $m(A) < +\infty$. A més

$$m^+(A) = \begin{cases} +\infty & , \quad \text{si } m_o(A) = +\infty, \\ (m_o(A), o) & , \quad \text{si } m_o(A) < +\infty, \end{cases}$$

i
$$m^-(A) = \begin{cases} +\infty & , \quad \text{si } m_o(A) = +\infty, \\ (0, m_o(A)) & , \quad \text{si } m_o(A) < +\infty. \end{cases}$$

Observi's que si $\mathcal{a}$ no fos àlgebra finita podria ser que m no fos σ-additiva en ordre car, si bé en el cas de ser $A_n \uparrow A$ i $m_o(A) < +\infty$ seria $m(A_n) \overset{o}{\to} m(A)$, en canvi si fos $m_o(A) = +\infty$ i $m_o(A_n) < +\infty$ per a cada $n \in N$, resultaria que $m(A_n) \overset{o}{\not\to} +\infty$. ■

c) Una conseqüència de l'existència del conjunt de descomposició de Jordan, per a una mesura real σ-additiva definida en una σ-àlgebra, és, via el teorema de descomposició de Jordan-Hahn, la propietat que tota mesura real σ-additiva en una σ-àlgerba finita és afitada.

Tots els exemples d' o-mesures finites definides en σ-àlgebres que hem considerat fins aquí són també o-afitades, però basta donar una ullada a la demostració directa d'aquesta propietat (per exemple en [13]) per adonar-se'n que depèn fortament de l'ordenació total de R, de manera que és previsible que, en substituir R per un ℓ-grup qualsevol, tal propietat ja no es satisfaci. I efectivament així és, com mostra el següent

<u>1.2.9. Exemple d'una o-mesura en una σ-àlgebra, finita i no o-afitada.</u> Siguin X un conjunt no numerable, $\mathcal{a}$ la σ-algebra numerable - conumerable en X i G el ℓ-grup c.c. de les funcions reals definides en X de suport numerable. La funció de conjunt $m:\mathcal{a} \to G$ definida per

$$m(A) = \begin{cases} \varphi_A \ , & \text{si A és numerable,} \\ -\varphi_{A^c} \ , & \text{si A és co-numerable.} \end{cases}$$

és una o-mesura no o-afitada.

Efectivament, com a funció de conjunt no està o-afitada car els singletons són elements de l'àlgebra pels quals $m(\{x\})=\delta_x$ i $\{\delta_x; x\in X\}$ no està o-afitat en G.

El que cal comprovar és que m és una O-mesura. Vegem que m es additiva: Siguin $A,B\in\mathcal{a}$ disjunts; cal veure que $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$.

A i B no poden ser tots dos conumerables car aleshores de $X=(AB)^c=A^c\cup B^c$ se'n seguiria que X és numerable. Per tant, o són tots dos numerables i aleshores $A\cup B$ també ho és i

$$m(A\cup B) = \varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B = m(A)+m(B),$$

o l'un és numerable, A, i l'altre és conumerable, B, de manera que $A\cup B$ és conumerable i es té

$$m(A\cup B) = -\varphi_{(A\cup B)^c} = -\varphi_{A^cB^c}$$

i $$m(A)+m(B)=\varphi_A-\varphi_B = -\varphi_{A^cB^c}$$

Pel que fa a la σ-additivitat, com que m és additiva i finita, bastarà provar que $m(A_n) \overset{o}{\to} 0$ cada vegada que $A_n \downarrow \emptyset$ en $\mathcal{a}$.

Considerem una successió $A_n \downarrow \emptyset$ en $\mathcal{a}$. No poden ser tots els conjunts conumerables car de $A_n^c \uparrow X$ se'n seguiria que X és numerable; per tant, al menys per a un n_o, A_{n_o} és numerable i aleshores ja ho són tots els A_n amb $n \geqslant n_o$, de manera que $m(A_n) = \varphi_{A_n}$. En conseqüència $m(A_n) \downarrow 0$, tal com voliem provar.

Naturalment si m no és o-afitada no es podrà posar com a diferència de dues o-mesures positives. De fet m^+ i m^- són totes dues no finites i de la Proposició 1.2.1. a) se'n dedueix que

$$m^+(A) = \varphi_A \quad \text{ i } \quad m^-(A) = 0, \qquad \text{pels A numerables}$$

$$\text{i} \qquad m^+(A) = m^-(A) = +\infty, \qquad \text{pels A conumerables.} \quad \blacksquare$$

3. VARIACIÓ EN ORDRE.

Per analogia amb el cas de mesures additives escalars o valorades en espais de Banach podem definir la "variació" (total) de mesures en ℓ-grups que, pel fet de dependre de l'estructura ordenada, en direm variació en ordre o més senzillament o-variació. Podem també definir la semivariació en ordre.

Sigui $m: \mathcal{a} \to \bar{G}$ una funció de conjunt definida en un anell de parts d'un conjunt X, $\bar{G}$ l'ampliat d'un ℓ-grup c.c. G amb dos elements impropis $\pm\infty$. Per a cada $A \in \mathcal{a}$, D(A) designa el conjunt de les particions finites de A en $\mathcal{a}$.

1.3.1. Definició. Anomenem variació en ordre de m o o-variació de m la funció de conjunt $V_o(m): \mathcal{a} \to \bar{G}$ definida per

$$V_o(m)(A) = \bigvee \{ \Sigma |m(A_i)| ; \{A_i\} \in D(A) \}$$

i semivariació en ordre de m o o-semivariació de m la funció de conjunt $\|m\|_o : \mathcal{a} \to \bar{G}$ definida per

$$\|m\|_o(A) = \bigvee \{ |m(B)| ; B \subseteq A, B \in \mathcal{a} \}$$

Observi's que en suposar que G és c.c. aquestes funcions estan definides en $\mathcal{a}$ i són positives i creixents. D'altra banda quan G és el cos dels nombres reals la o-variació és la variació total usual. Com en el cas de mesures reals o vectorials la o-variació d'una mesura additiva és també additiva. Precisant, tenim la següent

<u>1.3.2. Proposició.</u> Si $m:\mathcal{a}\to\bar{G}$ és additiva aleshores la o-variació $V_o(m)$ coincideix amb la mesura $|m|=m\vee(-m)$ determinada per m en el conjunt de les mesures additives $a = a(\mathcal{a};\bar{G})$.

Demostració. Vegem en primer lloc que $V_o(m)$ és additiva. Siguin $A,B\in\mathcal{a}$ tals que $AB=\emptyset$; cal veure que $V_o(A\cup B)=V_o(A)+V_o(B)$ (escriurem $V_o(A)$ en lloc de $V_o(m)(A)$ sempre que la referència a m sigui clara). Si $\{A_i\}\in D(A)$ i $\{B_j\}\in D(B)$, aleshores $\{A_i\}\cup\{B_j\}\in D(A\cup B)$, de manera que

$$\Sigma|m(A_i)| + \Sigma|m(B_j)| \leqslant V_o(A\cup B),$$

i per tant $V_o(A) + V_o(B)\leqslant V_o(A\cup B)$. Pel que fa a la desigualtat en l'altre sentit, si $V_o(A) + V_o(B) = +\infty$ no hi ha res a dir. En cas contrari, prenguem una partició $\{C_i\}\in D(A\cup B)$; aleshores, si $A_i = AC_i$ i $B_i=BC_i$, resulta que $\{A_i\}\in D(A)$ i $\{B_i\}\in D(B)$, de manera que

$$\Sigma|m(C_i)| = \Sigma|m(A_i)+m(B_i)| \leqslant \Sigma|m(A_i)|+ \Sigma|m(B_i)| \leqslant V_o(A)+ + V_o(B),$$

d'on $V_o(A\cup B) \leqslant V_o(A) + V_o(B)$, tal com voliem veure.

$V_o(m)$ és, doncs, un element de a que majora, com se segueix de la seva definició, a m i a -m. Però si $n\in a$ és tal que $n\geqslant m$ i $n\geqslant -m$ aleshores, per a cada $A\in\mathcal{a}$ i $\{A_i\}\in D(A)$, es té $\Sigma|m(A_i)|\leqslant \leqslant\Sigma n(A_i) = n(A)$ i per tant $V_o(A)\leqslant n(A)$. En definitiva, $V_o(m)=m\vee(-m)= =|m|$. ∎

Conseqüència d'aquesta identificació entre la o-variació d'una o-mesura m i el seu valor absolut $|m|$, n'és la següent caracterització de les mesures additives o-afitades, que generalitzarà la ja coneguda, vàlida per a mesures escalars (reals o complexes):

1.3.3. Corol.lari. Una mesura m: $\to$ G additiva és o-afitada si i només si la seva o-variació $V_o(m)$ és finita.

Observi's que amb la darrera proposició retrobem un dels resultats obtinguts en 1.2.1. a).

Donem a continuació un recull de les propietats derivades del que hem dit fins ara o directament de la definició de $V_o(m)$ i $\|m\|_o$:

1.3.4. Proposició. Sigui $m:\mathcal{a} \to \bar{G}$ una funció de conjunt en un anell de parts d'un conjunt; G un ℓ-grup c.c. Aleshores:

a) $V_o(m)$ i $\|m\|_o$ són positives i creixents;

b) $|m(A)| \leqslant \|m\|_o(A) \leqslant V_o(m)(A)$, per a cada $A\in\mathcal{a}$;

c) $m\geqslant 0 \Rightarrow \|m\|_o = V_o(m) = m$;

d) m additiva (σ-additiva en ordre) $\Rightarrow \|m\|_o$ subadditiva (σ-subadditiva en ordre).

e) m additiva (σ-additiva en ordre) $\Rightarrow V_o(m)$ additiva (σ-additiva en ordre),

f) m additiva $\Rightarrow V_o(m)(A) \leqslant 2\ \|m\|_o(A)$, per a cada $A\in\mathcal{a}$.

Demostració. a), b) i c) són immediates. La proposició anterior ens dóna f) ja que, essent $V_o(m) = |m|$, és

$$V_o(m)(A) = m^+(A) + m^-(A) = \bigvee_{B\subseteq A} m(B) + \bigvee_{C\subseteq A} \{-m(C)\} \leqslant \|m\|_o(A) + \|m\|_o(B),$$

i també e) ja que quan m és σ-additiva en ordre $|m|$ també ho és (Proposició 1.2.1. a)).

Falta provar d). Suposem m additiva i siguin $A,B\in\mathcal{a}$ disjunts; cal veure que $\|m\|_o(A\cup B) \leqslant \|m\|_o(A) + \|m\|_o(B)$. Si $\|m\|_o(A)+\|m\|_o(B)=+\infty$ no hi ha res a provar; en cas contrari considerem un conjunt $C\subseteq A\cup B$: de l'additivitat de m en resulta

$$|m(C)| = |m(A\cap C)+m(B\cap C)| \leqslant |m(A\cap C)| + |m(B\cap C)| \leqslant \|m\|_o(A)+\|m\|_o(B)$$

d'on, prenent suprem sobre els $C\subseteq B\cup A$, se'n dedueix que $\|m\|_o(A\cup B) \leqslant \|m\|_o(A) + \|m\|_o(B)$.

D'una manera semblant, de la σ-additivitat de m se segueix la σ-subadditivitat de $\|m\|_o$. En efecte, sigui $\{A_n\}\subset \mathcal{a}$ una successió de conjunts mútuament disjunts, tal que $A=\bigcup A_n \in \mathcal{a}$; cal veure que $\|m\|_o(A) \leqslant o\text{-}\Sigma \|m\|_o(A_n)$. Si $o\text{-}\Sigma \|m\|_o(A_n)=+\infty$ no hi ha res a dir; en cas contrari, donat un conjunt $C\in\mathcal{a}$ tal que $C\subset A$, per la σ-additivitat en ordre de m i per les Proposicions 0.4.3 a) i 0.4.5. podem escriure

$$|m(C)|=|o\text{-}\Sigma\, m(A_nC)| \leqslant o\text{-}\Sigma\, |m(A_nC)| \leqslant o\text{-}\Sigma \|m\|_o(A_n),$$

d'on en deduïm $\|m\|_o(A) \leqslant o\text{-}\Sigma \|m\|_o(A_n)$. ■

4. CONVERGÈNCIA DE MESURES. EL ℓ-GRUP G-NORMAT $ba(\mathcal{a};G)$.

Quan es treballa amb mesures additives, reals o valorades en un espai de Banach E, afitades, la convergència uniforme de mesures sobre l'àlgebra $\mathcal{a}$ on estan definides és normable amb la norma del suprem

$$\|m\| = \sup\{\|m(A)\|;\ A\in\mathcal{a}\} \quad , \quad m\in ba(\mathcal{a};E)$$

de manera que $(ba(\mathcal{a};E),\|\ \|)$ és un espai de Banach en el qual el subespai de les mesures que són σ-additives és tancat.

Quan la dimensió de l'espai és finita, les mesures afitades són les que tenen variació total finita, de manera, que, la norma del suprem és equivalent a la norma derivada de la variació total posant

$$q(m) = V(m)(X)$$

on V(m) designa la variació total de m i X és el conjunt sobre el qual considerem l'algebra $\mathcal{a}$.

En forma anàloga la o-convergència uniforme de mesures additives i 0-afitades valorades en un ℓ-grup c.c. G serà "normable" per la G-norma generalitzada $\|\ \|_o : ba(\mathcal{a};G) \to G_+$ definida posant

$$\|m\|_o = \vee\,\{|m(A)|;\ A\in\mathcal{a}\}$$

en el sentit que la o-convergència uniforme de mesures és equivalent a la $\|\ \|_o$-convergència. És clar que, de les desigualtats

$$\|m\|_o \leq |m|\ (X) \leq 2\|m\|_o$$

se'n segueix que, a la vegada, la $\|\ \|_o$-convergència és equivalent a la convergència segons la G-norma generalitzada $q:ba(\mathcal{a},G) \to G_+$, definida a partir de la -variació, posant

$$q(m) = |m|\ (X).$$

En aquest apartat veurem que $(ba, \|\ \|_o)$ ó equivalentment (ba,q) és un espai G-normat generalitzat complet, com en el cas real o vectorial, però en canvi bca, que és un subgrup sòlid de ba, sembla que en general no és $\|\ \|_o$-tancat en ba a menys que G satisfaci certes condicions. Una condició suficient és que la o-convergència en G tingui la propietat diagonal. Abans de tractar aquesta qüestió, analitzem la conservació de l'additivitat i més especialment de la σ-additivitat en ordre en el pas al límit, puntual, uniforme i en ordre, de successions o xarxes de mesures additives i σ-additives en ordre.

En tot el que segueix $\{m_i\}_{i\in I}$ designarà una xarxa de mesures $m_i:\mathcal{a} \to \bar{G}$ additives en una àlgebra $\mathcal{a}$ de parts d'un conjunt X; G un ℓ-grup c.c.

a) Límit puntual i o-convergència.

Si per a cada $A\in\mathcal{a}$ existeix $m(A)=o\text{-}\lim m_i(A)$, queda definida una funció de conjunt $m:\mathcal{a} \to \bar{G}$ que serà també additiva, vista la compatibilitat de la suma amb el pas al o-limit. Direm que m és el límit puntual de $\{m_i\}_{i\in I}$ i escriurem $m_i \xrightarrow{p} m$. En el cas d'una xarxa monòtona, el límit puntual sempre existeix i és la mesura additiva suprem o ínfim, segons sigui creixent o decreixent, dels elements de la xarxa.

En general la σ-additivitat ja no serà compatible amb el pas al límit puntual però, amb certes restriccions, encara és possible dir-ne alguna cosa. Tenim:

<u>1.4.1. Proposició.</u> Si $m_i \overset{p}{\uparrow} m$, m és positiva i les m_i són o-mesures aleshores m és també una o-mesura.

En efecte. Suposem les m_i σ-additives en ordre i $m \geqslant 0$; volem veure que m és també σ-additiva. Com que m és additiva bastarà provar que $m(A_n) \overset{o}{\to} m(A)$ cada vegada que $A_n \uparrow A$ en $\mathcal{a}$ ó, equivalentment, que $m(A) = \vee m(A_n)$.

Sigui $A_n \uparrow A$ en $\mathcal{a}$. De $m_i \leqslant m$ i $m \geqslant 0$ tenim

$$m_i(A_n) \leqslant m(A_n) \leqslant m(A)$$

d'on, essent les m_i σ-additives,

$$m_i(A) = o\text{-}\lim_n m_i(A_n) \leqslant o\text{-}\lim_n m(A_n) = \vee m(A_n) \leqslant m(A),$$

i finalment

$$m(A) = \vee m_i(A) \leqslant \vee m(A_n) \leqslant m(A). \quad \blacksquare$$

En cas de considerar mesures finites no cal que el límit m sigui positiu ni que la xarxa sigui creixent, és a dir,

<u>1.4.2. Proposició.</u> Si $\{m_i\}_{i \in I}$ és una xarxa monòtona d' o-mesures finites i existeix $m(A) = o\text{-}\lim m_i(A)$ i és finit, per a cada $A \in \mathcal{a}$, aleshores m és també una o-mesura finita.

Demostració. Suposem primer que la xarxa $\{m_i\}_{i \in I}$ és monòtona creixent: $m_i \overset{o}{\uparrow} m$. Aleshores per a un índex $i_o \in I$ qualsevol tenim $m = \bigvee_{i \geqslant i_o} m_i$. Posem, per a cada $i \geqslant i_o$, $n_i = m_i - m_{i_o}$. $\{n_i\}_{i \geqslant i_o}$ és una xarxa monòtona creixent de mesures finites, positives i σ-additives en ordre tals que $n_i \overset{p}{\uparrow} n$, amb $n = \vee n_i = m - m_{i_o}$, de manera que, per la proposició anterior, n resulta ser σ-additiva en ordre i per tant també la mesura $m = n + m_{i_o}$.

Ara és clar que si $\{m_i\}_{i \in I}$ es decreixent i $m_i \overset{p}{\downarrow} m$, és $-m_i \overset{p}{\uparrow} -m$ i per tant m és també σ-additiva en ordre. $\blacksquare$

D'aquesta proposició en podem derivar un anàleg del teorema de descomposició que diu que tota mesura real additiva és expressable de forma única com a suma d'una mesura σ-additiva i d'una purament additiva.

Si diem, com en el cas real, que una mesura additiva $m:\mathcal{a} \to G$ és <u>purament additiva</u> si de

$$0 \leqslant n \leqslant m \quad \text{i} \quad n \in ca(\mathcal{a};G)$$

se'n segueix que $n=0$, tenim el següent

<u>1.4.3. Teorema.</u> Tota mesura $m\in ba$ admet una única expressió de la forma $m=m_c + m_a$, on $m_c \in bca$ i $m_a \in ba$ és purament additiva. A més m_c i m_a són ortogonals ($|m_c| \wedge |m_a| = 0$).

Demostració. De la Proposició 1.4.2. se'n deriva que <u>bca és una banda de ba.</u> En efecte, com que bca és un subgrup sòlid de ba, segons hem vist en 1.2.3, és suficient provar que de $0 \leqslant m_i \uparrow m$, on $m_i \in bca$ i $m \in ba$, se'n segueix que $m \in bca$ (la demostració d'aquesta propietat per a espais de Riesz (en [23] , per exemple) val també per a ℓ-grups), i això és el que assegura1.4.2.

I com que ba és un ℓ-grup c.c. el subgrup sòlid bca serà un sumand directe de ba, és a dir, $ba = bca \oplus (bca)^{\perp}$, de manera que tota mesura $m\in ba$ serà expressable de forma única com suma d'un element $m_c \in bca$ i d'un element $m_a \in (bca)^{\perp}$. Ara bé, els elements de $(bca)^{\perp}$ són els que hem anomenat mesures purament additives; efectivament, si $m \in (bca)^{\perp}$, de $0 \leqslant n \leqslant |m|$ i $n \in bca$ se'n segueix que $n = n \wedge |m| = 0$, i per tant m és purament additiva. Recíprocament, si m és purament additiva i $n \in bca$ es té que $|n| \wedge |m| \in bca$, perquè bca és sòlid en ba, i per tant $|n| \wedge |m| = 0$, és a dir, $m \in (bca)^{\perp}$. ∎

D'altra banda, com que pels subgrups sòlids s'un ℓ-grup ser banda és equivalent a ser estable pel o-límit de xarxes, podem obtenir finalment la següent

<u>1.4.4. Proposició.</u> En el ℓ-grup $ba(\mathcal{a};G)$ el o-límit d'una xarxa d' o-mesures és també una o-mesura, es a dir $bca(\mathcal{a};G)$ és un T_o-tancat en $ba(\mathcal{a};G)$.

b) Convergència uniforme.

Sigui $\{m_i\}_{i\in I}\subset ba$ una xarxa de mesures tal que $m_i \overset{o}{\to} m$ cap a una mesura $m\in ba$. Aleshores existeixen una xarxa monòtona decreixent $\delta_i \downarrow 0$ de mesures $\delta_i \in ba$ i un índex $i_o \in I$ de manera que $|m-m_i|\leqslant\delta_i$, per a tots els $i\geqslant i_o$. Per tant

$$|m(A)-m_i(A)| \leqslant \delta_i(A) \leqslant \delta_i(X), \text{ per a cada } A\in\mathcal{a} \text{ i } i\geqslant i_o.$$

Ara bé $\delta_i(X)\downarrow 0$, en G, i per tant $m_i \overset{p}{\to} m$; però la convergència és més que puntual:

En general si $\{m_i\}_{i\in I}\subset ba$ i $m\in ba$ i existeixen una xarxa $\delta_i \downarrow 0$, en G, i un índex $i_o\in I$ de manera que

$$|m_i(A)-m(A)| \leqslant\delta_i, \text{ per a cada } A\in\mathcal{a} \text{ i } i\geqslant i_o,$$

direm que m és el límit uniforme de les mesures $\{m_i\}_{i\in I}$ ó que $\{m_i\}_{i\in I}$ convergeix uniformement en $\mathcal{a}$ cap a m i escriurem $m_i \overset{u}{\to} m$.

La o-convergència implica per tant la convergència uniforme.

Així com el o-límit de mesures σ-additives és també σ-additiu sembla ser que límit uniforme de mesures σ-additives no ho hagi de ser a menys de satisfer-se alguna condició restrictiva. Així tenim:

1.4.5. Proposició. El límit uniforme d'una xarxa d'o-mesures uniformement σ-additives es una o-mesura.

Demostració: Siguin $\{m_i\}_{i\in I}\subset bca$ i $m\in ba$ tals que $m_i \overset{u}{\to} m$, i suposem que per a cada successió $A_n\downarrow\emptyset$ en $\mathcal{a}$ el o-lim $m_i(A_n)=0$ es uniforme respecte de les m_i.

Volem veure que $m\in ba$. Com que m és additiva bastarà provar que o-lim $m(A_n)=0$, per a qualsevol successió $A_n\downarrow\emptyset$ en $\mathcal{a}$.

Sigui $a_i\downarrow 0$ tal que, per a un cert $i_o\in I$, es compleixi

$$|m_i(A_n) - m_i(A)| \leqslant a_i \quad \text{per a tot } i\geqslant i_o \text{ i } A\in\mathcal{a},$$

i $b_n\downarrow 0$ tal que, per a totes les mesures m_i, sigui

$$|m_i(A_n)| \leq b_n \text{ , per a tot } n\in N.$$

Aleshores se satisfà:

$$|m(A_n)| \leq |m(A_n)-m_i(A_n)|+|m_i(A_n)| \leq a_i+b_n, \text{ per a cada } i\geq i_o \text{ i } n\in N,$$

d'on

$$|m(A_n)| \leq \Lambda\, a_i+ b_n = b_n\downarrow 0,$$

és a dir, o-lim $m(A_n) = 0$, tal com voliem provar. ■

La condició de σ-additivitat uniforme pot suprimir-se si en G la o-convergència té la propietat diagonal:

<u>1.4.6. Proposició.</u> Si en G la o-convergència té la propietat diagonal, el límit uniforme de xarxes d'o-mesures es una o-mesura. Si només la té per a successions la conclusió és vàlida per al límit uniforme de successions.

Demostració. Sigui $\{m_i\}_{i\in I}$ una xarxa de mesures $m_i\in bca(\mathcal{a};G)$ tal que $m_i \xrightarrow{u} m$, on $m\in ba$. Hem de veure que $m\in bca$. Bastarà provar que, si $A_n\downarrow\emptyset$ en $\mathcal{a}$, aleshores o-lim $m(A_n)=0$. Podem escriure

$$0 \leq |m(A_n)|\leq |m(A_n)-m_i(A_n)|+|m_i(A_n)|.$$

Ara bé, per a una certa xarxa $\delta_i\downarrow 0$ en G i un índex $i_o\in I$ és

$$|m(A_n)-m_i(A_n)| \leq \delta_i, \text{ per a tots els } i \geq i_o \text{ i } n\in N.$$

També, per a cada $i\in I$, existeix una successió $a_n^i\downarrow 0$ tal que

$$0\leq |m_i(A_n)| \leq a_n^i, \quad \text{per a tots els } n\in N,$$

ja que les mesures m_i són σ-additives en ordre. Aleshores, per la propietat diagonal de la o-convergència per a xarxes, existirà un subconjunt I' cofinal en I, de manera que per a cada $i\in I'$ hi haurà al menys un índex $n=n(i)$ tal que

$$b_i= a^i_{n(i)} \xrightarrow{o} 0.$$

Tindrem doncs que

$$0 \leqslant |m(A_n)| \leqslant \delta_i + a_n^i \leqslant \delta_i + b_i = \gamma_i, \text{ per a tot } i \in I' \text{ amb } i \geqslant i_o \text{ i } n \geqslant n(i),$$

on $\gamma_i \downarrow 0$. Per tant, per a cada $i \in I'$ tal que $i \geqslant i_o$ es té

$$o\text{-}\overline{\lim}\ m(A_n) = \bigwedge_n \bigvee_{k \geqslant n} m(A_k) \leqslant \bigvee_{k \geqslant n(i)} m(A_k) \leqslant \gamma_i$$

i

$$o\text{-}\underline{\lim}\ m(A_n) = \bigvee_n \bigwedge_{k \geqslant n} m(A_k) \geqslant \bigwedge_{k \geqslant n(i)} m(A_k) \geqslant -\gamma_i,$$

d'on en deduïm que existeix o-lim $m(A_n)$ i és 0, tal com voliem provar.

Quant a la segona afirmació, la demostració és anàloga. ∎

Finalment, si considerem la convergència de mesures de $ba(\mathcal{a};G)$ segons la norma generalitzada $\|\ \|_o$, introduïda al principi d'aquest apartat, obtenim, respecte a la topologia derivada d'aquesta convergència, el següent

1.4.7. Teorema. El ℓ-grup $ba(\mathcal{a};G)$ és un ℓ-grup G-normat complet amb la G-norma $\|\ \|_o$ definida per $\|m\|_o = \bigvee\{|m(A)|;A \in \mathcal{a}\}$.

Si la o-convergència en el ℓ-grup G té la propietat diagonal per a successions aleshores bca és un subgrup sòlid que és tancat de la topologia $T^{\sigma}_{\|\ \|_o}$. Si la té per a xarxes aleshores és un tancat de la $T_{\|\ \|_o}$.

Demostració. Tenint en compte que la $\|\ \|_o$-convergència i la o-convergència uniforme són equivalents, la segona part del teorema ve donada per 1.4.6. i 1.2.3. Vegem que ba es $\|\ \|_o$-complet, amb la qual cosa quedarà demostrat el teorema.

Sigui $\{m_i\}_{i \in I}$ una xarxa $\|\ \|_o$-fonamental; cal provar que és $\|\ \|_o$-convergent cap a una certa mesura $m \in ba$.

Sigui $\delta_i \downarrow 0$ una xarxa tal que, per a un cert $i_o \in I$ es compleixi

$$\|m_i - m_j\|_o \leqslant \delta_i, \text{ per a cada } j \geqslant i \text{ i } i \geqslant i_o.$$

Aleshores, per a cada $A\in\mathcal{a}$, és

$$|m_i(A)-m_j(A)| \leqslant \delta_i, \text{ per a cada } j\geqslant i \text{ i } i\geqslant i_o,$$

la qual cosa significa que $\{m_i(A)\}_{i\in I}$ és una xarxa o-fonamental en G. Essent G c.c. existirà el o-lim $m_i(A)$. Posem

$$m(A) = \text{o-lim } m_i(A),$$

i vegem que, així definida, m és un element de ba i que $m_i \xrightarrow{\|\|_o} m$. Com que m és el límit puntual de les m_i, és additiva. També es o-afitada ja que

$$|m_i(A)| \leqslant \|m_i\|_o, \quad \text{per a cada } i\in I,$$

i $\{m_i\}$ es $\|\|_o$-fonamental. Falta veure que $m_i \xrightarrow{\|\|_o} m$, o equivalentment que $m_i \xrightarrow{u} m$. Ara bé, de $m(A)=\text{o-lim } m_j(A)$ i

$$|m_i(A)-mj(A)| \leqslant \delta_i \quad \text{per a cada } j\geqslant i,\ i\geqslant i_o \text{ i} A\in\mathcal{a}$$

se'n segueix que

$$|m_i(A)-m(A)| \leqslant \delta_i \quad \text{per a cada } i\geqslant i_o \text{ i } A\in\mathcal{a},$$

es a dir, que $m_i \xrightarrow{u} m$. ■

5. MESURES m-CONTÍNUES I m-SINGULARS. TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓ DE LEBESGUE PER A o-MESURES.

1.5.1. Definició. Sigui $m:\mathcal{a}\to\bar{G}$ una mesura additiva sobre una àlgebra $\mathcal{a}$ de parts d'un conjunt X i valorada en l'ampliat d'un ℓ-grup c.c. G.

Direm que una mesura $m:\mathcal{a}\to\bar{G}$ és m-contínua, i escriurem, $\ell<<m$, si $\ell(A)=0$ cada vegada que $|m|(A)=0$. Direm que ℓ és seqüencialment m-contínua, i escriurem $\ell\underset{s}{<<} m$ si

$$\underset{|m|(A)\overset{o}{\to}0}{\text{o-lim}}\ \ell(A) = 0$$

en el sentit que o-lim $\ell(A_n)=0$ cada vegada que o-lim$|m|(A_n)=0$.

Direm que ℓ és m-singular si existeix un conjunt $A_o \in \mathcal{a}$ de manera que $|m|(A_o) = 0$ i $\ell(A)=\ell(AA_o)$ per a cada $A\in \mathcal{a}$.

De les definicions es dedueix de forma immediata que l'única mesura m-singular i m-contínua (ó sequencialment m-contínua) és la mesura nul.la.

Evidentment $\ell \underset{s}{<<} m \Rightarrow \ell<<m$. És sabut que si $G=\mathbb{R}$ aleshores les dues definicions són equivalents sempre que ℓ sigui finita, n i m siguin σ-additives i $\mathcal{a}$ sigui σ-àlgebra. La demostració (per exemple en [13]) es basa en la formulació ε-δ del límit. Podem conjecturar per tant que en un ℓ-grup G en general no serà vàlida l'equivalència. Si bé fins el moment no coneixem cap contraexemple, seria interessant haver-ne algun.

En les proposicions que segueixen hi ha recollides algunes propietats de les mesures singulars i contínues respecte a una certa mesura prefixada m.

1.5.2. Lema. Són equivalents

a) Existeix un conjunt $A_o \in \mathcal{a}$ tal que $|m|(A_o)=0$ i $\ell(A)=\ell(AA_o)$ per a tots els $A\in\mathcal{a}$.

b) Existeixen dos conjunts disjunts $A,B\in\mathcal{a}$ tals que $A\cup B=X$ i $|m|(A) = |\ell|(B)=0$.

En efecte:

a) $\Rightarrow$ b): Prenguem $A=A_o$ i $B=B_o^c$. Només cal veure que $|\ell|(B)=0$

$$|\ell|(B) = \bigvee_{C\subseteq B} |\ell(C)| = \bigvee_{C\subseteq A_o^c} |\ell(CA_o)| = 0$$

b) $\Rightarrow$ a): Prenguem $A=A_o$. Aleshores per a cada $C\in\mathcal{a}$ és

$$\ell(A) = \ell(AA_o)+\ell(AA_o^c)=\ell(AA_o), \text{ ja que } |\ell(AA_o^c)| \leq |\ell|(A_o^c) = 0. \blacksquare$$

1.5.3. Proposició. Siguin $\ell,m,n:\mathcal{a}\to \bar{G}$ mesures additives en una àlgebra $\mathcal{a}$.

a) Si ℓ i n són m-singulars i està definida la mesura $\ell+n$ aleshores aquesta és m-singular.

b) Si ℓ és m-singular aleshores les mesures ℓ^+,ℓ^- i $|\ell|$ són també m-singulars.

c) Les mesures m-singulars en ba$(a;G)$ constitueixen un subgrup sò lid.

Demostració.

a) Siguin $A,A',B,B'\in a$ tals que

$$A\ A' = \emptyset,\quad A\cup A' = X,\quad |m|(A)=0 \quad i \quad |\ell|(A') = 0;$$

i
$$B\ B' = \emptyset,\quad B\cup B' = X,\quad |m|(B)=0 \quad i \quad |n|(B') = 0.$$

Aleshores si $C=A\ \ B$ $|m|(C)=0$ i per a $C'=C^c$, en cas d'estar definida la mesura $n+\ell$ és

$$0 \leqslant |n+\ell|(C') = (|n|+|\ell|)(C') \leqslant |n|(B') + |\ell|(A')=0$$

b) De la definició de m-singular i del lema anterior en resulta de forma immediata que ℓ_- és m-singular si i només si $|\ell|$ ho és. Així mateix de $0\leqslant|n|\leqslant|\ell|$ i ℓ m-singular se'n segueix que n és m-singular. En conseqüència ℓ^+ i ℓ^- també ho són.

En particular si considerem les mesures m-singulars en ba resulta, d'això que diem, que constitueixen un subgrup subreticula i convex, quedant provat per tant c). ∎

<u>1.5.4. Proposició.</u> Siguin $\ell,m,n:a\to\bar{G}$ mesures additives en una àlgebra a.

a) Si ℓ i n són seqüencialment m-contínues i està definida la mesura $\ell+m$ aleshores aquesta també és seqüencialment m-contínua.

b) Si ℓ és m-contínua aleshores també ho són ℓ^+,ℓ^- i $|\ell|$.

c) Les mesures m-contínues de ba$(a;G)$ (resp. bca$(a;G)$) constitueixen una banda en ba$(a;G)$ (resp. bca$(a;G)$).

Demostració:

a) De $(\ell+n)(A)=\ell(A)+n(A)$ i $\ell,n \ll_s m$ se'n segueix que si $|m|(A_n)\overset{\circ}{\to}0$ aleshores $(\ell+n)(A_n)\overset{\circ}{\to}0$ i, per tant, que $\ell+n \ll_s m$.

b) Si $\ell\ll m$, de

$$\ell^{+}(A)=\bigvee_{B\subseteq A}\ell(B)\,,\quad \ell^{-}(A)=-\bigwedge_{B\subseteq A}\ell(B)\quad \text{i}\quad |\ell|=\ell^{+}+\ell^{-},$$

se'n segueix que si $|m|(A)=0$, aleshores $\ell^{+}(A)=\ell^{-}(A)=|\ell|(A)=0$, ja que serà $\ell(B)=0$ per a tots els $B\subseteq A$. Es a dir, ℓ^{+},ℓ^{-} i $|\ell|$ són m-contínues.

c) De les parts a) i b) i del fet que en el ℓ-grup ba se satisfan les igualtats $\ell\vee n=\ell+(n-\ell)^{+}$ i $\ell\wedge n=\ell-(n-\ell)^{-}$, se'n segueix que les mesures m-contínues en ba$(\mathcal{a};G)$ constitueixen un subgrup subreticular que és a més convex, ja que de $0\leqslant|n|\leqslant\ell$ i $\ell\ll m$ se'n dedueix que $|n|(A)=0$ sempre que $|m|(A)=0$, i per tant que $n\ll m$. Vegem finalment que és una banda en ba$(\mathcal{a};G)$. Basta veure que si $0\leqslant\ell_i\uparrow\ell$, on les ℓ_i són mesures m-contínues i $\ell\in$ba$(\mathcal{a};G)$, aleshores ℓ és m-contínua. Ara bé, com que per a cada $A\in\mathcal{a}$ és $\ell(A)=\bigvee\ell_i(A)$, resulta que si $|m|(A)=0$, aleshores és $\ell_i(A)=0$ per a cada $i\in I$ i per tant $\ell(A)=0$. És a dir ℓ és m-contínua.

Pel que fa a l'afirmació relativa a bca$(\mathcal{a};G)$, només cal recordar que bca$(\mathcal{a};G)$ es banda i que la intersecció de bandes és una banda. ∎

Designem per ba_{mc} la banda de les mesures m-contínues en ba. Del fet que ba és un ℓ-grup c.c. se'n segueix que ba_{mc} és un sumand directe de ba, és a dir, que $\text{ba}=\text{ba}_{mc}+(\text{ba}_{mc})^{\perp}$. Anàlogament ocorre amb la banda bca_{mc} de les o-mesures o-afitades m-contínues dins bca, de manera que pot enunciar-se el següent

1.5.5. Teorema. Sigui $m:\mathcal{a}\to G$ una mesura definida en una àlgebra $\mathcal{a}$. Tota mesura o-afitada $\ell:\mathcal{a}\to G$ és expressable de forma única com una suma de dues mesures o-afitades, $\ell=\ell_m+\ell_s$, on ℓ_m és m-contínua i $|\ell_s|$ és tal que $|\ell_s|\wedge|n|=0$, per a tota mesura o-afitada i m-contínua $n:\mathcal{a}\to G$. A més, si ℓ és σ-additiva en ordre, aleshores ℓ_m i ℓ_s són també σ-additives en ordre.

En el cas que $G=\mathbb{R}$ i m és σ-additiva en una σ-àlgebra $\mathcal{a}$, aquest teorema dóna el teorema de descomposició de Lebesgue segons el qual tota mesura σ-additiva és expressable de forma única com a suma d'una mesura m-contínua i d'una mesura m-singular. La clau estar en provar que l'ortogonal de bca_{mc} dins bca coincideix amb el subgrup de les mesures σ-additives i m-singulars. En un sen tit la inclusió és clara: les mesures m-singulars són de l'ortogonal de bca_{mc} i això encara és cert entre mesures σ-additives en ordre, segons hem observat al principi. L'altra inclusió és la problemàtica. De fet, en el cas de mesures reals, aquesta inclusió s'obté mitjançant la consideració del conjunt de descomposició de Jordan associat a una mesura. Com ja hem dit [Exemple 1.2.7], entre mesures valorades en ℓ-grups, aquest conjunt en general no existeix i per tant no ens serà possible, per un cam' anàleg, obtenir tal inclusió.

Queda com a problema obert la qüestió de si en general el subgrup de les o-mesures m-singulars coincideix o no amb l'ortogonal de bca_{mc} dins bca. El teorema que segueix, que proporciona una descomposició del tipus de Lebesgue, ens dóna indirectament també resposta a la qüestió plantejada, en el cas especial que G és <u>super condicionalment complet</u> ([1],[23]): Recordi's que un ℓ-grup G és <u>ordre-separable</u> quan per a cada conjunt $D \subset G$ pel qual existeix el suprem hi ha un subconjunt $D' \subset D$ numerable amb el mateix suprem de D. Un ℓ-grup c.c. i ordre separable rep el nom de ℓ-grup super condicionalment complet.

<u>1.5.6. Teorema.</u> (Teorema de descomposició de Lebesgue). Sigui $m:\mathcal{a} \to \bar{G}$ una o-mesura definida en una σ-àlgebra $\mathcal{a}$; G un ℓ-grup super condicionalment complet. Tota o-mesura o-afitada $\ell:\mathcal{a} \to G$ és expressable en la forma $\ell = \ell_m + \ell_s$ on ℓ_m és m-contínua i ℓ_s és m-singular. A més, ℓ_s i ℓ_m són les úniques o-mesures o-afitades amb aquesta propietat.

Demostració:

Suposem primer $\ell \geq 0$. Considerem el σ-ideal

$$N_m = \{ A \in \mathcal{a};\ |m|(A) = 0 \}$$

i en ell la relació d'ordre $\precsim$ definida per

$$A \precsim B \Leftrightarrow \ell(A) \leqslant \ell(B).$$

Es tracta de provar que en $(N_m, \precsim)$ hi ha elements maximals i per a tal fi ens basarem en el Lema de Zorn.

Sigui N_o una cadena en $(N_m, \precsim)$ i sigui $a = \vee\{\ell(A);\ A\in N_o\}$. Essent G c.c. i ℓ σ-afitada aquest element a és de G. Aleshores poden donar-se dos cassos:

a) o bé existeix un $A_o \in N_o$ tal que $\ell(A_o) = a$ i per tant $A_o \precsim B$ per a tot altre $B \in N_o$.

b) o bé, si no es així, existeix un subconjunt numerable $\{A_n; n\in \mathbb{N}\} \subset$ $\subset N_o$ amb la propietat

$$a = \vee\ \ell(A_n).$$

Aleshores, si $A_o = \cup A_n$ resulta que $A \in N_m$. A més és una fita superior de N_o car, en ser $\ell \geqslant 0$, tindrem $\ell(A_o) \geqslant \ell(A_n)$ per a tots els $n\in\mathbb{N}$ i doncs $\ell(A_o) \geqslant a \geqslant \ell(B)$, per a tot $B\in N_o$ i per tant $A_o \succsim B$.

En consequència, utilitzant el Lema de Zorn, existirà almenys un maximal en $(N_m, \precsim)$.

Sigui A_o un element maximal en $(N_m, \precsim)$ i posem

$$\ell_s(A) = \ell(AA_o) \qquad i \qquad \ell_m(A) = (\ell - \ell_s)(A) = \ell(AA_o^c).$$

Es immediat que ℓ_s és una σ-mesura σ-afitada m-singular, ja que $|m|(A_o) = 0$, i que ℓ_m és una σ-mesura σ-afitada per a la qual és $\ell = \ell_s + \ell_m$. Falta veure que ℓ_m és m-continua. De fet, si no ho fos, existiría un conjunt $A\in\mathcal{a}$ pel qual seria

$$|m|(A) = 0 \qquad i \qquad \ell_m(A) > 0.$$

Aleshores $\ell(AA_o^c) > 0$ de manera que el conjunt $A_o \cup AA_o^c$, que seria de N_m, satisfaria $\ell(A_o \cup AA_o^c) > \ell(A_o)$, és a dir, seria $A_o \cup AA_o^c \succ A_o$, fet que contradiu la maximalitat de A_o en N_m. Per tant ℓ_m és m-contínua.

Si ℓ no és positiva la descomposició $\ell = \ell^+ - \ell^-$ i el teorema acabat de provar aplicat a ℓ^+ i ℓ^- donen la descomposició desitjada per a ℓ.

Finalment, de les observacions fetes abans d'aquest teorema i del teorema anterior, se'n segueix que la descomposició és única. ■

Observi's que dels dos darrers teoremes se'n deriva que, en la hipòtesi que G és super condicionalment complet, el conjunt de les σ-mesures m-singulars coincideix amb l'ortogonal de bca_{mc} en bca.

En conseqüència, en aquest cas les o-mesures m-singulars constitueixen una banda, però queda pendent la qüestió de si en general la constitueixen o no, ja que només hem vist que formaven un subgrup sòlid (1.5.3 c)).

6. CONSTRUCCIÓ I EXEMPLES DE o-MESURES.

En aquest apartat hi ha un recull d'exemples d'o-mesures finites o no i valorades en diversos ℓ-grups, obtinguts al marge d'una serie de formes típiques de construcció d'o-mesures, que, llistades al principi, indonen les anomenades mesures discretes i les mesures valorades en ℓ-grups producte. Finalment estudiem amb detall les o-mesures valorades en el ℓ-grup i àlgebra de Banach reticulada ℓ_1, de les que en donem una caracterització en termes de mesures vectorials, després d'un estudi del ℓ-anell $\ell_1(R)$ de les series absolutament o-sumables en un ℓ-anell R.

A) Construcció d'o-mesures.

1. Mesura de contracció. Donada una o-mesura $m:\mathcal{a} \to \bar{G}$ en un anell $\mathcal{a}$ i un element $A\in\mathcal{a}$ anomenem o-mesura de contracció de m per A a la o-mesura $m_A:\mathcal{a} \to \bar{G}$ definida per $m_A(B)=m(A\cap B)$.

2. Mesura induïda. Donada una o-mesura $m:\mathcal{a} \to \bar{G}$ en un anell $\mathcal{a}$ i un element $A\in\mathcal{a}$, considerem l'anell $\mathcal{a}_A=\{A\cap B; B\in\mathcal{a}\}$. Anomenem o-mesura induïda de m en $\mathcal{a}_A$ a la o-mesura $\bar{m}:\mathcal{a}_A \to \bar{G}$ definida per $\bar{m}(A) = m(B)$.

3. Mesura imatge. Considerem dos anells $\mathcal{a}$ i $\mathcal{B}$ de parts de conjunts X i Y respectivament i una funció $f:X \to Y$ $(\mathcal{a}$-$\mathcal{B})$-mesurable. Aleshores tota o-mesura $m:\mathcal{a} \to \bar{G}$ determina una o-mesura $m_f:\mathcal{B}\to \bar{G}$ posant $m_f(B)=m(f^{-1}(B))$ per a cada $B\in\mathcal{B}$.

4. o-mesures en ℓ-grups producte. Sigui $\mathcal{a}$ un anell de parts d'un conjunt X, $(G_i)_{i\in I}$ una família de ℓ-grups σ-c.c. indexada en un conjunt qualsevol I, G el ℓ-grup producte $\prod_{i\in I} G_i$, π_i la projecció i-èssima de G en G_i.

Tota funció de conjunt $m:\mathcal{a} \to G$ queda determinada per la col.lecció $(m_i)_{i\in I}$ de funcions de conjunt $m_i = n_i o\ m:\mathcal{a} \to G_i$ de manera que

a) m és o-mesura si i només si cada m_i és -mesura;

b) m és o-afitada si i només si cada m_i és o-afitada; i en aquest cas, si G és c.c. i escrivim $m=(m_i)$, es té:

$$m^+ = (m_i^+),\ m^- = (m_i^-) \quad i \quad |m| = (|m_i|).$$

En efecte: Evidentment m és additiva si i només si cada m_i ho és. Utilitzant el Corol.lari 1.1.6. que caracteritza la σ-additivitat en ordre de funcions de conjunt additives i finites valorades en ℓ-grups i recordant que en el ℓ-grup producte la o-convergència de successions equival a la convergència per coordenades obtenim a). Respecte a b) basta tenir present les expressions que defineixen m^+, m^- i $|m|$ i que en G els suprems i els ínfims són també per coordenades.

En particular els exemples de 1.2.4. quedarien inclosos en el cas que aquí considerem.

5. <u>o-mesures discretes.</u> Tota funció $F:X \to R_+$ definida en un conjunt X determina una mesura real $m:\mathcal{P}(X) \to \overline{R}_+$ posant $m(\emptyset)=0$ i $m(A) = \sum_{x\in A} F(x)$ pels $A\in\mathcal{P}(X)$ no buits. Les mesures així obtingudes s'anomenen mesures discretes.

La suma que defineix m(A) és la suma de la familia de nombres reals $F(A)=\{F(x); x\in A\}$. Si sustituim R per un ℓ-grup G i volem obtenir per un procés anàleg una o-mesura en $\mathcal{P}(X)$ a partir de F haurem de definir en primer lloc la sumabilitat de la família F(A), que ara és una família d'elements de G. És suficient substituir en la definició usual la convergència de R per la convergència de l'ordre en G.

Havent precisat el significat de $o\text{-}\sum_{x\in A} F(x)$ (suma en ordre de F(A)) cal determinar, en segon lloc, les condicions en les que la funció $F:X \to G_+$ determina una o-mesura $m:\mathcal{P}(X) \to \overline{G}_+$ posant $m(\emptyset)=0$ i $m(A) = o\text{-}\sum_{x\in A} F(x)$ pels $A\in\mathcal{P}(X)$ no buits.

És clar que la possibilitat de resoldre tal questió està estretament lligada al comportament de la sumabilitat en ordre respecte a l'associativitat. I és en la mida que podem determinar aquest comportament que podem parlar de la o-mesura associada a F. Així és com ens hem vist obligats a estudiar la sumabilitat en ordre de famílies d'elements d'un ℓ-grup. Els resultats obtinguts estan exposats en la introducció, on, a més,(*) ens ha portat a l'estudi de les sèries convergents en ordre. Si bé en l'estudi de sèries s'haurien pogut analitzar més profundament punts com el de les relacions entre diferents tipus de sumació, ens hem limitat a establir els resultats bàsics per a desenvolupar el tema del nostre estudi.

En relació als resultats obtinguts referents a l'associativitat de la sumabilitat en ordre podem establir el següent

<u>1.6.1. Teorema.</u> Tota funció $F:X \to G_+$ definida en un conjunt X i valorada en la part positiva d'un ℓ-grup c.c. G, defineix una o-mesura $m:\mathcal{P}(X) \to \bar{G}_+$ posant $m(A)= o-\sum_{x\in A} F(X)$ si $A\in\mathcal{P}(X)$ es no buit i $m(\emptyset)=0$, amb el conveni usual $m(A)=+\infty$, si la família $F(A)=\{F(x);x\in A\}$ no és o-sumable.

Demostració: Cal provar que així definida m és o-mesura.

a) additivitat: Siguin $A,B\in\mathcal{a}$ conjunts disjunts; cal veure que $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$. Si fos $m(A)+m(B)=+\infty$, seria també $m(A\cup B)=\infty$, i si fos $m(A)+m(B)<+\infty$, aleshores $F(A\cup B)$ seria també o-sumable (per la Proposició 0.3.7.) i $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$.

b) σ-additivitat en ordre: Donada una succesió $\{A_n\}\subset\mathcal{P}(X)$ de conjunts mútuament disjunts cal veure que $m(\cup A_n)= o-\sum m(A_n)$. Posem $A=\cup A_n$. Si fos $m(A_n)=+\infty$ per a algun n, naturalment seria $m(A)=+\infty$ i doncs valdria la igualtat. Suposem per tant que $m(A_n)<+\infty$, per a tots els $n\in\mathbb{N}$. Aleshores o bé $m(A)<+\infty$, és a dir, F(A) és o-sumable i per tant, per l'associativitat (0.3.5.),

$$(o-\sum_{x\in A_n} F(X))_n \text{ és o-sumable i } o-\sum_{x\in A} F(X) = o-\sum_n(o-\sum_{x\in A_n} F(X)),$$

o bé $m(A)=+\infty$, i aleshores també $o-\sum m(A_n)=+\infty$ car si fos $o-\sum m(A_n)<+\infty$, per la Proposició 0.3.6. resultaria que F(A) hauria de ser o-sumable, contràriament a la hipòtesi feta de $m(A)=+\infty$. ∎

En particular si $a \in G$ és un element positiu no nul, la funció $F(x)=a$ definiría una o-mesura que podriem anomenar la <u>o-mesura comptadora</u> $m_o : \wp(X) \to \bar{G}_+$ definida per

$$m(A) = \begin{cases} na, & \text{si } \#A=n, \\ +\infty, & \text{si } \#A \quad \chi_o. \end{cases}$$

Si partim d'una funció $F:X \to G$ no positiva, i en vista dels resultats de la introducció, obtindrem també una o-mesura, pel mateix procediment, sempre que $F(A)$ sigui absolutament o-sumable. Precisant tenim:

<u>1.6.2. Teorema.</u> Tota funció $F:X \to G$ d'un conjunt X en un ℓ-grup c.c. G, per a la qual $F(X)$ és absolutament o-sumable, defineix una o-mesura o-afitada $m:\wp(X) \to G$ posant $m(A)=o\text{-}\sum_{x\in A} F(x)$, si $A\neq\emptyset$, i $m(\emptyset)=0$.

Demostració: Segons a) i b) de Proposició 0.3.4. $F(A)$ és o-sumable per a cada $A\in\wp(X)$ i per tant

$$m(A)= o\text{-}\sum_{x\in A} F(x)$$

defineix una funció de conjunt $m:\wp(X) \to G$. Com en el Teorema anterior, la Proposició 0.3.7 permet provar que m és additiva. Quant a la σ-additivitat en ordre, considerem una successió $\{A_n\}\subset\wp(X)$ de conjunts mûtuament disjunts. Posem $A=\bigcup A_n$. Per a cada $n\in N$, $F(A_n)$ és absolutament o-sumable, així com $F(A)$, d'on per la Proposició 0.3.5. $o\text{-}\sum_n(o\text{-}\sum_{x\in A_n} F(x))$ és una sèrie absolutament o-sumable i a més

$$o\text{-}\sum_{x\in A} F(x) = o\text{-}\sum_n(o\text{-}\sum_{x\in A_n} F(x)),$$

és a dir, $m(A)=o\text{-}\sum m(A_n)$. ■

En particular si $a\in G$ i $x_o\in X$, la funció $F_a:X \to G$ definida per

$$F_a(x) = a, \text{ si } x=x_o, \quad \text{i} \quad F_a(x)=0, \text{ si } x\neq x_o,$$

determina la <u>o-mesura de pes a en x_o</u>, $m:\mathcal{P}(X) \to G$, donada per

$$m(A) = \begin{cases} a & \text{si } x_o \in A \\ 0 & \text{si } x_o \notin A. \end{cases}$$

<u>Observacions.</u>

a) Tant en el Teorema 1.6.1. com en el Teorema 1.6.2. la o-mesura m és, de fet, additiva respecte a qualsevol família disjunta de conjunts de $\mathcal{P}(X)$ i no només respecte a les numerables.

b) La o-mesura m definida a partir de F satisfa $m(\{x\})=F(x)$. Es única la o-mesura definida en $\mathcal{P}(X)$ amb aquesta propietat?. És a dir, si $n:\mathcal{P}(X) \to \bar{G}_+$ és una o-mesura i $n(\{x\})=F(x)$ serà $n(A)=o\text{-}\sum_{x\in A} F(X)$?. Evidentment si X és numerable hi ha unicitat. Però si X no és numerable no hi ha tal unicitat com mostra el següent exemple.

<u>1.6.3. Exemple.</u> Suposem $X=R$, $G=b(R^R)$ i considerem les funcions de conjunt $m,n:\mathcal{P}(R) \to \bar{G}$ definides així:

$$m(A)= \varphi_A, \quad \text{per a cada } A\in\mathcal{P}(R),$$

$$n(A) = \begin{cases} \varphi_A, & \text{si A és numerable,} \\ +\infty, & \text{si A no és numerable.} \end{cases}$$

Totes dues són o-mesures, no coincideixen, i determinen la mateixa funció $F:X \to G$, $F(x)=\delta_x$.

B) <u>Exemples d' o-mesures.</u>

Sigui $(\Omega,\mathcal{a},\mu)$ un espai de mesura ($\mu:\mathcal{a} \to R_+$ σ-additiva en una σ-àlgebra $\mathcal{a}$ de parts de Ω).

$F(\Omega,\mathcal{a},\mu)$ designarà l'espai vectorial reticulat c.c. de les funciones reals definides en Ω $\mathcal{a}$-mesurables finites μ-q.a., identificades quan coincideixen μ-q.a.. $F(\Omega,\mathcal{a},\mu)$ és també ordre-separable i té la propietat diagonal (vegeu Luxemburg, [23]).

$L'(\Omega,\mathcal{a},\mu)$ designarà el subespai sòlid de $F(\Omega,\mathcal{a},\mu)$ de les funcions μ-integrables.

1.6.4. Exemple. Tota funció $f\in F(\Omega\times\Omega, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \mu\otimes\mu)$ tal que $f(x,\cdot)\in L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ per a cada $x\in\Omega$ μ-q.a., determina una o-mesura o-afitada definida per

$$\begin{aligned} m: \mathcal{A} &\to F(\Omega,\mathcal{A},\mu) \\ A &\to \int_A f(x,y)\,d\mu(y). \end{aligned}$$

Efectivament. En primer lloc cal veure que m està ben definida, és a dir, que si $f=g$ $\mu\otimes\mu$-q.a. i

$$m(A)=\int_A f(x,y)\,d\mu(y) \quad \text{i} \quad n(A)=\int_A g(x,y)\,d\mu(y),$$

aleshores $m(A)=n(A)$ μ-q.a.

Si $B\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ és $\mu\otimes\mu$-nul resulta que $B_x=\{y\mid (x,y)\in B\}$ és μ-nul per a tots els $x\in\Omega$ μ-q.a. Per tant si $B=[f\neq g]$ tindrem que el conjunt

$$B_x=\{y\mid f(x,y)\neq g(x,y)\} = [f(x,\cdot)\neq g(x,\cdot)]$$

és μ-nul per a tots els $x\in\Omega$ μ-q.a.; en conseqüència, per a cada $A\in\mathcal{A}$, és

$$\int_A f(x,y)\,d\mu(y) = \int_A g(x,y)\,d\mu(y),$$

és a dir, $m(A)=n(A)$ μ-q.a., tal com voliem veure. És immediat que m és additiva, ja que si $A,B\in\mathcal{A}$ son disjunts, es té

$$m(A\cup B)=\int_{A\cup B} f(x,y)\,d\mu(y)=\int_A f(x,y)\,d\mu(y)+\int_B f(x,y)\,d\mu(y).$$

Vegem que és σ-additiva en ordre. Recordant que en $F(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ la o-convergència de funcions equival a la convergència μ-q.a. (Luxemburg, [23]) bastarà provar que $\int_{A_n} f(x,y)\,d\mu(y)\to 0$ μ-q.a. cada vegada que $A_n\downarrow\emptyset$ en $\mathcal{A}$.

Sigui doncs una successió $\{A_n\}\subset\mathcal{A}$ tal que $A_n\downarrow\emptyset$. Com que $m(A_n)=\int f\chi(A_n)(x,y)\,d\mu(y)$ i

$$f\chi(A_n)(x,\cdot),\ f(x,\cdot)\in L'(\mu),$$

$$|f\chi(A_n)(x,\cdot)| \leqslant |f(x,\cdot)|$$

i $$f\chi(A_n)(x,\cdot) \to 0 \qquad \mu\text{-q.a.},$$

pel teorema de la convergència dominada de Lebesgue resulta que $\lim_n \int f\chi(A_n)(x,y)d\mu(y) = 0$, i això per a tots els $x\in\Omega$ μ-q.a. És a dir, $m(A_n) \to 0$ μ-q.a.

Finalment m és σ-afitada ja que

$$|m(A)| \leqslant \int_A |f(x,y)|d\mu(y) \leqslant \int_\Omega |f(x,y)|\, d\mu(y) \qquad \mu\text{-q.a.},$$

i $\int_\Omega |f(x,y)\, d\mu(y)$ és un element de $F(\Omega,\mathcal{a},\mu)$ (en $F(\Omega,\mathcal{a},\mu)$ l'ordre és l'ordre puntual μ-q.a.).

<u>1.6.5. Exemple.</u> Tota funció $f\in L'(\Omega\times\Omega,\ \mathcal{a}\otimes\mathcal{a}\ ,\ \mu\otimes\mu\ )$ determina una o-mesura o-afitada definida per

$$m:\mathcal{a} \to L'(\Omega,\mathcal{a},\mu)$$
$$A \to \int_A f(x,y)d\mu(y)$$

Efectivament, com en el cas anterior m està ben definida, continua essent σ-additiva i és també o-afitada, ja que la funció $\int_\Omega |f(x,y)\, d\mu(y)$ és un element de $L'(\Omega,\mathcal{a},\mu)$.

<u>1. 6.6. Exemple.</u> <u>Una o-mesura o-afitada</u> $m:\mathcal{P}(N) \to \ell_\infty$ que és <u>mesura vectorial de variació total no finita.</u>

Considerem en ℓ_∞ la sèrie $\Sigma\, x_n$ dels elements

$$x_o = (0,0,\ldots\ldots),$$
$$x_1 = (0,1,0,\ldots\ldots),$$
$$x_n = (0,0,\ldots,0,\tfrac{1}{n},0,\ldots),\ldots$$

La funció de conjunt $m:\mathcal{P}(N) \to \ell_\infty$ definida per a cada $A\subset N$ per $m(A)=$ o-Σx_n i $m(\emptyset)=0$ és una o-mesura o-afitada i mesura vectorial de variació total no finita.

En efecte: La sèrie Σx_n és sumable segons la topología de la convergència en norma de ℓ_∞ i, la seva suma és $y=(0,1,\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{n},\ldots)$. En canvi, no és normalment sumable ja que $\Sigma \|x_n\|=\Sigma \frac{1}{n} = +\infty$. Pel que fa a l'ordre, Σx_n és o-sumable ja que és o-convergent i de termes positius. A mes $\Sigma x_n = \vee x_n = y$.

La funció $F:\mathbb{N} \to \ell_\infty$ definida per $F(n)=x_n$ determina, segons hem vist a 1.6.2. una o-mesura o-afitada, i en aquest cas única, $m:\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \ell_\infty$ donada per

$$m(A) = o-\sum_{n\in A} x_n = \bigvee_{n\in A} x_n$$

Com que la sumabilitat en un espai normat és també associativa, posant $\bar{m}(A)=\sum_{n\in A} x_n$, $\bar{m}(\emptyset)=0$, queda definida una mesura vectorial $\bar{m}:\mathcal{P}(N) \to \ell_\infty$ que té variació total no finita, ja que $V(\bar{m})(\{n\})=\|x_n\|=\frac{1}{n}$ i per tant $V(\bar{m})(\mathbb{N}) = +\infty$. Només falta comprovar que m i $\bar{m}$ són la mateixa funció de conjunt. Ara bé, com que els elements x_n són mútuament ortogonals, tenim

$$\|m(A)-\sum_{\substack{i\in A\\ i\leq n}} x_i\| = \|\bigvee_{n\in A} x_n - \bigvee_{\substack{i\in A\\ i\leq n}} x_i\| = \|\bigvee_{\substack{i\in A\\ i>n}} x_i\| \leq \frac{1}{n+1}$$

i per tant $m(A)=\bar{m}(A)$ per a cada $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

<u>1.6.7. Exemple.</u> Sigui $M(\mathcal{A},\mathbb{R})$ el ℓ-grup c.c. de les mesures σ-additives reals finites en una σ-àlgebra $\mathcal{A}$. Per a cada element $\nu\in M(\mathcal{A};\mathbb{R})$ queda determinada una o-mesura o-afitada, definida per

$$m:\mathcal{A} \to M(\mathcal{A};\mathbb{R})$$
$$A \to m(A)=\nu_A,$$

on ν_A designa la contracció de ν en A.

Efectivament, així definida m és additiva, ja que si $A,B\in\mathcal{A}$ són disjunts, es té

$$m(A\cup B) = \nu_{A\cup B} = \nu_A + \nu_B = m(A)+m(B).$$

Vegem que és σ-additiva en ordre. Suposem primer que $\nu \geq 0$. Aleshores sempre que $A_n \downarrow \emptyset$ en $\mathcal{a}$ es té, per a cada $B \in \mathcal{a}$,

$$m(A_n)(B) = \nu_{A_n}(B) = \nu(A_n B) \downarrow 0,$$

ja que $A_n B \downarrow \emptyset$ i ν és σ-additiva. Així $m(A_n) \downarrow 0$ puntualment i per tant també en ordre dins $M(\mathcal{a};R)$, amb la qual cosa queda provat que m és σ-mesura.

En general si ν no és positiva tenim $m(A) = \nu_A = (\nu^+)_A - (\nu^-)_A$, i com que ν^+ i ν^- són positives, resulta que m és també σ-mesura.

Finalment m és o-afitada ja que donat qualsevol $A \in \mathcal{a}$ es té

$$|m(A)| = |\nu_A| \leq \nu_A^+ + \nu_A^- = |\nu_A| \leq |\nu|$$

i $|\nu| \in M(\mathcal{a};R)$.

7. L'ALGEBRA DE BANACH RETICULADA DE LES MESURES $m:\mathcal{P}(N) \to \ell_1(R)$.

A) bca($\mathcal{P}(N)$,R) i $\ell_1(R)$.

Considerem un conjunt numerable, que per comoditat d'escriptura suposarem que és N, la σ-àlgebra de les parts de N, $\mathcal{P}(N)$, i els espais $\ell_1(R)$ i bca($\mathcal{P}(N)$,R) de les successions de nombres reals absolutament sumables i de les mesures σ-additives reals i finites definides en $\mathcal{P}(N)$ respectivament. Per raons de notació, escriurem (a_n) per a designar un element de $\ell_1(R)$ i m(p) per a designar el valor d'un mesura $m \in$ bca($\mathcal{P}$(N),R) sobre el singletó {p}.

$\ell_1(R)$ és una àlgebra de Banach reticulada c.c. amb l'estructura d'espai vectorial i d'ordre induïda de la R^N, amb la norma $\|(a_n)\| = \Sigma|a_n|$ i amb el producte de convolució definit per $(a_n).(b_n) = (c_n)$ on

$$c_n = \sum_{\substack{i+j=n \\ 0 \leq i \leq n}} a_i . b_j .$$

Així mateix bca($\mathcal{P}$(N),R) és un reticle de Banach amb les operacions d'espai vectorial i d'ordre definits puntualment i amb la norma definida per la variació de m: $\|m\|= V(m)(N)$, que com sabem, en el cas real coincideix amb la variació en ordre de m. Així posarem $\|m\|=|m|(N)$. També és àlgebra reticula amb la convolució de mesures; respecte a l'ordre sabem que és reticle c.c.

Volem veure que $\ell_1(R)$ i $(\mathcal{P}(N),R)$ són isomorfs.

<u>1.7.1. Lema.</u> En el reticle $bca(\mathcal{P}(N),R)$ les operacions reticulars són puntuals sobre els singletons. Això és:

$$(m\vee n)(p) = m(p)\vee n(p) \quad i \quad (m\wedge n)(p) = m(p)\wedge n(p).$$

Efectivament, com que $M(\mathcal{P}(N),R)$ és un ℓ-grup, és $m\vee n=m+(n-m)^+$ i $m\wedge n = -(-m)\vee(-n)$, i bastarà provar que $m^+(p)=(m(p))^+$. Ara bé,

$$m^+(p)=\sup\{m(A);\ A\subseteq\{p\}\}=\sup\{m(p),m(\emptyset)\}=m(p)\vee 0 = m(p)^+. \blacksquare$$

<u>1.7.2. Teorema.</u> Tota mesura $m\in bca(\mathcal{P}(N),R)$ queda univocament determinada pels valors $a_n=m(n)$ i aleshores $\Sigma|a_n|< +\infty$.

Demostració. És immediat que si $m\in bca(\mathcal{P}(N,R)$ queda determinada una successió (a_n) per $a_n=m(n)$, de manera que essent m real i finita m té variació $|m|\in bca(\mathcal{P}(N),R)$, i per tant

$$|m|(N) = \Sigma|m|(n) = \Sigma|m(n)| = \Sigma|a_n|<+\infty,$$

ja que, segons es desprèn del lema anterior, $|m|(n)=|m(n)|$. Recíprocament, donada una successió (a_n) tal que $\Sigma|a_n|< +\infty$, l'única mesura que satisfaci $m(n)=a_n$ ha de venir donada per

$$m(A) = \sum_{p\in A} m(p),$$

i sabem, pel que hem vist en l'estudi de les σ-mesures discretes (n°. 5 de A)), o bé directament de les propietats de les sèries dobles absolutament sumables de nombres reals, que així definida m és una mesura real i finita en $\mathcal{P}(N)$. $\blacksquare$

Aquest teorema és el que ens permet obtenir l'isomorfisme anunciat entre $\ell_1(R)$ i bca$(\mathcal{P}(N),R)$:

1.7.3. Teorema. L'àlgebra de Banach reticulada i c.c. bca$(\mathcal{P}(N)\,R)$ es isomorfa i isomètrica com a tal a $\ell_1(R)$.

Demostració. El teorema anterior ens permet establir una bijecció

$$\emptyset:\ \text{bca}(\mathcal{P}(N),R) \rightarrow \ell_1(R)$$
$$m \rightarrow (a_n),\ a_n = m(n)$$

que és morfisme d'espai vectorial, com es veu de forma immediata. Pel Lema 1.7.1. $\emptyset$ és morfisme de reticle. És també morfisme d'anells ja que per a la mesura convolució de m i n, m*n, es té, si $\emptyset(m) = (a_n)$ i $\emptyset(n) = (b_n)$,

$$(m*n)(p) = (m \otimes n)(s^{-1}(p)) = (m \otimes n)(\{(i,j);i+j=p,\ 0\leqslant i\leqslant n\}) =$$

$$= \sum_{\substack{i+j=p\\ o\leqslant i\leqslant p}} m(i)n(p) = \sum_{\substack{i+j=p\\ o\leqslant i\leqslant p}} a_i\cdot b_j,$$

d'on $\emptyset(m).\emptyset(n)=\emptyset(m*n)$. Finalment $\emptyset$ és isometria car si: $\emptyset(m)=(a_n)$, és $\|m\|=|m|(N) = \Sigma|m|(n) = \Sigma|m(n)| = \Sigma|a_n|=\|\emptyset(m)\|$. ■

B) Els ℓ-anells ℓ_1(R) i bca$(\mathcal{P}(N)$,R).

De la mateixa manera que a partir del cos dels nombres reals es construeix l'àlgebra de Banach reticulada $\ell_1(R)$, anem a considerar, en el que segueix, la construcció d'un ℓ_1(R) a partir d'un ℓ-anell R, així com algunes de les seves propietats.

Sigui R un ℓ-anell c.c. i suposem que el producte és seqüencialment o-continu. Considerem el conjunt $\ell_1(R)=\{(a_n);a_n\in R$ i o-$\Sigma\,|a_n| <+\infty$ de les successions d'elements de R absolutament o-sumables.

1.7.6. Proposició. ℓ_1(R) és un ℓ-anell c.c. R-normat i complet segons la R-norma en el qual el producte és seqüencialment o-continu.

Demostració. Posant

$$(a_n)+(b_n) = (a_n+b_n),$$

$$(a_n)\leqslant (b_n) \Leftrightarrow a_n \leqslant b_n \quad \text{per a cada } n\in N,$$

$\ell_1(R)$ és un ℓ-grup (l'induït pel ℓ-grup producte de R^N). De fet $\ell_1(R)$ és un subgrup subreticulat convex en R^N i per tant c.c. Amb el producte definit per:

$$(a_n)\cdot(b_n)=(c_n), \text{ on } c_n= \sum_{\substack{i+j=n\\ o\leqslant i\leqslant n}} a_i\cdot b_j,$$

resulta que $\ell_1(R)$ es un ℓ-anell. En efecte: en primer lloc cal veure que, així definit, l'element (c_n) és de $\ell_1(R)$. Això és conseqüència de la o-continuïtat seqüencial del producte en R; s'ha de provar que existeix en R el o-lim $\sum_{p=1}^{n} |c_p| =$ o-$\Sigma|c_n|$. Tenim

$$\sum_{p=1}^{n} |c_p| = \sum_{p=1}^{n} \Big| \sum_{\substack{i+j=p\\ o\leqslant i\leqslant p}} a_i\cdot b_j \Big| \leqslant \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{i+j=p\\ o\leqslant i\leqslant p}} |a_i|\cdot|b_j| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=o}^{n} |a_i|\cdot|b_j| = \Big(\sum_{i=o}^{n} |a_i|\Big)\cdot\Big(\sum_{j=o}^{n} |b_j|\Big) \overset{o}{\rightarrow} (\text{o-}\Sigma|a_i|)\cdot(\text{o-}\Sigma|b_j|)\in R.$$

Per tant, en ser R c.c., existirà o-lim $\sum_{p=1}^{n} |c_p| =$ o-$\Sigma\, |c_n|$ i a més o-$\Sigma\, |c_n| \leqslant ($o-$\Sigma|a_n|)\cdot($o-$\Sigma|b_n|)$.

És immediata la distributivitat d'aquest producte respecte a la suma, i la commutativitat, si R és commutatiu. També, si R té unitat u, aleshores l'element $u_o=(u,o,o,\ldots)\in\ell_1(R)$ és la unitat de $\ell_1(R)$. I evidentment el producte definit és compatible amb l'ordre. Finalment podem veure que el producte definit, que anomenarem <u>producte de convolució</u>, és <u>sequencialment o-continu</u>. Pel que hem vist basta provar que si $\{a_n\}\subset\ell_1(R)$ i $b\in\ell_1(R)$, aleshores

$$\left.\begin{array}{l} a_n \downarrow 0 \\ \\ b \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_n \cdot b \downarrow 0 \quad i \quad b.a_n \downarrow 0.$$

Sigui $a_n = (a_n^i) \downarrow 0$: aleshores $a_n^i \downarrow 0$ per a cada $i \in N$. Sigui $b = (b_i)$. De $\Sigma\ |b_i| < +\infty$ se'n segueix que $\{b_i\}$ és o-afitat en R i per tant que per a un cert $\alpha \in R_+$ es té $|b_i| = b_i \leq \alpha$ per a tot $i \in \mathbb{N}$. Hem de provar que $a_n . b\ 0$, però això equival a que $(a_n \cdot b)_p \downarrow 0$ per a cada $p \in N$. Com que

$$0 \leq (a_n \cdot b)_p = \sum_{\substack{i+j=p \\ o \leq i \leq p}} a_n^i \cdot b_j \leq \sum_{i=o}^{p} a_n^i \cdot \alpha = \alpha \cdot \left(\sum_{i=o}^{p} a_n^i \right),$$

el producte és seqüencialment o-continu en R i, per a cada $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$, és $a_n^i \downarrow 0$, resulta que $(a_n \cdot b)_p \downarrow 0$. Anàlogament, $b \cdot a_n \downarrow 0$.

En $\ell_1(R)$ hi considerarem la <u>R-norma p</u> definida per $p(a) = o\text{-}\Sigma |a_n|$, essent $a = (a_n)$. És immediat comprovar que p és una R-norma compatible amb l'estructura reticular. També ho és amb el producte de convolució car hem vist que si $c = a \cdot b$, $o\text{-}\Sigma |c_n| \leq (o\text{-}\Sigma |a_n|) \cdot (o\text{-}\Sigma |b_n|)$ i per tant $p(a \cdot b) \leq p(a) \cdot p(b)$. Falta veure que és p-complet: això és que si $\{a^\alpha\}\ x \in \mathcal{R}$ és una xarxa p-fonamental en $\ell_1(R)$ aleshores existeix un element $a \in \ell_1(R)$ pel qual $p(a^\alpha - a) \overset{o}{\to} 0$.

Sigui $\{a^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{R}}$ una xarxa p-fonamental d'elements $a^\alpha \in \ell_1(R)$, i sigui $\delta_\alpha \downarrow 0$ una xarxa en $\ell_1(R)$ amb la propietat que per a un cert $\alpha_o \in \mathcal{R}$ és

$$p(a^\alpha - a^\beta) \leq \delta_\alpha \quad \text{per a tot } \beta \geq \alpha \text{ i } \alpha \geq \alpha_o.$$

Aleshores serà

$$\sum_{i=1}^{m} |a_i^\alpha - a_i^\beta| \leq \delta_\alpha \quad \text{per a tot } \beta \geq \alpha,\ \alpha \geq \alpha_o \text{ i } n \in \mathbb{N} \qquad (*).$$

En particular, resulta que $|a_i^\alpha - a_i^\beta| \leq \delta_\alpha$ per a tot $\beta \geq \alpha$, $\alpha \geq \alpha_o$ i $i \in \mathbb{N}$, és a dir, que $\{a_i^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{R}}$ és o-fonamental en R, per a cada $i \in \mathbb{N}$. Essent R c.c., existeix el o-lim $a_i^\alpha = a_i \in R$. Considerem l'element $a = (a_i) \in R^{\mathbb{N}}$ i vegem que $a \in \ell_1(R)$ i que o-lim $p(a^\alpha - a) = 0$.

De (*) resulta que, qualsevol que sigui el n elegit,

$$\sum_{i=o}^{n} |a_i^{\alpha}-a_i| \leqslant \delta_{\alpha}, \text{ per a tot } \alpha \geqslant \alpha_o,$$

d'on o-$\Sigma|a_n^{\alpha}-a_n|<+\infty$, és a dir, $a^{\alpha}-a\in \ell_1(R)$ i per tant $a\in \ell_1(R)$, i

$$p(a^{\alpha}-a)=o\text{-}\Sigma|a_n^{\alpha}-a_n| \leqslant \delta_{\alpha} \text{ per a tot } \alpha \geqslant \alpha_o,$$

on $\delta_{\alpha}\downarrow 0$, és a dir, o-lim $p(a^{\alpha}-a)=0$, tal com voliem veure. ■

Recordem en aquest punt que el conjunt bca($\mathcal{P}(N)$,R) de les o-mesures o-afitades definides en $\mathcal{P}(N)$ i valorades en el ℓ-grup R c.c. és un ℓ-grup c.c. R-normat amb la R-norma, derivada de la o-variació, $q(m)=|m|(N)$ (1.4.7). Exactament com per a les mesures reals en el Lema 1.7.1, es comprova que les operacions reticulars són puntuals sobre els singletons. També en forma semblant podem enunciar el següent

<u>1.7.7. Teorema</u>. Tota o-mesura o-afitada $m:\mathcal{P}(N) \to R$ queda unívocament determinada pels valors $m_n=m(n)$ i aleshores o-$\Sigma|m_n|<+\infty$.

Efectivament: És immediat que una o-mesura $m:\mathcal{P}(N)\to \ell_1(R)$ determina una successió $\{m_n\}$ en R posant $m_n=m(n)$. Tenint en compte que en bca($\mathcal{P}(N)$,R) les operacions reticulars són puntuals sobre el singletons de la σ-additivitat en ordre de $|m|$ en resulta a més, que

$$|m|(N)= o\text{-}\Sigma|m| (n)=\Sigma|m(n)|= o\text{-}\Sigma|m_n| <+\infty.$$

Recíprocament, donar una successió $\{m_n\}$ en R tal que o-$\Sigma|m_n|<+\infty$ és donar una funció $F:N \to R$ per a la qual $F(N)$ és absolutament o-sumable i per tant determina (segons 1.6.1.) una única o-mesura o-afitada en $\mathcal{P}(N)$ posant $m(A)=o\text{-}\sum_{n\in A} m_n$. ■

<u>1.7.8. Teorema.</u> L'aplicació ϕ :bca($\mathcal{P}(N)$,R) $\to \ell_1(R)$ definida per $\phi(m)=(m_n)$, on $m_n=m(n)$, és un isomorfisme isomètric o-continu de ℓ-grups R-normats.

Demostració. El teorema anterior és el que permet establir la bijacció $\emptyset$. De la definició és immediat que $\emptyset$ és isomorfisme de grup i de reticle i per tant també és o-continu. I és isomètric ja que $q(m)=o\text{-}\Sigma|m_n| = p(m_n) = p(\emptyset(m))$. ∎

1.7.9. Corol.lari. bca($\mathcal{P}(N)$,R) és un ℓ-anell c.c. R-normat i complet isomorf com a tal a ℓ_1(R).

L'isomorfisme $\emptyset$ permet definir un producte en bca($\mathcal{P}(N)$,R) que anomenem per analogia convolució de mesures posant

$$m*n = \emptyset^{-1}(\emptyset(m).\emptyset(n))$$

Com que ℓ_1(R) és complet respecte a la R-norma p i $\emptyset$ és isometria, resulta que bca($\mathcal{P}(N)$,R) és un ℓ-anell R-normat complet respecte a la R-norma de la variació en ordre. ∎

C) Les àlgebres bca($\mathcal{P}(N)$,$\ell_1(R)$) i $\ell_1(\ell_1(R))$.

Considerem finalment el cas particular del ℓ-anell c.c. R=$\ell_1(R)$ que és també espai vectorial real i àlgebra de Banach amb la norma real $\|(a_n)\|_1 = \Sigma|a_n|$.

Designem per S el conjunt $\ell_1(\ell_1(R))$ de les successions d'elements de $\ell_1(R)$ absolutament o-sumables. S és un espai vectorial reticulat, i segons 1.7.6. és també anell reticulat c.c. en el qual el producte (de convolució) és seqüencialment o-continu.

Així mateix el ℓ-grup bca($\mathcal{P}(N)$,$\ell_1(R)$) de les o-mesures o-afitades definides en $\mathcal{P}(N)$ i valorades en $\ell_1(R)$ és un espai vectorial i anell reticulat c.c. isomorf com a tal a S i en el qual les operacions reticulars són puntuals sobre els singletons. L'isomorfisme fa correspondre a cada o-mesura $m:\mathcal{P}(N) \to \ell_1(R)$ o-afitada la successió $\{m_n\}\subset\ell_1(R)$ determinada per $m_n=m(n)$.

1.7.10. Lema. Sigui una successió $\{m_n\}\subset\ell_1(R)$. Són equivalents

a) Σm_n és absolutament o-sumable;
b) Σm_n és normalment convergent.

En efecte: Posem $m_n=(a_i^n)$.

(a) ⇒ b)): Si Σm_n és absolutament o-sumable, podem considerar l'element $o\text{-}\Sigma|m_n|\in\ell_1(R)$ pel qual se satisfà

$$\sum_i (o\text{-}\sum_n|m_n|)_i < +\infty$$

Però en $\ell_1(R)$ la o-convergència de successions implica la convergència per coordenades i per tant

$$(o\text{-}\sum_n|m_n|)_i = \sum_n|m_n|_i = \sum_n|(m_n)_i| = \sum_n|a_i^n|$$

d'on en resulta que la sèrie de nombres reals $\sum_{i,n}|a_i^n|$ és doblement i absolutament sumable. D'aquí que $\sum_n\|m_n\|_1 = \sum_n\sum_i|(m_n)_i| =$

$= \sum_n\sum_i|a_i^n|<+\infty$.

(b) ⇒ a)). Si Σm_n és normalment sumable, la sèrie doble $\sum_{i,n}|a_i^n|$ és absolutament sumable i per tant per a cada $i\in N$, la serie $\sum_n|a_i^n|$ és convergent. D'aquí en resulta que la sèrie Σm_n és absolutament o-convergent car $(\sum_n|a_i^n|) = \sum_n(|a_i^n|) = o\text{-}\sum_n|m_n|$. ∎

Observi's que d'aquest lema se'n deriva un resultat ben conegut: Sigui Σx_n una sèrie en l'espai de Banach $(\ell_1(R),\|\ \|_1)$. Si la sèrie és de termes positius, i és convergent segons la topologia de la convergència en norma, aleshores també es normalment convergent.

Efectivament, sigui $x=\Sigma x_n$ i consideri's la successió de les sumes parcials (S_n). Del fet que $S_n \overset{\|\ \|}{\to} x$ se'n segueix que $S_n \overset{p}{\to} x$ i en ser S_n monòtona creixent, d'aquí se'n segueix a la vegada que $S_n \underset{o}{\uparrow} S$. Per tant la sèrie és o-convergent; però tractant-se d'una sèrie de temes positius, això equival a ser absolutament o-sumable (vegi's 0.4.6) i per tant, pel lema anterior, a ser normalment convergent.

Aquest mateix Lema permet relacionar, per a una funció de conjunt $m:\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \ell_1(\mathbb{R})$, el ser "mesura vectorial", valorada en l'espai de Banach $\ell_1(\mathbb{R})$ i el ser "o-mesura", valorada en el ℓ-grup c.c. $\ell_1(\mathbb{R})$. En aquest sentit tenim el següent

<u>1.7.11. Teorema.</u> Sigui $m:\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \ell_1(\mathbb{R})$ una funció de conjunt additiva valorada en ℓ-àlgebra de Banach reticulada $\ell_1(\mathbb{R})$. Són equivalents:

a) m és o-mesura o-afitada;

b) m és mesura vectorial de variació total finita.

Demostració. Dir que m és o-mesura o-afitada equival a dir que la sèrie Σm_n, on $m_n = m(n)$, és absolutament o-convergent car, tenint en compte que $|m|(n) = |m(n)|$, es té

$$|m|(\mathbb{N}) = o\text{-}\Sigma|m|(n) = o\text{-}\Sigma|m_n|.$$

D'altra banda dir que m és mesura vectorial de variació total finita equival a dir que la sèrie Σm_n és normalment convergent, ja que de la definició de variació total, resulta que

$$V(m)(n)=\sup\{\Sigma\|m(A_i)\|\ ;\{A_i\}\in D(\{n\})\}=\sup\{\|m(n)\|,\|m(\emptyset)\|\}=\|m_n\|$$

i per tant

$$V(m)(\mathbb{N}) = \sum_n V(m)(n) = \sum_n \|m_n\|.$$

D'aquí i del Lema anterior en resulta l'equivalencia de a) i b). ■

<u>1.7.12. Corol.lari.</u> Les àlgebres de Banach reticulades $S=\ell_1(\ell_1(\mathbb{R}))$ i $bca(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ell_1(\mathbb{R}))$ són isomorfes i isomètriques.

En efecte, havent vist que tot element $m\in bca(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ell_1(\mathbb{R}))$ és una mesura vectorial de variació total finita a valors en l'espai de Banach $(\ell_1(\mathbb{R}),\|\ \|_1)$ podem definir la norma $\|m\|=V(m)(\mathbb{N})$ que, com és sabut, fa de $bca(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ell_1(\mathbb{R}))$ un espai de Banach.

Pel que hem vist, si $m_n = (a_i^n)$, aleshores és $\|m\| = \sum_{i,n} |a_i^n|$, d'on resulta de forma immediata que la norma és compatible amb l'estructura reticular.

L'isomorfisme d'àlgebra i de reticle entre bca$(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ell_1(\mathbb{R}))$ i S permet definir de manera natural una norma en S posant, si $a=(a_n)\in S$ i $a_n=(a_i^n)\in\ell_1(\mathbb{R})$,

$$\|a\| = \sum_{n,i} |a_i^n| = \sum_n \|a_n\| ,$$

resultant ser una isometria. Finalment podem comprovar que la norma en S ó en bca$(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\ell_1(\mathbb{R}))$, és indiferent, és compatible amb el producte, això és, que si $a,b\in S$ aleshores $\|a\cdot b\|\leq\|a\|\cdot\|b\|$.

Posem $a=(a_n)$, $b=(b_n)$ i $c=a\cdot b=(c_n)$. Tenim $\|a\cdot b\| = \sum_n \|c_n\|$. Ara bé,

$$\|c_n\|_1 = \Big\|\sum_{\substack{i+j=n\\ 0\leq i\leq n}} a_i\cdot b_j\Big\|_1 \leq \sum_{\substack{i+j=n\\ 0\leq i\leq n}} \|a_i\|_1\cdot\|b_j\|_1$$

on aquest darrer terme és el terme n-èssim del producte de convolució dels elements $\alpha=(\|a_n\|)$, $\beta=(\|b_n\|)\in\ell_1(\mathbb{R})$, pels quals se satisfà $\|\alpha\|_1 = \sum_n \|a_n\|_1 = \|a\|$ i $\|\beta\|_1 = \sum_n \|b_n\|_1 = \|b\|$. Així, $\|c_n\|_1 \leq (\alpha\cdot\beta)_n$ de manera que

$$\|a\cdot b\| = \sum_n \|c_n\|_1 \leq \sum_n (\alpha\cdot\beta)_n = \|\alpha\cdot\beta\|_1 \leq \|\alpha\|_1\cdot\|\beta\|_1 = \|a\|\cdot\|b\| ,$$

tal com voliem veure. ∎