Universitat de Barcelona

Departament d'Estadística

CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE LES EQUACIONS EN DERIVADES PARCIALS ESTOCÀSTIQUES

David Márquez Carreras

5.2 Regularitat de la família

Objectiu

Aquesta secció està dedicada a establir algunes propietats de la solució de l'equació d'evolució (5.1.1), així com introduir-hi notacions, que necessitarem a la propera secció. Donarem els resultats de regularitat respecte ε que hem fet esment a la introducció.

Preliminars

Introduïm algunes hipòtesis sobre els coeficients i la condició inicial:

($H_4$1) $\sigma, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ són funcions de classe $\mathcal{C}^\infty$ amb derivades fitades de qualsevol ordre més gran que 1, i $X_0 \in \mathcal{C}([0,1])$.

($H_4$2) Existeix $C > 0$ tal que $\inf\{|\sigma(y)|,\ y \in \mathbb{R}\} \geq C$.

Observem que la primera condició és lleugerament més forta que la hipòtesi ($H_3$1) del capítol anterior. Bàsicament és per facilitar els càlculs que haurem de fer a la Secció 5.3.
Sigui $X^{\varepsilon,h}(t,x)(\omega) = X^\varepsilon(t,x)\Big(\omega + \frac{h}{\varepsilon}\Big)$, $\varepsilon \in (0,1]$, $(t,x) \in [0,T] \times [0,1]$, $h \in \mathcal{H}$. El procés $\{X^{\varepsilon,h}(t,x),\ (t,x) \in [0,T] \times [0,1]\}$ satisfà l'equació

$$X^{\varepsilon,h}(t,x) = \int_0^1 G_t(x,y)X_0(y)dy + \int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\Big\{\varepsilon\, \sigma(X^{\varepsilon,h}(s,y))\, W(ds,dy) + \sigma(X^{\varepsilon,h}(s,y))\, \dot{h}(s,y)ds\, dy + b(X^{\varepsilon,h}(s,y))\, ds\, dy\Big\}, \tag{5.2.1}$$

i, per unicitat de solució, $X^{\varepsilon,0}(t,x) = X^\varepsilon(t,x)$ and $X^{0,h}(t,x) = \Psi^h_{X_0}(t,x)$, on $X^{0,h}(t,x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} X^{\varepsilon,h}(t,x)$ (vegeu Proposició 5.2.1).
A partir d'ara j denotarà un enter positiu. Siguin $X_j^{\varepsilon,h}(t,x)$, $j \geq 1$, $\varepsilon \in [0,1]$, les

solucions de les equacions diferencials estocàstiques següents:

$$
\begin{aligned}
X_1^{\varepsilon,h}(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) \Big\{ & \sigma(X^{\varepsilon,h}(s,y)) W(ds,dy) \; + \; \varepsilon \, \sigma'(X^{\varepsilon,h}(s,y)) \\
& \times X_1^{\varepsilon,h}(s,y) \, W(ds,dy) \; + \; \sigma'(X^{\varepsilon,h}(s,y)) \, X_1^{\varepsilon,h}(s,y) \, \dot{h}(s,y) \, ds \, dy \\
& + b'(X^{\varepsilon,h}(s,y)) \, X_1^{\varepsilon,h}(s,y) \, ds \, dy \Big\}
\end{aligned} \tag{5.2.2}
$$

i, per $j \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
X_j^{\varepsilon,h}(t,x) = I_{j-1}^{\varepsilon,h}(t,x) \; + \; & \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) \Big\{ \varepsilon \sigma'(X^{\varepsilon,h}(s,y)) \, X_j^{\varepsilon,h}(s,y) \, W(ds,dy) \\
& + \sigma'(X^{\varepsilon,h}(s,y)) \, X_j^{\varepsilon,h}(s,y) \, \dot{h}(s,y) ds \, dy \; + \; b'(X^{\varepsilon,h}(s,y)) \, X_j^{\varepsilon,h}(s,y) \, ds \, dy \Big\},
\end{aligned} \tag{5.2.3}
$$

on

$$
\begin{aligned}
I_{j-1}^{\varepsilon,h}(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) \Bigg\{ & \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_k=j-1 \\ \beta_1,\ldots,\beta_k \geq 1}} d_{j-1}(\beta_1,\ldots,\beta_k) \\
& \times \sigma^{(k)}(X^{\varepsilon,h}(s,y)) \prod_{\ell=1}^{k} X_{\beta_\ell}^{\varepsilon,h}(s,y) \, W(ds\,dy) + \sum_{k=2}^{j} \sum_{\substack{\beta_1+\ldots+\beta_k=j \\ \beta_1,\ldots,\beta_k \geq 1}} c_j(\beta_1,\ldots,\beta_k) \\
& \times \Bigg[\varepsilon \sigma^{(k)}(X^{\varepsilon,h}(s,y)) \prod_{\ell=1}^{k} X_{\beta_\ell}^{\varepsilon,h}(s,y) \Big[W(ds,dy) + \frac{\dot{h}(s,y)}{\varepsilon} \, ds \, dy \Big] \\
& + b^{(k)}(X^{\varepsilon,h}(s,y)) \prod_{\ell=1}^{k} X_{\beta_\ell}^{\varepsilon,h}(s,y) \, ds \, dy \Bigg] \Bigg\},
\end{aligned}
$$

els coeficients $c_j(\beta_1,\ldots,\beta_k)$ i $d_j(\beta_1,\ldots,\beta_k)$ són obtinguts per inducció com al capítol anterior. En particular, quan $j = 2$, $c_2(1,1) = 1, d_1(1) = 2$, i per $\varepsilon = 0$,

$$
\begin{aligned}
I_1^{0,h}(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) \Big\{ & 2\sigma'(\Psi_{X_0}^h(s,y)) \, X_1^{0,h}(s,y) \, W(ds\,dy) + \sigma''(\Psi_{X_0}^h(s,y)) \\
& \times X_1^{0,h}(s,y)^2 \, \dot{h}(s,y) \, ds \, dy \; + \; b''(\Psi_{X_0}^h(s,y)) \, X_1^{0,h}(s,y)^2 \, ds \, dy \Big\}.
\end{aligned} \tag{5.2.4}
$$

Usem les convencions $X_0^{\varepsilon,h}(t,x) = X^{\varepsilon,h}(t,x)$ i $X_0^{0,h}(t,x) = \Psi_{X_0}^h(t,x)$.

Resultats

L'equació (5.2.1) té una estructura molt similar a l'equació (5.1.1), amb un nou terme on hi participa h. Aquest fet no porta ni cap tipus de problema ni cap tipus de diferència a l'hora de treballar. Per aquesta raó alguns dels resultats trobats sobre les trajectòries de $X^\varepsilon(t,x)$ que hem provat al Capítol 4 poden ser estesos sense cap dificultat a la solució de (5.2.1), utilitzant els mateixos arguments.
Tot seguit enunciem una sèrie de resultats per $X^{\varepsilon,h}(t,x)$ i donem la referència en el cas corresponent a $X^\varepsilon(t,x)$. Les demostracions poden ser pràcticament calcades del cas anterior.

Proposició 5.2.1 *Assumim* ($\mathrm{H}_4$1). *Fixats* $(t,x) \in (0,T] \times (0,1]$, $h \in \mathcal{H}$. *Aleshores existeix una versió de* $\{X^{\varepsilon,h}(t,x),\ \varepsilon \in (0,1)\}$ *que és de classe* C^∞ *respecte* ε *i, per a tot* $j \geq 1$

$$\frac{d^j\, X^{\varepsilon,h}}{d\,\varepsilon^j}\,(t,x) = X_j^{\varepsilon,h}(t,x).$$

A més a més, per qualssevol $j \geq 0$, $p \in (1,\infty)$, $\varepsilon, \varepsilon' \in (0,1)$,

$$\sup_{t,x}\ E\Big(|X_j^{\varepsilon,h}(t,x) - X_j^{\varepsilon',h}(t,x)|^p\Big) \leq C\ |\varepsilon - \varepsilon'|^p.$$

Conseqüentment,

$$E\left\{\sup_{0\leq\varepsilon\leq 1}\ |X_j^{\varepsilon,h}(t,x)|^p\right\} < \infty\,. \tag{5.2.5}$$

Endemés,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ X_j^{\varepsilon,h}(t,x) = X_j^{0,h}(t,x)\,,\quad \text{a.s.}$$

Vegeu la Proposition 4.3.2 i el Corol.lari 4.3.3.

Per a tot $\varepsilon \in (0,1]$ sigui

$$\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x) = \frac{X^{\varepsilon,h}(t,x) - \Psi^h_{X_0}(t,x)}{\varepsilon}, \tag{5.2.6}$$

$$S^{\varepsilon,h}(t,x) = \frac{X^{\varepsilon,h}(t,x) - \Psi^h_{X_0}(t,x) - \varepsilon\, X_1^{0,h}(t,x)}{\varepsilon^2}. \tag{5.2.7}$$

Notem que

$$S^{\varepsilon,h}(t,x) = \frac{\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x) - X_1^{0,h}(t,x)}{\varepsilon}. \tag{5.2.8}$$

Les funcions $\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x)$ i $S^{\varepsilon,h}(t,x)$ són de classe $\mathcal{C}^\infty$ respecte $\varepsilon \in (0,1)$. El següent lema estableix relacions entre les derivades dels processos $X^{\varepsilon,h}(t,x)$, $\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x)$ i $S^{\varepsilon,h}(t,x)$. Per qualsevol $j \geq 1$ siguin

$$\hat{X}_j^{\varepsilon,h}(t,x) = \frac{d^j\,\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x)}{d\varepsilon^j} \qquad \text{i} \qquad S_j^{\varepsilon,h}(t,x) = \frac{d^j\,S^{\varepsilon,h}(t,x)}{d\varepsilon^j}.$$

Com abans considerem les convencions $\hat{X}_0^{\varepsilon,h}(t,x) = \hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x)$ i $S_0^{\varepsilon,h}(t,x) = S^{\varepsilon,h}(t,x)$.

Lema 5.2.2 *Suposem* ($\mathrm{H}_4 1$). *Aleshores, per qualssevol* $j \geq 0$, $\varepsilon \in (0,1)$,

$$\hat{X}_j^{\varepsilon,h}(t,x) \;=\; \frac{1}{j+1}\Big\{X_{j+1}^{0,h}(t,x) + \varepsilon \int_0^1 (1-\xi^{j+1})\; X_{j+2}^{\varepsilon\xi,h}(t,x)d\xi\Big\}, \tag{5.2.9}$$

$$S_j^{\varepsilon,h}(t,x) \;=\; \frac{1}{(j+1)\,(j+2)}\; X_{j+2}^{0,h}(t,x) + \frac{\varepsilon}{(j+1)} \int_0^1 (1-\xi^{j+1})\; \hat{X}_{j+2}^{\varepsilon\xi,h}(t,x)\,d\xi\,. \tag{5.2.10}$$

Vegeu el Lema 4.3.4.
Clarament, (5.2.5), (5.2.9) i (5.2.10) impliquen, per qualsevol $j \geq 0$,

$$\hat{X}_j^{0,h}(t,x) \;:=\; \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \hat{X}_j^{\varepsilon,h}(t,x) = \frac{1}{j+1}\; X_{j+1}^{0,h}(t,x)\,, \tag{5.2.11}$$

$$S_j^{0,h}(t,x) \;:=\; \lim_{\varepsilon\downarrow 0} S_j^{\varepsilon,h}(t,x) = \frac{1}{(j+1)\,(j+2)}\; X_{j+2}^{0,h}(t,x)\,. \tag{5.2.12}$$

Pel teorema del valor mig, hom pot comprovar fàcilment que els processos $\{\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x),$ $(t,x) \in [0,T]\times[0,1]\}$, $\{S^{\varepsilon,h}(t,x);\; (t,x)\in[0,T]\times[0,1]\}$ donats a (5.2.6) i (5.2.7), respectivament, satisfan les equacions següents:

$$\begin{aligned}
\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x) \;=\;& \int_0^t\!\!\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\;\sigma(X^{\varepsilon,h}(s,y))\;W(ds,\,dy) \;+\; \int_0^t\!\!\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\\
\times\;& \Big\{\partial\,\sigma^\varepsilon(s,y)\hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y)\;\dot{h}(s,y) \;+\; \partial\,b^\varepsilon(s,y)\;\hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y)\Big\}ds\,dy\,,
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

$$\begin{aligned}
S^{\varepsilon,h}(t,x) \;=\;& \int_0^t\!\!\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\;\partial\sigma^\varepsilon(s,y)\;\hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y)\;W(ds,\,dy) \;+\; \int_0^t\!\!\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\\
\times\;& \Big\{\sigma'\Big(\Psi_{X_0}^h(s,y)\Big)\;S^{\varepsilon,h}(s,y)\;\dot{h}(s,y) \;+\; \partial^2\sigma^\varepsilon(s,y)\;\hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y)^2\;\dot{h}(s,y)\\
+\;& b'\Big(\Psi_{X_0}^h(s,y)\Big)\;S^{\varepsilon,h}(s,y) \;+\; \partial^2 b^\varepsilon(s,y)\;\hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y)^2\Big\}ds\,dy\,,
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

amb $\partial\,\sigma^\varepsilon(s,y) = \int_0^1 \sigma'\Big(\Psi^h_{X_0}(s,y)+\lambda(X^{\varepsilon,h}(s,y)-\Psi^h_{X_0}(s,y))\Big)d\,\lambda$, $\partial^2\sigma^\varepsilon(s,y) = \int_0^1 du \int_0^u dv\; \sigma''\Big(\Psi^h_{X_0}(s,y)+v(X^{\varepsilon,h}(s,y)-\Psi^h_{X_0}(s,y))\Big)$ i una similar definició per $\partial b^\varepsilon(s,y)$, $\partial^2 b^\varepsilon(s,y)$, respectivement.

Des de (5.2.12), (5.2.3) i (5.2.4) podem veure que $S^{0,h}(t,x)$ satisfà

$$\begin{aligned} S^{0,h}(t,x) = {} & \int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\; \sigma'\Big(\Psi^h_{X_0}(s,y)\Big)\; X_1^{0,h}(s,y)\; W(ds,dy) \\ & + \int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\; \Big\{\sigma'\Big(\Psi^h_{X_0}(s,y)\Big)\; S^{0,h}(s,y)\; \dot h(s,y) \\ & + \frac{1}{2}\,\sigma''\Big(\Psi^h_{X_0}(s,y)\Big) X_1^{0,h}(s,y)^2\, \dot h(s,y) \;+\; b'\Big(\Psi^h_{X_0}(s,y)\Big)\; S^{0,h}(s,y) \\ & + \frac{1}{2}\, b''\Big(\Psi^h_{X_0}(s,y)\Big)\; X_1^{0,h}(s,y)^2\Big\} ds\, dy\,. \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Assumim ($H_4 1$). Aleshores els arguments típics i estàndards desenvolupats, per exemple, a [6] impliquen que per qualsevol $(t,x) \in (0,T] \times (0,1)$ fixat, $\hat X_j^{\varepsilon,h}(t,x)$, $S_j^{\varepsilon,h}(t,x)$ pertanyen a $\mathbb{D}^\infty$, per qualsevol $j \geq 0$. A més a més, per qualssevol $j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} \sup_{0<\varepsilon\leq 1}\ \sup_{t,x}\ \|\hat X_j^{\varepsilon,h}(t,x)\|_{k,p} &\leq C\,, \\ \sup_{0<\varepsilon\leq 1}\ \sup_{t,x}\ \|S_j^{\varepsilon,h}(t,x)\|_{k,p} &\leq C\,. \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Si afegim la hipòtesi ($H_4 2$), aleshores

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} E\,(\,|\det\,\Gamma^{-1}_{\hat X^{\varepsilon,h}(t,x)}|^p) < C\,, \qquad p \in (1,\infty)\,,$$

i $X_1^{0,h}(t,x)$ és una variable aleatòria Gaussiana no degenerada. Per la demostració s'utilitzen les mateixes idees que a l'article de A. Millet i M. Sanz-Solé [36].

5.3 Estudi del comportament de la densitat

Objectiu

El propòsit d'aquesta secció es demostrar el desenvolupament asimptòtic de $p^{\varepsilon}_{t,x}(y)$, densitat de $X^{\varepsilon}(t,x)$, per a tot $y \in \mathbb{R}$ diferent al del capítol anterior; i per aconseguir això haurem d'introduir dos noves hipòtesis (vegeu ($\mathrm{H}_4 3$), ($\mathrm{H}_4 4$)).
En un primer apartat estudiarem la part *evanescent* de la densitat (Subsecció 5.3.1) i tal com diu la paraula observarem que l'altra part és la que té tot el pes del desenvolupament. A continuació, usant una sèrie de lemes previs, establirem la fórmula d'integració per parts del càlcul de Malliavin readaptada al nostre cas particular (Subsecció 5.3.2). La Subsecció 5.3.3 la dedicarem a la part *principal* de la densitat que tal com hem comentat ens donarà el desenvoluapment asimptòtic. Finalment, a la Subsecció 5.3.4, s'enuncia el resultat principal i la constatació de les hipòtesis.

Preliminars

En aquesta secció considerem un punt $(t,x) \in (0,T] \times (0,1]$ fixat, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq \Psi^0_{X_0}(t,x)$.
Com a l'article [56], nosaltres emprarem una localització basada en una hipòtesi addicional (vegeu ($\mathrm{H}_4 3$) més avall).
Sigui $K_y = \{h \in \mathcal{H} : \Psi^h_{X_0}(t,x) = y\}$ i $K^{\min}_y$ el conjunt de h's que pertanyen a K_y i minimitzen la norma $\mathcal{H}$. La Proposició 1.4 [36] ens assegura que sota ($\mathrm{H}_4 1$) i ($\mathrm{H}_4 2$) $K^{\min}_y \neq \emptyset$.
Introduïm aquesta condició addicional.

($\mathrm{H}_4 3$) El conjunt $K^{\min}_y$ és finit.

Sigui $K^{\min}_y = \{h_1, \dots, h_{n_0}\}$ i $a = \|h_i\|^2_{\mathcal{H}}$, $i = 1, \dots, n_0$.
Considerem una família $\{\phi_\rho,\ \rho \in (0,1]\}$ de funcions $\mathcal{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$, creixent amb ρ, tal que $\sup_{0<\rho\leq 1} \|\phi_\rho\|_\infty \leq 1$, i

$$\phi_\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > \rho, \\ 1 & \text{si } |x| \leq \frac{\rho}{2}. \end{cases}$$

Fixat $\beta \in (2, \infty)$ definim, per tot $\rho \in (0, 1]$, $\varepsilon > 0$,

$$\chi_{\rho,\beta}(\varepsilon, \omega) = \sum_{i=1}^{n_0} \phi_\rho\Big(\|X^\varepsilon(\omega) - \Psi^{h_i}_{X_0}\|^\beta_{L^\beta([0,T]\times[0,1])} \Big).$$

Aleshores, utilitzant aquesta definició, podem dividir la densitat en dues parts

$$p^\varepsilon_{t,x}(y) = E\Big(\delta_{\{y\}}(X^\varepsilon(t,x)) \Big) = p^{\varepsilon,1}_{t,x}(y) + p^{\varepsilon,2}_{t,x}(y) \,, \tag{5.3.1}$$

amb

$$\begin{aligned} p^{\varepsilon,1}_{t,x}(y) &= E\left\{ \Big(1 - \chi_{\rho,\beta}(\varepsilon,\omega)\Big)\, \delta_{\{y\}}\,(X^\varepsilon(t,x)) \right\}, \\ p^{\varepsilon,2}_{t,x}(y) &= E\left\{ \chi_{\rho,\beta}(\varepsilon,\omega)\; \delta_{\{y\}}\,(X^\varepsilon(t,x)) \right\}. \end{aligned}$$

Com hem comentat abans, anomenem a $p^{\varepsilon,1}_{t,x}(y)$ part *evanescent* de la densitat, i a $p^{\varepsilon,2}_{t,x}(y)$ part *principal* (vegeu [3]).

Denotem per $B^\beta(x, \rho)$ la bola oberta de $L^\beta([0,T] \times [0,1])$ centrada en x, amb radi ρ. Sota (H$_4$2) existeix $\rho_0 > 0$ tal que per qualsevol $\rho \in (0, \rho_0)$ les boles $B^\beta(\Psi^{h_i}_{X_0}, \rho)$, $i = 1, \ldots, n_0$, són disjuntes dos a dos.

Resultats

5.3.1 La part evanescent de la densitat

L'objectiu és estudiar $p^{\varepsilon,1}_{t,x}(y)$.

Proposició 5.3.1 *Assumim* (H$_4$1)-(H$_4$3). *Per cada $\rho \in (0, \rho_0)$ existeix una constant $C > 0$ tal que*

$$p^{\varepsilon,1}_{t,x}(y) = E\Big\{ \Big(1 - \chi_{\rho,\beta}(\varepsilon,\omega)\Big)\; \delta_{\{y\}}(X^\varepsilon(t,x)) \Big\} = O\Big(\exp\Big\{ -\frac{1}{2\varepsilon^2}\,(a + C) \Big\} \Big), \tag{5.3.2}$$

quan $\varepsilon \downarrow 0$.

Prova. Sigui $\rho' > 0$ i $\Psi = (1 - \chi_{\rho,\beta}(\varepsilon, \omega))\ \phi_{\rho'}(X^\varepsilon(t,x) - y)$. La fórmula d'integració per parts (2.2.3) i la propietat local de la integral de Skorohod donen

$$\begin{aligned}
0 \leq\ & E\Big\{\Big(1 - \chi_{\rho,\beta}(\varepsilon, \omega)\Big)\ \delta_{\{y\}}(X^\varepsilon(t,x))\Big\} \\
=\ & E\Big\{\Psi\ \delta_{\{y\}}(X^\varepsilon(t,x))\Big\} \\
\leq\ & E\Big\{\mathbb{1}_{\{X^\varepsilon(t,x)>y\}}\ H_1\Big(X^\varepsilon(t,x),\ \Psi\Big)\ \mathbb{1}_{\{X^\varepsilon \in \bigcap_{i=1}^{n_0}(B^\beta(\Psi_{X_0}^{h_i}, \frac{\rho}{2}))^c\}\ \cap\ \{|X^\varepsilon(t,x)-y|\leq\rho'\}}\Big\}.
\end{aligned}$$

Sigui $\Gamma_{X^\varepsilon(t,x)}$ la matriu de Malliavin de $X^\varepsilon(t,x)$. L'estimació (4.3.20) implica

$$\|\Gamma_\varepsilon^{-1}\|_p \leq C\,\varepsilon^{-2}, \qquad p \geq 1\,. \tag{5.3.3}$$

Per altra banda, per la desigualtat de Hölder i la fitació L^p de la integral de Skorohod (3.3.2),

$$E\left\{\Big(1 - \chi_{\rho,\beta}(\varepsilon, \omega)\Big)\ \delta_{\{y\}}\Big(X^\varepsilon(t,x)\Big)\right\} \leq T_1^{1/p}\, T_2^{1/q}$$

amb $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i

$$\begin{aligned}
T_1 &= P\Big\{X^\varepsilon \in \bigcap_{i=1}^{n_0}\Big(B^\beta(\Psi_{X_0}^{h_i},\ \frac{\rho}{2})\Big)^c,\ |X^\varepsilon(t,x) - y| \leq \rho'\Big\}, \\
T_2 &= \|H_1(X^\varepsilon(t,x),\ \Psi)\|_q^q\ \leq\ C\ \|\Gamma_{X^\varepsilon(t,x)}^{-1}\|_r^a\ \|X^\varepsilon(t,x)\|_{2,s}^b\ \|\Psi\|_{1,s'}^d\,,
\end{aligned}$$

on r, s, s', a, b i d són números reals positius més grans que 1.
Les fitacions (4.3.21) i (5.3.3) ens asseguren $T_2 \leq C\ \varepsilon^{-2a}$, per algun $a > 0$. Conseqüentment, prenent $p \to 1$,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon^2 \log E\Big((1 - \chi_{\rho,\beta}(\varepsilon, \omega))\ \delta_{\{y\}}(X^\varepsilon(t,x))\Big) \\
&\leq\ \limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon^2 \log P\Big\{X^\varepsilon \in \bigcap_{i=1}^{n_0}\Big(B^\beta(\Psi_{X_0}^{h_i},\ \frac{\rho}{2})\Big)^c,\ |X^\varepsilon(t,x) - y| \leq \rho'\Big\}.
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Sigui $\varphi_0^i \in \mathcal{C}([0,T] \times [0,1])$, $i = 1, \ldots, n_0$, $\gamma, \rho' > 0$ i $y \in \mathbb{R}$. El conjunt $\{\varphi \in \mathcal{C}([0,T] \times [0,1]) : \varphi \in \bigcap_{i=1}^{n_0}(B^\beta(\varphi_0^i, \gamma))^c;\ |\varphi(t,x) - y| \leq \rho'\}$ és tancat en la topologia de la norma uniforme. A més a més, el principi de grans desviacions per a la família $\{X^\varepsilon,\ \varepsilon \in (0,1]\}$ establert a [14] (vegeu també [50]), mostra que la part dreta de la desigualtat (5.3.4) és fitada per

$$-\inf\left\{\frac{1}{2}\ \|h\|_{\mathcal{H}}^2 : h \in \mathcal{H},\ \Psi_{X_0}^h \in \bigcap_{i=1}^{n_0}\Big(B^\beta(\Psi_{X_0}^{h_i},\ \frac{\rho}{2})\Big)^c,\ |\Psi_{X_0}^h(t,x) - y| \leq \rho'\right\}.$$

Existeix $\rho' > 0$ tal que aquesta darrera quantitat és estrictament fitada per $-\frac{1}{2}\,a$. Per demostrar aquesta afirmació, suposem el contrari. Per tant podrem elegir $\rho' = \frac{1}{n}$, $h^n \in \mathcal{H}$ satisfent

$$\Psi^{h^n}_{X_0} \in \bigcap_{i=1}^{n_0} \Big(B^\beta(\Psi^{h_i}_{X_0}, \frac{\rho}{2})\Big)^c, \; |\Psi^{h^n}_{X_0}(t,x) - y| \le \frac{1}{n},$$

i $\limsup_n \|h^n\|^2_{\mathcal{H}} \le a$. Aquesta darrera desigualtat assegura l'existència d'una subsuccessió $\{h^{n_k},\ h \ge 1\}$ de $\{h^n,\ n \ge 1\}$ la qual convergeix feblement a algun $\bar h \in \mathcal{H}$, i satisfà $\|\bar h\|^2_{\mathcal{H}} \le a$. Usant la propietat de continuïtat de l'esquelet provada a [14], $\Psi^{\bar h}_{X_0}(t,x) = y$ i

$$\Psi^{\bar h}_{X_0} \in \bigcap_{i=1}^{n_0} \Big(B^\beta(\Psi^{h_i}_{X_0}, \frac{\rho}{2})\Big)^c. \tag{5.3.5}$$

Així, per ($H_4$3), $\bar h \in K^{\min}_y$ i $\bar h = h_i$ per algun $i = 1, \dots, n_0$. Això porta a contradicció amb (5.3.5). D'aquí

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0}\ \varepsilon^2 \log E\Big((1 - \chi_{\rho,\beta}(\varepsilon,\omega))\ \delta_{\{y\}}(X^\varepsilon(t,x))\Big) < -\frac{1}{2}\,a\,,$$

provant (5.3.2). □

5.3.2 Una fórmula d'integració per parts

Aquesta subsecció està essencialment dedicada a donar els ingredients necessaris per la fórmula d'integració per parts, així com la seva demostració, que necessitarem després per analitzar la part principal de la densitat.

Sense pèrdua de generalitat assumirem que $K^{\min}_y$ està format per un sol element. A partir d'ara denotarem per $\bar h$ aquest element.
Considerem la transformació de l'espai de Wiener definida per $T^{\varepsilon,\bar h}(\omega) = \omega + \frac{\bar h}{\varepsilon}$; el teorema de Cameron-Martin-Girsanov, el Lema 5.4.4 i l'identitat (5.2.8) impliquen

$$\begin{aligned} p^{\varepsilon,2}_{t,x}(y) \;&=\; E\Big\{\chi^{\bar h}_{\rho,\beta}(\varepsilon,\omega)\ \delta_{\{y\}}\Big(X^\varepsilon(t,x)\Big)\Big\} \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\ \exp\Big(-\frac{1}{2\,\varepsilon^2}\ \|\bar h\|^2_{\mathcal{H}}\Big) \\ &\times\ E\Big\{\exp\Big(\bar\lambda\, S^{\varepsilon,\bar h}(t,x)\Big)\ \chi^{\bar h}_{\rho,\beta}\Big(\varepsilon, \omega + \tfrac{\bar h}{\varepsilon}\Big)\ \delta_{\{0\}}\Big(\hat X^{\varepsilon,\bar h}(t,x)\Big)\Big\}, \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

on $\chi^{\bar{h}}_{\rho,\beta}(\varepsilon,\omega) = \phi_\rho\Big(\|X^\varepsilon - \Psi^{\bar{h}}_{X_0}\|^\beta_{L^\beta([0,T]\times[0,1])}\Big)$ i $\bar{\lambda} = \lambda^{\bar{h}}$, essent $\lambda^{\bar{h}}$ definida al Lema 5.4.4.

Imaginem que tenim els desenvolupaments de Taylor de la funció exponencial que surt a (5.3.6) i de $f(\hat{X}^{\varepsilon,\bar{h}}(t,x))$, on f és $\mathcal{C}^\infty$, simètrica i amb suport compacte (aquest serà un dels passos que farem més endavant). Aleshores necessitarem una espècie de fórmula d'integració per parts del càlcul de Malliavin per poder eliminar les derivades de la funció f.

Tot seguit donem els ingredients per obtenir aquesta fórmula particular. En els propers Lemes 5.3.2, 5.3.2, 5.3.4 i la Proposició 5.3.5, h és un element arbitrari de $\mathcal{H}$. Encara que nosaltres assumim ($\mathrm{H}_4 1$) per obtenir aquests resultats, les demostracions també poden ser provades sota condicions més febles. Per a tot $\beta \in (1,\infty)$, $\varepsilon \in (0,1]$, $\rho \in (0,1]$, i $h \in \mathcal{H}$, sigui

$$A^{\varepsilon,\beta,\rho} = \Big\{\|X^{\varepsilon,h} - \Psi^h_{X_0}\|^{2\beta}_{L^{2\beta}([0,T]\times[0,1])} \leq \rho\Big\}.$$

Lema 5.3.2 *Assumim* ($\mathrm{H}_4 1$). *Existeixen* $r_0, C > 0$ *tals que, per a tot* $r \geq r_0$,

$$P\Big\{\|X^{0,h}_1\|_\infty > r\Big\} \leq \exp\Big(-\frac{r^2}{C}\Big), \tag{5.3.7}$$

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} P\Big\{\|\hat{X}^{\varepsilon,h}\|_\infty > r,\ A^{\varepsilon,\beta,\rho}\Big\} \leq \exp\Big(-\frac{r^2}{C}\Big), \tag{5.3.8}$$

per cada $\beta \in (3,\infty)$, $\rho \in (0,1]$.

Prova. Utilizant el lema de Gronwall es pot comprovar fàcilment que

$$\sup_{0\leq t\leq T}\ \sup_{0\leq x\leq 1} |\Psi^h_{X_0}(t,x)| \leq C. \tag{5.3.9}$$

Conseqüentment,

$$\|\sigma(\Psi^h_{X_0})\|_\infty \leq C. \tag{5.3.10}$$

Considerem l'equació satisfeta per $\{X^{0,h}_1(t,x),\ (t,x) \in [0,T]\times[0,1]\}$ (vegeu (5.2.2)). La desigualtat de Schwarz implica

$$|X^{0,h}_1(t,x)|^2 \leq C\Big\{\Big|\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\,\sigma(\Psi^h_{X_0}(s,y))\,W(ds,dy)\Big|^2 + (1+\|h\|^2_{\mathcal{H}}) \times \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \sup_{0\leq y\leq 1} |X^{0,h}_1(s,y)|^2 ds\Big\}.$$

Aleshores, usant el lema de Gronwall, obtenim

$$\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le x\le 1}|X_1^{0,h}(t,x)|$$
$$\le C\sup_{0\le t\le T}\sup_{0\le x\le 1}\Big|\int_0^t\int_0^1 G_{t-s}(x,y)\,\sigma(\Psi^h_{X_0}(s,y))\,W(ds,\,dy)\Big|.$$

Per tant, el Lema 5.4.3 i (5.3.10) ens asseguren

$$P\{\,\|X_1^{0,h}\|_\infty>r\}\le\ P\Big\{\|\int_0^{\cdot}\int_0^1 G_{\cdot-s}(*,y)\,\sigma(\Psi^h_{X_0}(s,y))\,W(ds,\,dy)\|_\infty>\frac{r}{C}\,,$$
$$\int_0^T\int_0^1\Big(\sigma(\Psi^h_{X_0}(s,y))\Big)^{2\beta}ds\,dy\le CT\Big\}$$
$$\le\ \exp\Big(-\frac{r^2}{C}\Big),$$

per r suficientment gran. Això prova (5.3.7).
La demostració de (5.3.8) és molt semblant. De nou, considerant l'equació satisfeta per $\{\hat{X}^{\varepsilon,h}(t,x),\,(t,x)\in[0,T]\times[0,1]\}$, un argument basat en el lema de Gronwall dóna

$$\|\hat{X}^{\varepsilon,h}\|_\infty\le C\ \|\int_0^{\cdot}\int_0^1 G_{\cdot-s}(*,y)\ \sigma(X^{\varepsilon,h}(s,y))\ W(ds,dy)\|_\infty\,.$$

La propieta Lipschitz de σ i (5.3.10) impliquen que, sobre el conjunt $A^{\varepsilon,\beta,\rho}$,

$$\int_0^T\int_0^1|\sigma(X^{\varepsilon,h}(s,y))|^{2\beta}ds\,dy\le R\,,$$

pe alguna constant R positiva que no depèn de ρ.
Així, el Lema 5.4.3 aplicat a $\tau(s,y)=\sigma(X^{\varepsilon,h}(s,y))$ dóna (5.3.8). □

Lema 5.3.3 *Suposem* (H_41). *Per qualssevol $\rho\in(0,1]$, $\beta\in(3,\infty)$, existeixen r_0, C, no depenent de ρ, tals que, per cada $r\ge r_0$,*

$$\sup_{0<\varepsilon\le 1}P\{\,\|\hat{X}^{\varepsilon,h}-X_1^{0,h}\|_\infty>r\,,\ \ A^{\varepsilon,\beta,\rho}\}\le\exp\Big(-\frac{r^2}{\rho^{1/\beta}}\,C\Big).$$

Prova. Recordem que $(\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h})(t,x) = \varepsilon\ S^{\varepsilon,h}(t,x)$, on $\{S^{\varepsilon,h}(t,x),\ (t,x) \in [0,T] \times [0,1]\}$ satisfà (5.2.14). Més exactament, tenim

$$\begin{aligned}(\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h})(t,x) &= \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\ \partial\sigma^\varepsilon(s,y)\ (X^{\varepsilon,h} - \Psi_{X_0}^h)(s,y)\ W(ds,\ dy)\\ &+ \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) \Big\{ \Big(\sigma'(\Psi_{X_0}^h(s,y))\ \dot{h}(s,y) + b'(\Psi_{X_0}^h(s,y))\Big)\\ &\times\ (\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h})(s,y)\ +\ \Big(\partial^2 \sigma^\varepsilon(s,y)\ \dot{h}(s,y) + \partial^2 b^\varepsilon(s,y)\Big)\\ &\times\ \hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y)\ (X^{\varepsilon,h} - \Psi_{X_0}^h)(s,y) \Big\}\, ds\, dy\,.\end{aligned}$$

Així,

$$\begin{aligned}&|(\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h})(t,x)|^2\\ &\le C\Big\{ \Big| \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\ \partial\sigma^\varepsilon(s,y)\ (X^{\varepsilon,h} - \Psi_{X_0}^h)(s,y)\ W(ds\, dy)\Big|^2\\ &+ \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \sup_{0\le x\le 1} |(\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h})(s,x)|^2 ds\\ &+ \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}^2(x,y)\ (\hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y))^2\ ((X^{\varepsilon,h} - \Psi_{X_0}^h)(s,y))^2\ ds\, dy \Big\}.\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Sigui $\alpha \in (1, \frac{3}{2})$ satisfent $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. La desigualtat de Hölder ens mostra

$$\begin{aligned}&\int_0^t \int_0^1 G_{t-s}^2(x,y)\ (\hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y))^2\ ((X^{\varepsilon,h} - \Psi_{X_0}^h)(s,y))^2 ds\, dy\\ &\le\ \|\hat{X}^{\varepsilon,h}\|_\infty^2 \Big(\int_0^t \int_0^1 G_{t-s}^{2\alpha}(x,y) ds\, dy\Big)^{1/\alpha}\ \|X^{\varepsilon,h} - \Psi_{X_0}^h\|_{L^{2\beta}([0,T]\times[0,1])}^2\\ &\le\ C\ \|\hat{X}^{\varepsilon,h}\|_\infty^2\ \|X^{\varepsilon,h} - \Psi_{X_0}^h\|_{L^{2\beta}([0,T]\times[0,1])}^2.\end{aligned}$$

Substituint aquesta estimació a (5.3.11) i utilitzant el lema de Gronwall obtenim

$$P\{\ \|\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h}\|_\infty > r,\ A^{\varepsilon,\beta,\rho}\} \le p_1 + p_2\,,$$

amb

$$p_1 = P\left\{\|\hat{X}^{\varepsilon,h}\|_\infty > r_1,\ A^{\varepsilon,\beta,\rho}\right\}$$

$$p_2 = P\left\{\left\| \int_0^{\cdot} \int_0^1 G_{t-\cdot}(*,y)\ \partial\,\sigma^\varepsilon(s,y)\ (X^{\varepsilon,h} - \Psi^h_{X_0})(s,y)\ W(ds,dy)\right\|_\infty > \frac{r}{C_2} - r_1\,\rho^{\frac{1}{2\beta}},\ A^{\varepsilon,\beta,\rho}\right\},$$

on $r_1 = a\,r\rho^{-\frac{1}{2\beta}}$ amb $\frac{1}{C_2} - a > 0$. Aleshores, la demostració del lema finalitza com a conseqüència dels Lemes 5.3.2 i 5.4.3. $\square$

Lema 5.3.4 *Assumim* (H$_4$1). *Per qualssevol* $\rho \in (0,1]$, $\beta \in (3,\infty)$, *existeixen* r_0, C, *no depenent de* ρ, *tals que, per a tot* $r \geq r_0$

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} P\left\{\ \|S^{\varepsilon,h} - S^{0,h}\|_\infty > r,\ A^{\varepsilon,\beta,\rho}\right\} \leq \exp\left(-\frac{r}{\rho^{\frac{1}{2\beta}}}\,C\right). \tag{5.3.12}$$

Prova. Des de (5.2.14) i (5.2.15) tenim que el procés $\{(S^{\varepsilon,h} - S^{0,h})(t,x),\ (t,x) \in [0,T]\times[0,1]\}$ satisfà l'equació.

$$\begin{aligned}(S^{\varepsilon,h} - S^{0,h})(t,x) = &\int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\Big(\sigma'(\Psi^h_{X_0}(s,y))\ \dot{h}(s,y) + b'(\Psi^h_{X_0}(s,y))\Big)\\ &\times\ (S^{\varepsilon,h} - S^{0,h})(s,y)ds\,dy\ +\ \sum_{i=1}^4 T_i(t,x)\,,\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

amb

$$T_1(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\ \sigma'(\Psi^h_{X_0}(s,y))(\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h})(s,y)\ W(ds,dy)\,,$$

$$T_2(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\ \partial^2\,\sigma^\varepsilon(s,y)\hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y)(X^{\varepsilon,h} - \Psi^h_{X_0})(s,y)\ W(ds,dy)\,,$$

$$\begin{aligned}T_3(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\ \dot{h}(s,y)\ \Big(&\partial^2\,\sigma^\varepsilon(s,y)(\hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y))^2\ -\ \frac{1}{2}\ \sigma''(\Psi^h_{X_0}(s,y))\\ &\times\ (X_1^{0,h}(s,y))^2\Big)\ ds\,dy\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_4(t,x) = \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\Big(&\partial^2\,b^\varepsilon(s,y)(\hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y))^2 - \frac{1}{2}\ b''(\Psi^h_{X_0}(s,y))\\ &\times\ (X_1^{0,h}(s,y))^2\Big)\ ds\,dy\,.\end{aligned}$$

Per qualssevol r, r_i, $i = 1, 2, 3$, números reals positius, $\beta \in (3, \infty)$, $\rho \in (0, 1]$, sigui

$$P\{\, \|S^{\varepsilon,h} - S^{0,h}\|_\infty > r,\ A^{\varepsilon,\beta,\rho}\} \le \sum_{i=1}^{4} q_i^\rho, \tag{5.3.14}$$

on

$$\begin{aligned} q_1^\rho &= P\{\, \|S^{\varepsilon,h} - S^{0,h}\|_\infty > r,\ A^{\varepsilon,\beta,\rho},\ \|\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h}\|_\infty \le r_1,\ \|\hat{X}^{\varepsilon,h}\|_\infty \le r_2\,, \\ &\qquad \|X_1^{0,h}\|_\infty \le r_3\}\,, \\ q_2^\rho &= P\{\, \|\hat{X}^{\varepsilon,h} - S_1^{0,h}\|_\infty > r_1,\ A^{\varepsilon,\beta,\rho}\}\,, \\ q_3^\rho &= P\{\, \|\hat{X}^{\varepsilon,h}\|_\infty > r_2,\ A^{\varepsilon,\beta,\rho}\}\,, \\ q_4^\rho &= P\{\, \|X_1^{0,h}\|_\infty > r_3\}\,. \end{aligned}$$

El Lema 5.3.2 dóna l'existència de $r_0, C_1 > 0$ tals que, per qualssevol $r_2, r_3 \ge r_0$, $\rho \in (0, 1]$,

$$q_3^\rho + q_4^\rho \le \exp\Big(-\frac{r_2^2}{C_1}\Big) + \exp\Big(-\frac{r_3^2}{C_1}\Big). \tag{5.3.15}$$

Pel Lema 5.3.3, per qualsevol $\rho \in (0, 1]$ fixada, existeixen $\bar{r}_0, C_2 > 0$ tals que, per cada $r \ge \bar{r}_0$,

$$q_2^\rho \le \exp\Big(-\frac{r_1^2}{\rho^{1/\beta}}\, C_2\Big). \tag{5.3.16}$$

Utilitzant (5.3.13) i els arguments estàndards basats en el lema de Gronwall obtenim

$$\|S^{\varepsilon,h} - S^{0,h}\|_\infty \le C \sum_{i=1}^{4} \|T_i\|_\infty. \tag{5.3.17}$$

El proper propòsit és donar fitacions per $\|T_i\|_\infty$, $i = 3, 4$, sobre el conjunt

$$A_{r_1 r_2 r_3}^{\varepsilon,\beta,\rho} := A^{\varepsilon,\beta,\rho} \cap \{\, \|\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h}\|_\infty \le r_1,\ \|\hat{X}^{\varepsilon,h}\|_\infty \le r_2,\ \|X_1^{0,h}\|_\infty \le r_3\}\,. \tag{5.3.18}$$

Notem que

$$\begin{aligned} T_3(t,x) = \int_0^t \int_0^1 & G_{t-s}(x,y)\dot{h}(s,y)\Big\{\partial^3\, \sigma^\varepsilon(s,y)(X^{\varepsilon,h} - \Psi_{X_0}^h)(s,y)\hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\,\sigma''(\Psi_{X_0}^h(s,y))\ \hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y)(\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h})(s,y) \\ &+ \frac{1}{2}\,\sigma''(\Psi_{X_0}^h(s,y))\ X_1^{0,h}(s,y)\ (\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h})(s,y)\Big\}ds\,dy\,, \end{aligned}$$

amb $\partial^3 \sigma^\varepsilon(s,y) = \int_0^1 du \int_0^u dv \int_0^v dw\ \sigma'''(\Psi^h_{X_0}(s,y) + w(X^{\varepsilon,h} - \Psi^h_{X_0})\ (s,y))$.
Aleshores, clarament, sobre $A^{\varepsilon,\beta,\rho}_{r_1 r_2 r_3}$,

$$\|T_3\|_\infty \le C\Big(\rho^{\frac{1}{2\beta}}\ r_2^2 + r_1 r_2 + r_1 r_3\Big). \tag{5.3.19}$$

La mateixa fitació existeix per a $\|T_4\|_\infty$.
Així, (5.3.17)-(5.3.19) impliquen, sobre el conjunt $A^{\varepsilon,\beta,\rho}_{r_1 r_2 r_3}$,

$$\|S^{\varepsilon,h} - S^{0,h}\|_\infty \le C\Big(\rho^{\frac{1}{2\beta}}\ r_2^2 + r_1 r_2 + r_1 r_3 + \|T_1\|_\infty + \|T_2\|_\infty\Big). \tag{5.3.20}$$

Siguin $a_i \in (0,\infty)$, $i = 1,2,3$, tals que $C_0 := \frac{1}{C} - a_2 - \sqrt{a_1 a_2} - \sqrt{a_1 a_3} > 0$, on C és la constant positiva que apareix a la banda dreta de la desigualtat (5.3.20). Aleshores, siguin

$$\begin{aligned} r_1 &= (a_1\, r\, \rho^{1/2\beta})^{1/2},\\ r_2 &= (a_2\, r\, \rho^{-1/2\beta})^{1/2},\\ r_3 &= (a_3\, r\, \rho^{-1/2\beta})^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

Clarament,

$$q_1^\rho \le q_{11}^\rho + q_{12}^\rho,$$

amb

$$\begin{aligned} q_{11}^\rho &= P\,\{\ \|T_1\|_\infty > \frac{1}{2}\, C_0\, r\,,\ A^{\varepsilon,\beta,\rho}_{r_1 r_2 r_3}\}\,,\\ q_{12}^\rho &= P\,\{\ \|T_2\|_\infty > \frac{1}{2}\, C_0\, r\,,\ A^{\varepsilon,\beta,\rho}_{r_1 r_2 r_3}\}\,. \end{aligned}$$

El Lema 5.4.3 aplicat al procés $\tau(s,y) = \sigma'(\Psi^h_{X_0}(s,y))\ (\hat{X}^{\varepsilon,h} - X_1^{0,h})(s,y)$ ens diu que existeixen contants K_1, K_2 positives tals que,

$$q_{11}^\rho \le \exp\Big(-\frac{r^2\, C_0^2}{4T^{1/\beta}\,\|\sigma'\|_\infty^2\, r_1^2}\, K_2\Big), \tag{5.3.22}$$

sempre que $\frac{r}{r_1} > K_1$.
Anàlogament, el mateix lema aplicat a $\tau(s,y) = \partial^2 \sigma^\varepsilon(s,y)\ \hat{X}^{\varepsilon,h}(s,y)\ (X^{\varepsilon,h} - \Psi^h_{X_0})(s,y)$, assegura l'existència de constants K_1, K_2 positives tals que

$$q_{12}^\rho \le \exp\Big(-\frac{r^2\, C_0^2}{4\,\|\sigma''\|_\infty^2\, r_2^2\, \rho^{1/\beta}}\, K_2\Big), \tag{5.3.23}$$

per $\frac{r}{r_2\, \rho^{1/2\beta}} \geq K_1$.
Substituint els valors de r_i, $i = 1, 2, 3$, donats a (5.3.21) a les desigualtats (5.3.15), (5.3.16), (5.3.22) i (5.3.23) i, tenint en compte la desigualtat (5.3.14), acabem la prova d'aquest lema. $\square$

Proposició 5.3.5 *Suposem* ($\mathrm{H}_4 1$). *Per qualssevol* $p > 0$, $\beta \in (6, \infty)$, *existeix* $\rho_1 = \rho_1(p) \in (0, 1]$ *tal que*

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} E\Big\{ \exp\Big(p\, |(S^{\varepsilon,h} - S^{0,h})(t,x)|\Big)\, \chi^h_{\rho_1,\beta}\,(\varepsilon,\, \omega + \frac{h}{\varepsilon})\Big\} < +\,\infty\,.$$

Prova. Fixem $p > 0$, $\beta > 6$. Siguin r_0, C tals que (5.3.12) és satisfeta per a tot $r \geq r_0$; aleshores elegim $\rho_1 \in (0, 1]$ tal que $p < \frac{C}{\rho_1^{\frac{1}{2}\beta}}$. Clarament

$$\chi^h_{\rho_1,\beta}\,(\varepsilon, \omega + \frac{h}{\varepsilon}) \leq \mathbb{1}_{A^{\varepsilon,\frac{\beta}{2},\rho_1}}.$$

El teorema de Fubini i l'elecció de ρ_1 impliquen

$$\begin{aligned}
& E\Big\{ \exp\Big(p \mid (S^{\varepsilon,h} - S^{0,h})\ (t,x) \mid\Big)\ \chi^h_{\rho_1,\beta}\Big(\varepsilon, \omega + \frac{h}{\varepsilon}\Big)\Big\} \\
& \quad \leq\ E\Big\{ \exp\Big(p \mid (S^{\varepsilon,h} - S^{0,h})\ (t,x) \mid\Big)\, \mathbb{1}_{A^{\varepsilon,\frac{\beta}{2},\rho_1}}\Big\} \\
& \quad \leq\ e^{pr_0}\ +\ E\Big\{\Big(\int_{r_0}^{|S^{\varepsilon,h}-S^{0,h}|\,(t,x)} p\, e^{py} dy\Big)\, \mathbb{1}_{A^{\varepsilon,\frac{\beta}{2},\rho_1}}\Big\} \\
& \quad \leq\ C\ +\ p \int_{r_0}^{\infty} e^{-y\left(\frac{C}{\rho_1^{1/2\beta}} - p\right)}\ dy\ <\ +\infty.
\end{aligned}$$

$\square$

La proposició prèvia és un dels ingredients utilitzats a la de demostració de la fórmula d'integracion per parts adaptada al nostre problema (Proposició 5.3.8). L'ingredient addicional, establert a la Proposició 5.3.6, necessita una nova hipòtesi (vegeu ($\mathrm{H}_4 4$) més avall).
La variable aleatòria $S^{0,h}(t,x)$ només té components als caos de Wiener d'ordre 0 i 2. Doncs, des de (5.2.15) hom pot comprovar fàcilment que la derivada de Malliavin de segon ordre és determinista i, a més a més, $E(D\ S^{0,h}(t,x)\,) = 0$. Sigui $Y(t,x) = \lambda^h\ S^{0,h}(t,x)$, $h \in K^{\min}_y$, on λ^h és definida al Lema 5.4.4. Aleshores

$$Y(t,x)\ =\ E(Y(t,x))\ +\ \int_{([0,t]\times[0,1])^2} f^h_2((t,x);(s,y),(r,z))\ W(ds,\, dy)\ W(dr,\, dz)\,, \tag{5.3.24}$$

amb $f_2^h((t,x);\cdot) \in L^2(([0,t]\times[0,1])^2)$. Així, el nucli $f_2^h((t,x);\cdot)$ defineix un operador de Hilbert-Schmidt $A(t,x)$ sobre $H = L^2(\,[0,t] \times [0,1]\,)$. Denotem per $\{\mu_k^h,\ k \geq 1\}$ la successió de valors propis de l'operador. Llavors

$$Z(t,x) = Y(t,x) - E(Y(t,x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^h\ \xi_k \otimes \xi_k\,,$$

essent $\{\xi_k\}$ una base ortonormal i completa del primer caos de Wiener.
Seguint la Proposició 8.4 del llibre de J. Neveu [39] tenim que, per a tot $\sigma > 0$ complint $2\,\sigma\ \max_k\ \mu_k^h < 1$, es compleix

$$E\left(e^{\sigma\, Z(t,x)}\right) = \left(\det_2\left(I - 2\sigma\ A(t,x)\right)\right)^{-\frac{1}{2}} < \infty,$$

on $\det_2$ denota el determinat de Carleman-Fredholm.
Amb aquest fet es lògic introduir la condició següent:

($H_4 4$) $2\ \max_k\ \mu_k^h < 1$, per qualsevol $h \in K_y^{\min}$.

Això ens permet de donar el pròxim resultat.

Proposició 5.3.6 *Assumim* ($H_4 1$), ($H_4 2$) *i* ($H_4 4$). *Per qualsevol* $h \in K_y^{\min}$ *existeix* $p \in (1,\infty)$ *tal que ,*

$$E\Big(\exp\left(\,p\,\lambda^h\ S^{0,h}(t,x)\right)\Big)\ <\ +\infty\,.$$

Les Proposicions 5.3.5, 5.3.6 i la desigualtat de Hölder impliquen

Proposició 5.3.7 *Assumim* ($H_4 1$), ($H_4 2$) *i* ($H_4 4$). *Per qualsevol* $h \in K_y^{\min}$ *existeixen* $p \in (1,\infty)$ *i* $\rho \in (0,1]$ *tals que, per qualsevol* $\beta \in (6,\infty)$,

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1}\ E\Big(\exp(\,p\,\lambda^h\ S^{\varepsilon,h}(t,x))\ \chi_{\rho,\beta}^h\Big(\varepsilon, \omega + \frac{h}{\varepsilon}\Big)\Big)\ <\ +\infty\,.$$

El desenvolupament de Taylor de $p_{t,x}^{\varepsilon,2}(y)$ recau sobre la particular fórmula d'integració per parts establerta a les properes dues proposicions.
Sigui $\mathbb{E}$ un espai polonès. Una família $\{U^i, i \in I\}$ de vectors aleatoris a valors en $\mathbb{E}$ indexada per $I \subset \mathbb{R}$ es dirà *uniformement fitada en* $\mathbb{D}^\infty(\mathbb{E})$ si, per qualssevol $p \in (1,\infty)$, $k \geq 1$, $\sup_i \|U^i\|_{p,k} \leq C_{p,k}$.

Per qualsevol $n \in \mathbb{N}$, sigui $\varphi_n(x) \in C_0^\infty$ una funció satisfent $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$,

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq n, \\ 0, & \text{si } |x| > n+1, \end{cases} \tag{5.3.25}$$

i $\sup_{n,k\geq 1} \|\varphi_n^{(k)}\|_\infty \leq C$.

Siguin $\{G^\eta, \eta \in [0,1]\}$, $\{F^\zeta, \zeta \in [0,1]\}$ dues famílies de variables aleatòries uniformement fitades en $\mathbb{D}^\infty$. Nosaltres també assumim $\sup_{0\leq\zeta\leq 1} \|\Gamma_{F^\zeta}^{-1}\|_p \leq C_p$, per qualsevol $p \in (1,\infty)$. Considerem una família $\{L^\varepsilon, \varepsilon \in (0,1]\}$ de variables aleatòries. Fixem $h \in K_y^{\min}$ i λ^h donada al Lema 5.4.4, sigui $B_n = \{\lambda^h \max(|S^{\varepsilon,h}(t,x)|,\ |S^{0,h}(t,x)|) \leq n\}$. Suposem les propietats següents:

(i) Per qualsevol $n \geq 1$, $(L^\varepsilon\ \varphi_n(\lambda^h S^{\varepsilon,h}(t,x))\ \varphi_n(\lambda^h S^{0,h}(t,x))) \in \mathbb{D}^\infty$.

(ii) Per a tot $\varepsilon \in (0,1]$,

$$|L^\varepsilon| \ \leq\ \exp(\lambda^h S^{0,h}(t,x))\ L_{0,1}^\varepsilon + \exp(\lambda^h S^{\varepsilon,h}(t,x))\ L_{0,2}^\varepsilon, \tag{5.3.26}$$

on $\{L_{0,i}^\varepsilon, \varepsilon \in (0,1]\}$, $i=1,2$, estan uniformement fitades en $\mathbb{D}^\infty$.

(iii) Sobre cada conjunt B_n, $n \geq 1$,

$$|D^k L^\varepsilon| \ \leq\ \exp(\lambda^h S^{0,h}(t,x))\ L_{k,1}^\varepsilon + \exp(\lambda^h S^{\varepsilon,h}(t,x))\ L_{k,2}^\varepsilon + L_{k,3}^\varepsilon, \tag{5.3.27}$$

amb $\{L_{k,i}^\varepsilon, \varepsilon \in (0,1]\}$, $i = 1,2,3$, uniformement fitades en $\mathbb{D}^\infty(L^2(([0,T]\times[0,1])^k))$.

La condició (i) implica $L^\varepsilon \in \mathbb{D}_{loc}^\infty$ amb successió localitzadora B_n.
Siguin

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^{\varepsilon,\eta,\rho} &= G^\eta\ L^\varepsilon\ \chi_{\rho,\beta}^h(\varepsilon, \omega + \tfrac{h}{\varepsilon}), \\ \Theta_0^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} &= \tilde{\Psi}^{\varepsilon,\eta,\rho}, \\ \Theta_k^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} &= \Theta_{k-1}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\ \delta(\|DF^\zeta\|^{-2}DF^\zeta)\ -\ \langle\ D\Theta_{k-1}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}, \|DF^\zeta\|^{-2}DF^\zeta\ \rangle, \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

$\eta,\zeta \in [0,1], \varepsilon \in (0,1], k \geq 1, \beta \in (6,\infty), h \in \mathcal{H}$. Notem que com D és un operador local, $\Theta_k^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}$, $k \geq 1$, està ben definit.

Proposició 5.3.8 *Assumim* ($H_4$1), ($H_4$2) *i* ($H_4$4). *Sigui* $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. *Existeix* $\rho \in (0,1]$ *tal que, per qualssevol enter* $k \geq 1$, $\eta, \zeta \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0,1]$, $h \in K_y^{\min}$,

$$E\left\{f^{(k)}(F^\zeta)\ G^\eta\ L^\varepsilon\ \chi^h_{\rho,\beta}(\varepsilon, \omega + \tfrac{h}{\varepsilon})\right\} = E\left(f(F^\zeta)\Theta_k^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\right). \tag{5.3.29}$$

Endemés,

$$\sup_{\substack{0\leq\eta,\zeta\leq 1\\ 0<\varepsilon\leq 1}} \|\Theta_k^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\|_1 < \infty.$$

Prova. Sigui

$$A_n = E\left\{f^{(k)}(F^\zeta)\ G^\eta\ L^\varepsilon\ \chi^h_{\rho,\beta}(\varepsilon,\omega + \frac{h}{\varepsilon})\ \varphi_n(\lambda^h S^{\varepsilon,h}(t,x))\ \varphi_n(\lambda^h S^{0,h}(t,x))\right\}.$$

Assumim que, per qualssevol $n \in \mathbb{N}$, $\zeta, \eta \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0,1]$ podem provar l'existència de $\rho \in (0,1]$ i una variable aleatòria $\Theta_{k,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} \in L^1(\Omega)$ tals que $A_n = E(f(F^\zeta)\ \Theta_{k,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho})$, $\sup_{\varepsilon,\eta,\zeta,n} \|\Theta_{k,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\|_1 < \infty$ i $L^1 - \lim_{n\to\infty} \Theta_{k,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} = \Theta_k^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}$ uniformement en ε, η, ζ. Aleshores (5.3.29) haurà estat demostrat.
Doncs, clarament

$$\lim_{n\to\infty} E\left(f(F^\zeta)\ \Theta_{k,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\right) = E\left(f(F^\zeta)\ \Theta_k^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\right).$$

La funció $\chi^h_{\rho,\beta}(\varepsilon, \omega + \frac{h}{\varepsilon})$ satisfà

$$\mathbb{1}_{\left\{\|X^{\varepsilon,h} - \Psi^h_{X_0}\|^\beta_{L^\beta([0,T]\times[0,1])} \leq \frac{\rho}{2}\right\}} \leq \chi^h_{\rho,\beta}(\varepsilon,\omega + \frac{h}{\varepsilon}) \leq \mathbb{1}_{\left\{\|X^{\varepsilon,h} - \Psi^h_{X_0}\|^\beta_{L^\beta([0,T]\times[0,1])} \leq \rho\right\}}. \tag{5.3.30}$$

Conseqüentment, la variable aleatòria $\tilde{\Psi}^{\varepsilon,\eta,\rho}$ pertany a $L^1(\Omega)$. Doncs, siguin $p \in (1,\infty)$, $2\rho \in (0,1]$, satisfent les conclussions de les Proposicions 5.3.6, 5.3.7, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Aleshores, per (5.3.30), la desigualtat de Hölder i (5.3.26)

$$\begin{aligned} E\ |\tilde{\Psi}^{\varepsilon,\eta,\rho}| &\leq \|G^\eta\ L^\varepsilon_{0,1}\|_q \left\{E\Big(\exp(\ p\ \lambda^h\ S^{0,h}(t,x))\Big)\right\}^{1/p} \\ &+ \|G^\eta\ L^\varepsilon_{0,2}\|_q \left\{E\Big(\exp(\ p\ \lambda^h\ S^{\varepsilon,h}(t,x))\ \chi^h_{2\rho,\beta}(\varepsilon,\omega + \tfrac{h}{\varepsilon})\Big)\right\}^{1/p} < \infty. \end{aligned}$$

Així, per convergència dominada

$$\lim_{n\to\infty} A_n = E\left\{f^{(k)}(F^\zeta)\ G^\eta\ L^\varepsilon\ \chi^h_{\rho,\beta}(\varepsilon,\omega + \frac{h}{\varepsilon})\right\}.$$

Anem, doncs, a trobar $\rho \in (0,1]$ i la variable aleatòria que hem comentat al principi de la prova.
Sigui

$$\tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho} = G^\eta \ L^\varepsilon \ \chi_{\rho,\beta}^h(\varepsilon, \omega + \frac{h}{\varepsilon})\varphi_n(\lambda^h S^{\varepsilon,h}(t,x))\varphi_n(\lambda^h S^{0,h}(t,x)).$$

Notem que $\tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho} \in \mathbb{D}^\infty$; aleshores la clàssica fórmula d'integració per parts del càlcul de Malliavin (2.2.3) implica

$$A_n = E\left(f(F^\zeta)H_k(F^\zeta, \tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho})\right),$$

amb $H_k(F^\zeta, \tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho})$ definit recurrentment com a (2.2.2) :

$$\begin{aligned} H_1(F^\zeta, \tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho}) &= \delta(\tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho} \|DF^\zeta\|^{-2} DF^\zeta), \\ H_k(F^\zeta, \tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho}) &= H_1(F^\zeta, H_{k-1}(F^\zeta, \tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho})), \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

La propietat del càlcul estocàstic anticipatiu (2.2.1) ens diu

$$\begin{aligned} H_1(F^\zeta, H_{k-1}(F^\zeta, \tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho})) &= H_{k-1}(F^\zeta, \tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho})\ \delta(\|DF^\zeta\|^{-2}DF^\zeta) \\ &\quad - \langle\ DH_{k-1}(F^\zeta, \tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho}), \|DF^\zeta\|^{-2}DF^\zeta\ \rangle, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Definim

$$\begin{aligned} \Theta_{0,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} &= \tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho}, \\ \Theta_{k,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} &= \Theta_{k-1,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\ \delta(\|DF^\zeta\|^{-2}DF^\zeta) - \langle\ D\Theta_{k-1,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\ , \|DF^\zeta\|^{-2}DF^\zeta\ \rangle, \end{aligned}$$

per qualsevol $k \geq 1$.
Clarament, per la propietat local de l'operador derivada D,

$$\Theta_{k,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} = \Theta_k^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}, \qquad \text{sobre } B_n, \qquad \text{per qualsevol } k \geq 0.$$

Nosaltres volem provar els fets següents. Existeix $\rho \in (0,1]$ tal que, per qualsevol $k \geq 0$, existeix $p_k \in (1,\infty)$ amb

$$\sup_{\varepsilon,\eta,\zeta} \|\Theta_{k,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} - \Theta_k^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\|_{p_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{5.3.31}$$

$$\sup_{\varepsilon,\eta,\zeta,n} \|\Theta_{k,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\|_{p_k} \leq C. \tag{5.3.32}$$

Aquest dos resultats són suficients per finalitzar la demostració.
Comprovem (5.3.31) i (5.3.32) usant inducció sobre k. Sigui $k = 0$, llavors

$$T_0^{\varepsilon,\eta,n} := \|\tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho} - \tilde{\Psi}^{\varepsilon,\eta,\rho}\|_{p_0} = \|(\tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho} - \tilde{\Psi}^{\varepsilon,\eta,\rho})\, \mathbb{1}_{B_n^c}\|_{p_0}.$$

Fixem $p > 1$ i $\rho \in (0,1]$ satisfent les Proposicions 5.3.6, 5.3.7. Siguin $p_0, q_1, q_2, q_3 > 1$ tals que $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 1$, $p_0\, q_2 = p$. Aleshores, la desigualtat de Hölder, (5.3.30), les Proposicions 5.3.6, 5.3.7 i (5.3.26) impliquen

$$\begin{aligned} T_0^{\varepsilon,\eta,n} \leq & \Big(\|G^\eta\, L_{0,1}^\varepsilon\|_{p_0 q_1} \Big\{E\Big(\exp(\,\lambda^h\, p_0\, q_2\, S^{0,h}(t,x))\Big)\Big\}^{\frac{1}{p_0 q_2}} + \|G^\eta\, L_{0,2}^\varepsilon\|_{p_0 q_1} \\ & \times \Big\{E\Big(\exp(\,\lambda^h\, p_0\, q_2\, S^{\varepsilon,h}(t,x))\chi_{2\rho,\beta}^h(\varepsilon,\omega + \frac{h}{\varepsilon})\Big)\Big\}^{\frac{1}{p_0 q_2}}\Big)\, (P(B_n^c))^{\frac{1}{p_0 q_3}}. \end{aligned}$$

Per tant

$$\sup_{\varepsilon,\eta} T_0^{\varepsilon,\eta,n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La fitació uniforme (5.3.32) segueix des de (5.3.26), la desigualtat de Hölder, (5.3.30), les Proposicions 5.3.6, 5.3.7 i el fet que φ_n i les seves derivades són fitades.
Per simplificar la presentació donarem els arguments precisos que ens permeten comprovar (5.3.31), (5.3.32) en el cas $k = 1$ i un *sketch* del cas general.
Tenim

$$\|\Theta_{1,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} - \Theta_1^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\|_{p_1}^{p_1} = \|(\Theta_{1,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} - \Theta_1^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho})\, \mathbb{1}_{B_n^c}\|_{p_1}^{p_1} \leq \sum_{i=1}^{6} T_i^{\varepsilon,\eta,\zeta,n},$$

on

$$\begin{aligned} T_1^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} &= E\, |(\tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho} - \tilde{\Psi}^{\varepsilon,\eta,\rho})\, \delta(\|DF^\zeta\|^{-2}\, DF^\zeta)|^{p_1}, \\ T_2^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} &= E\, |L^\varepsilon\, \chi_{\rho,\beta}^h(\varepsilon,\omega + \tfrac{h}{\varepsilon})\, \langle DG^\eta, \|DF^\zeta\|^{-2}\, DF^\zeta\rangle (1 - \varphi_n(\lambda^h S^{\varepsilon,h}(t,x)) \\ &\quad \times \varphi_n(\lambda^h S^{0,h}(t,x)))|^{p_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} &= E\,|G^\eta\, \chi_{\rho,\beta}^h(\varepsilon,\omega+\tfrac{h}{\varepsilon})\, \langle DL^\varepsilon, \|DF^\zeta\|^{-2}\, DF^\zeta\rangle\, (1-\varphi_n(\lambda^h S^{\varepsilon,h}(t,x)) \\
&\quad \times \varphi_n(\lambda^h S^{0,h}(t,x)))|^{p_1}, \\
T_4^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} &= E\,|G^\eta\, L^\varepsilon\, \langle D\chi_{\rho,\beta}^h(\varepsilon,\omega+\tfrac{h}{\varepsilon}), \|DF^\zeta\|^{-2}\, DF^\zeta\rangle\, (1-\varphi_n(\lambda^h S^{\varepsilon,h}(t,x)) \\
&\quad \times \varphi_n(\lambda^h S^{0,h}(t,x)))|^{p_1}, \\
T_5^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} &= E\,|G^\eta\, L^\varepsilon\, \chi_{\rho,\beta}^h(\varepsilon,\omega+\tfrac{h}{\varepsilon})\, \varphi_n'(\lambda^h S^{\varepsilon,h}(t,x))\varphi_n(\lambda^h S^{0,h}(t,x)) \\
&\quad \times \langle \lambda^h\, DS^{\varepsilon,h}(t,x), \|DF^\zeta\|^{-2}\, DF^\zeta\rangle\, \times \mathbb{1}_{B_n^c}|^{p_1}, \\
T_6^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} &= E\,|G^\eta\, L^\varepsilon\, \chi_{\rho,\beta}^h(\varepsilon,\omega+\tfrac{h}{\varepsilon})\, \varphi_n(\lambda^h S^{\varepsilon,h}(t,x))\varphi_n'(\lambda^h S^{0,h}(t,x)) \\
&\quad \times \langle \lambda^h\, DS^{0,h}(t,x), \|DF^\zeta\|^{-2}\, DF^\zeta\rangle\, \times \mathbb{1}_{B_n^c}|^{p_1}.
\end{aligned}$$

Elegim $p_1, q > 1$ amb $p_1\, q = p_0$. Llavors, la desigualtat de Hölder ens dóna

$$\sup_{\varepsilon,\eta,\zeta} T_1^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} \;\le\; C\, \sup_{\varepsilon,\eta,\zeta} \|\tilde{\Psi}_n^{\varepsilon,\eta,\rho} - \tilde{\Psi}^{\varepsilon,\eta,\rho}\|_{p_0}^{p_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Fixem $p > 1$ i $2\rho \in (0,1]$ satisfent les Proposicions 5.3.6, 5.3.7. Siguin $p_1, q_1, q_2, q_3 > 1$ tals que $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 1$, $p_1\, q_1 = p$. Aleshores, (5.3.26), (5.3.27), la desigualtat de Hölder, (5.3.30) i les Proposicions 5.3.6, 5.3.7 impliquen

$$\sup_{\varepsilon,\eta,\zeta} T_i^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} \;\le\; C\, (P(B_n^c))^{\frac{1}{q_3}}, \qquad i = 2, \cdots, 6.$$

Per tant (5.3.31) és provat per $k = 1$ i (5.3.32) segueix des de (5.3.26), (5.3.27), la desigualtat de Hölder, (5.3.30), les Proposicions 5.3.6, 5.3.7 i la fitació de φ_n i les seves derivades.
Per un k general tan sols donarem algunes remarques. Primerament, des de les definicions de $\Theta_{k,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}, \Theta_k^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}$, tenim

$$\|\Theta_{k,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} - \Theta_k^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}\|_{p_k}^{p_k} \;\le\; A_1^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} \;+\; A_2^{\varepsilon,\eta,\zeta,n},$$

amb

$$\begin{aligned}
A_1^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} &= E|(\Theta_{k-1,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} - \Theta_{k-1}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho})\, \delta(\|DF^\zeta\|^{-2}\, DF^\zeta)|^{p_k}, \\
A_2^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} &= E|\langle D\, (\Theta_{k-1,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} - \Theta_{k-1}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}), \|DF^\zeta\|^{-2}\, DF^\zeta\rangle\, \mathbb{1}_{B_n^c}|^{p_k}.
\end{aligned}$$

La desigualtat de Hölder i la hipòtesi d'inducció donen

$$\sup_{\varepsilon,\eta,\zeta} A_1^{\varepsilon,\eta,\zeta,n} \longrightarrow 0$$

quan $n \to \infty$. Per estudiar $A_2^{\varepsilon,\eta,\zeta,n}$ notem que

$$
\begin{aligned}
&|\langle D\,(\Theta_{k-1,n}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho} - \Theta_{k-1}^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}),\, \|DF^\zeta\|^{-2}\, DF^\zeta\rangle| \\
&\qquad \le\ \exp(\lambda^h S^{\varepsilon,h}(t,x))\chi_{2\rho,\beta}^h(\varepsilon,\omega+\tfrac{h}{\varepsilon})\ \Phi_1^{\varepsilon,\eta,\zeta}\ +\ \exp(\lambda^h S^{0,h}(t,x))\ \Phi_2^{\varepsilon,\eta,\zeta},
\end{aligned}
$$

amb $\Phi_1^{\varepsilon,\eta,\zeta}, \Phi_2^{\varepsilon,\eta,\zeta}$ fitades uniformement en $\mathbb{D}^\infty$. A més a més, des de $\lim_{n\to\infty} P(B_n^c) = 0$, la desigualtat de Hölder i les Proposicions 5.3.6, 5.3.7 ensenyen que

$$
\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\varepsilon,\eta,\zeta} A_2^{\varepsilon,\eta,\zeta,n}\right) = 0.
$$

Això finalitza la prova. $\square$

Més senzillament i utilitzant arguments similars als de la proposició prèvia podem provar la Proposition 5.3.9.
Siguin F^ζ, G^η com a la Proposició 5.3.8. Siguin

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Phi}^\eta &= G^\eta\ \exp(\lambda^h S^{0,h}(t,x)), \\
\Theta_0^{\eta,\zeta} &= \tilde{\Phi}^\eta, \\
\Theta_k^{\eta,\zeta} &= \Theta_{k-1}^{\eta,\zeta}\ \delta(\|DF^\zeta\|^{-2}DF^\zeta) - \langle D\Theta_{k-1}^{\eta,\zeta}, \|DF^\zeta\|^{-2}DF^\zeta\rangle,
\end{aligned}
\tag{5.3.33}
$$

$\eta, \zeta \in [0,1]$, $k \ge 1$, $h \in \mathcal{H}$.

Proposició 5.3.9 *Assumim* (H$_4$1), (H$_4$2) *i* (H$_4$4). *Sigui* $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. *Per cada enter* $k \ge 1$ *i* $\eta, \zeta \in [0,1]$,

$$
E\left\{f^{(k)}(F^\zeta)\ G^\eta\ \exp(\lambda^h S^{0,h}(t,x))\ \right\} = E\ \left(f(F^\zeta)\Theta_k^{\eta,\zeta}\right).
$$

i $\sup_{0\le\eta,\zeta\le 1} \|\Theta_k^{\eta,\zeta}\|_1 < \infty$.

5.3.3 La part principal de la densitat

Ara tenim totes les eines necessàries per estudiar $p_{t,x}^{\varepsilon,2}(y)$. Realment el que farem és donar l'expansió de la part dreta de la igualtat (5.3.6).
Siguin $\delta \in (0,\rho)$, ρ com a la Proposició 5.3.7, i $\beta \in (6,\infty)$. Definim

$$p_{t,x,\bar{h}}^{\varepsilon,2}(0) \;=\; E\Big\{ \exp\Big(\bar{\lambda}\, S^{\varepsilon,\bar{h}}(t,x)\Big)\; \chi_{\delta,\beta}^{\bar{h}}\Big(\varepsilon, \omega + \frac{\bar{h}}{\varepsilon}\Big)\; \delta_{\{0\}}\Big(\hat{X}^{\varepsilon,\bar{h}}(t,x)\Big)\Big\}.$$

Notem que, per (5.3.6),

$$p_{t,x}^{\varepsilon,2}(y) \;=\; \varepsilon^{-1}\, \exp(-\frac{1}{2\varepsilon^2}\|\bar{h}\|_{\mathcal{H}}^2)\; p_{t,x,\bar{h}}^{\varepsilon,2}(0).$$

Sigui ϕ una variable aleatòria no degenerada i $\psi \in \mathbb{D}_{loc}^{\infty}$. Sigui

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0(\phi,\psi) &= \psi, \\ \tilde{H}_k(\phi,\psi) &= \tilde{H}_{k-1}(\phi,\psi)\; \delta(D\phi\|D\phi\|^{-2}) \;-\; \langle D\tilde{H}_{k-1}(\phi,\psi), D\phi\|D\phi\|^{-2}\rangle, \end{aligned}$$

$k \geq 1$.
Senyalem que les successions $\Theta_k^{\varepsilon,\eta,\zeta,\rho}$, $\Theta_k^{\eta,\zeta}$, definides a (5.3.28) i (5.3.33), respectivement, poden ser descrites en termes de l'operador $\tilde{H}_k$.

Proposició 5.3.10 *Suposem* (H$_4$1)-(H$_4$4). *Aleshores, tenim*

$$p_{t,x,\bar{h}}^{\varepsilon,2}(0) \;=\; p_{t,x,\bar{h}}^{0} \;+\; \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i\, p_{t,x,\bar{h}}^{i} \;+\; \varepsilon^{n+1}\, \tilde{p}_{t,x,\bar{h}}^{n+1,\varepsilon}, \tag{5.3.34}$$

$n \geq 0$.
Els coeficients $p_{t,x,\bar{h}}^{i}$ *s'anul.len per i senar. Per qualsevol* $i \in \{0,\cdots,n\}$ *parell,*

$$\begin{aligned} p_{t,x,\bar{h}}^{0} &= E\Big\{ \mathbb{1}_{\{X_1^{0,\bar{h}}(t,x)>0\}}\; \tilde{H}_1(\, X_1^{0,\bar{h}}(t,x),\; \exp(\bar{\lambda} S^{0,\bar{h}}(t,x)))\Big\}, \\ p_{t,x,\bar{h}}^{i} &= \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j!(i-j)!} \sum^{(j)}\sum^{(i-j)} \bar{\lambda}^{k_{i-j}}\, E\Big\{ \mathbb{1}_{\{X_1^{0,\bar{h}}(t,x)>0\}}\; \tilde{H}_{k_j+1}\Big(\, X_1^{0,\bar{h}}(t,x), \\ &\qquad \exp(\bar{\lambda} S^{0,\bar{h}}(t,x)) \prod_{l=1}^{k_j} \frac{X_{\beta_l+1}^{0,\bar{h}}(t,x)}{\beta_l+1} \prod_{l'=1}^{k_{i-j}} \frac{X_{\beta_{l'}+2}^{0,\bar{h}}(t,x)}{(\beta_{l'}+1)(\beta_{l'}+2)} \Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{5.3.35}$$

Endemés,

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} |\tilde{p}_{t,x,\bar{h}}^{n+1,\varepsilon}| < C.$$

Prova. Sigui f una funció $\mathcal{C}^\infty$ amb suport compacte i simètrica. Definim

$$M^\varepsilon_{t,x} = E\Big\{ \exp\Big(\bar\lambda\, S^{\varepsilon,\bar h}(t,x)\Big)\ \chi^{\bar h}_{\delta,\beta}\Big(\varepsilon, \omega + \frac{\bar h}{\varepsilon}\Big)\ f\Big(\hat X^{\varepsilon,\bar h}(t,x)\Big)\Big\}.$$

La regla de la cadena (3.3.1) i (5.2.11) ens permeten de donar el desenvolupament de Taylor següent

$$\begin{aligned} f(\hat X^{\varepsilon,\bar h}(t,x)) &= f(X_1^{0,\bar h}(t,x)) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \frac{1}{j!} \sum^{(j)} f^{(k_j)}(X_1^{0,\bar h}(t,x)) \prod_{l=1}^{k_j} \frac{1}{\beta_l+1} X^{0,\bar h}_{\beta_l+1}(t,x) \\ &+ \varepsilon^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-\xi)^N}{N!} \sum^{(N+1)} f^{(k_{N+1})}(\hat X^{\varepsilon\xi,\bar h}(t,x)) \prod_{l=1}^{k_{N+1}} \hat X^{\varepsilon\xi,\bar h}_{\beta_l}(t,x)\, d\xi. \end{aligned} \tag{5.3.36}$$

Anàlogament, per cada δ i β,

$$\chi^{\bar h}_{\delta,\beta}(\varepsilon, \omega + \frac{\bar h}{\varepsilon}) = 1 + \varepsilon^{N+1} R^{1,\varepsilon}_{N+1}(t,x), \tag{5.3.37}$$

on $\{R^{1,\varepsilon}_{N+1}(t,x), \varepsilon \in (0,1]\}$ és uniformement fitada en $\mathbb{D}^\infty$, com pot ser fàcilment comprovat.
Per estudiar el terme $\exp(\bar\lambda S^{\varepsilon,\bar h}(t,x))$ emprarem l'expansió de Taylor

$$e^x = \sum_{j=0}^{N} \frac{x^j}{j!} + r_{N+1}(x) \qquad \text{amb} \qquad |r_{N+1}(x)| \le (e^x+1)\, \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!},$$

per $x = \bar\lambda(S^{\varepsilon,\bar h} - S^{0,\bar h})(t,x)$. Aleshores, tenint en compte que $S^{\varepsilon,\bar h}(t,x)$ és $\mathcal{C}^\infty$ respecte ε i utilitzant (5.2.12), (5.2.16), obtenim

$$\exp(\bar\lambda\, S^{\varepsilon,\bar h}(t,x)) = \exp(\bar\lambda S^{0,\bar h}(t,x)) \Big\{ \sum_{j=0}^{N} \frac{\varepsilon^j}{j!} G_j + \varepsilon^{N+1} G^\varepsilon_{N+1} \Big\} + \varepsilon^{N+1} R^{2,\varepsilon}_{N+1}(t,x), \tag{5.3.38}$$

on $G_j = \sum^{(j)} \bar\lambda^{k_j} \prod_{l=1}^{k_j} \frac{1}{(\beta_l+1)(\beta_l+2)} X^{0,\bar h}_{\beta_l+2}(t,x) \in \mathbb{D}^\infty$, $\{G^\varepsilon_{N+1}, \varepsilon \in (0,1]\}$ és uniformement fitada en $\mathbb{D}^\infty$ i

$$|R^{2,\varepsilon}_{N+1}(t,x)| \le \exp(\lambda S^{0,h}(t,x))\, R^{2,\varepsilon,0}_{N+1,1}(t,x) + \exp(\lambda S^{\varepsilon,h}(t,x))\, R^{2,\varepsilon,0}_{N+1,2}(t,x),$$

amb $\{R^{2,\varepsilon,0}_{N+1,i}(t,x), \varepsilon \in (0,1]\}$, $i = 1,2$, uniformement fitada en $\mathbb{D}^\infty$.

Des de (5.3.38) podem afirmar que $R^{2,\varepsilon}_{N+1}(t,x)\ \varphi_n(\bar\lambda S^{\varepsilon,\bar h}(t,x))\ \varphi_n(\bar\lambda S^{0,\bar h}(t,x))$, amb φ_n definida a (5.3.25), pertany a $\mathbb{D}^\infty$. A més a més, sobre B_n,

$$\begin{aligned}|D^k R^{2,\varepsilon}_{N+1}(t,x)| &\le \exp(\lambda S^{0,h}(t,x))\ R^{2,\varepsilon,k}_{N+1,1}(t,x)\ +\ \exp(\lambda S^{\varepsilon,h}(t,x))\ R^{2,\varepsilon,k}_{N+1,2}(t,x)\\ &\quad +\ R^{2,\varepsilon,k}_{N+1,3}(t,x),\end{aligned}$$

amb $\{R^{2,\varepsilon,k}_{N+1,i}(t,x), \varepsilon\in(0,1]\}$ uniformement fitada en $\mathbb{D}^\infty(L^2(([0,T]\times[0,1])^k))$ per qualssevol $i=1,2,3,\ k\ge 1$. Aquesta desigualtat pot ser provada per inducció sobre k.

Ajuntant els desenvolupaments (5.3.36)-(5.3.38) tenim

$$\begin{aligned}M^\varepsilon_{t,x} &= E\{f(X^{0,\bar h}_1(t,x))\exp(\bar\lambda S^{0,\bar h}(t,x))\}\\ &+ \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \sum_{j=0}^i \frac{1}{j!(i-j)!}\,E\Big\{\sum^{(j)}\sum^{(i-j)} f^{(k_j)}(X^{0,\bar h}_1(t,x))\ \exp(\bar\lambda S^{0,\bar h}(t,x))\ \bar\lambda^{k_{i-j}}\\ &\times \prod_{l=1}^{k_j}\frac{X^{0,\bar h}_{\beta_l+1}(t,x)}{\beta_l+1}\ \prod_{l'=1}^{k_{i-j}}\frac{X^{0,\bar h}_{\beta_{l'}+2}(t,x)}{(\beta_{l'}+1)(\beta_{l'}+2)}\Big\}\\ &+ \varepsilon^{n+1}\ R^{3,\varepsilon}_{n+1}(t,x).\end{aligned}$$

Sigui $(f_n)_{n\ge1}$ una successió de funcions satisfent els mateixos requeriments que f i convergint a $\delta_{\{0\}}$ quan $n\to\infty$. La Proposició 5.3.9 aplicada a $F^0 = X^{0,\bar h}_1(t,x)$, $G^0 = \bar\lambda^{k_{i-j}}\prod_{l=1}^{k_j}\frac{X^{0,\bar h}_{\beta_l+1}(t,x)}{\beta_l+1}\prod_{l'=1}^{k_{i-j}}\frac{X^{0,\bar h}_{\beta_{l'}+2}(t,x)}{(\beta_{l'}+1)(\beta_{l'}+2)}$ assegura (5.3.35).

Com que el drap brownià W té una llei simètrica , els termes senars a (5.3.34) són zero.

En quant a la resta, un anàlisi detallat de $R^{3,\varepsilon}_{n+1}(t,x)$ mostra que pot ser descrita mitjançant una suma finita de factors dels tipus següents:

$$R^\varepsilon_1 = f^{(a_1)}(X^{0,\bar h}_1(t,x))\ \exp(\bar\lambda S^{0,\bar h}(t,x))\ G^\varepsilon_1,$$

$$R^\varepsilon_2 = f^{(a_2)}(X^{0,\bar h}_1(t,x))\ G^\varepsilon_2\ R^{2,\varepsilon}_{N_1}(t,x)\ \chi^{\bar h}_{\delta,\beta}\Big(\varepsilon,\omega+\frac{\bar h}{\varepsilon}\Big),$$

$$R^\varepsilon_3 = \int_0^1 f^{(a_3)}(\hat X^{\varepsilon\xi,\bar h}(t,x))\ G^{\varepsilon\xi}_3\ G^\varepsilon_4\ \exp(\bar\lambda S^{0,\bar h}(t,x))d\xi,$$

$$R^\varepsilon_4 = \int_0^1 f^{(a_4)}(\hat X^{\varepsilon\xi,\bar h}(t,x))\ G^{\varepsilon\xi}_5\ R^{2,\varepsilon}_{N_2}(t,x)\ \chi^{\bar h}_{\delta,\beta}\Big(\varepsilon,\omega+\frac{\bar h}{\varepsilon}\Big)d\xi,$$

amb $\{G_i^\varepsilon, \varepsilon \in (0,1]\}$, $i = 1, \cdots, 5$, uniformement fitades en $\mathbb{D}^\infty$ i alguns enters positius $a_i, i = 1, \cdots, 4, N_1, N_2$. La Proposició 5.3.9 assegura

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} |E(R_1^\varepsilon + R_3^\varepsilon)| \leq C,$$

mentre que la Proposició 5.3.8 implica

$$\sup_{0<\varepsilon\leq 1} |E(R_2^\varepsilon + R_4^\varepsilon)| \leq C.$$

Això completa la demostració. $\square$

5.3.4 El desenvolupament

Donarem el resultat principal d'aquest capítol. És una conseqüència immediata d'ajuntar els resultats obtinguts a la Subsecció 5.3.1 i 5.3.3. Després comprovarem que la hipòtesi ($\mathrm{H}_4 4$) pot ser satisfeta sota condicions sobre els coeficients σ, b i la condició inicial.

El Teorema següent ve a ser com un Corol.lari de les Proposicions 5.3.1 i 5.3.10. Considerem la hipòtesi ($\mathrm{H}_4 3$) sense cap restricció, recordem $K_y^{\min} = \{h_1, \cdots, h_{n_0}\}$ i $a = \|h_j\|_{\mathcal{H}}^2$, $j = 1, \cdots, n_0$.

Teorema 5.3.11 *Assumim* ($\mathrm{H}_4 1$)-($\mathrm{H}_4 4$). *Per a tot* $y \in \mathbb{R}$, $y \neq \Psi_{X_0}^0(t,x)$, *quan* $\varepsilon \downarrow 0$,

$$p_{t,x}^\varepsilon(y) \sim \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}a\right) \left(p_{t,x}^0 + \varepsilon\, p_{t,x}^1 + \varepsilon^2 p_{t,x}^2 + \cdots \right), \qquad (5.3.39)$$

on $p_{t,x}^i$ *s'anul.len per* i *senar i per* i *parell*

$$p_{t,x}^i = \sum_{j=1}^{n_0} p_{t,x,h_j}^i,$$

on p_{t,x,h_j}^i *són definits a* (5.3.35). *El símbol* $\sim$ *a* (5.3.39) *vol dir*

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{p_{t,x}^\varepsilon(y) - \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}a\right) \left(p_{t,x}^0 + \varepsilon p_{t,x}^1 + \cdots + \varepsilon^{k-1} p_{t,x}^{k-1}\right)}{\varepsilon^{k-1} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}a\right)} < +\infty$$

per qualsevol $k \geq 1$.

Observació 5.3.12. El compliment de (H_44) pot ser assegurat sota condicions sobre els coeficients σ, b i condició inicial X_0. Per facilitar els càlculs assumim que $K_y^{\min} = \bar{h}$. Aleshores, la condició

$$\|A(t,x)\|_{HS}^2 := \int_0^t \int_0^1 \int_0^t \int_0^1 f_2^{\bar{h}}\Big((t,x);(r_1,z_1),(r_2,z_2)\Big)^2 dr_1\, dz_1\, dr_2\, dz_2 < \frac{1}{4}$$

implica (H_44), on acabem d'utilitzar la notació introduïda abans de la Proposició 5.3.6 i $\|\cdot\|_{HS}$ vol dir la norma de Hilbert-Schmidt.
Com a conseqüència de (5.3.24) i el Lema 5.4.4 obtenim

$$\begin{cases} f_2^{\bar{h}}((t,x);\cdot) = \dfrac{1}{2}\lambda^{\bar{h}}\, D^2_{\cdot}\, S^{0,\bar{h}}(t,x), \\ \|\bar{h}\|_{\mathcal{H}} = \lambda^{\bar{h}}\{E|X_1^{0,\bar{h}}(t,x)|^2\}^{1/2}. \end{cases} \tag{5.3.40}$$

El procés $\{D^2_{(r_2,z_2)(r_1,z_1)} S^{0,\bar{h}}(t,x),\ ((r_2,z_2),(r_1,z_1)) \in ([0,T]\times[0,1])^2\}$ és determinista i satisfà

$$\begin{aligned} D^2_{(r_2,z_2)(r_1,z_1)} S^{0,\bar{h}}(t,x) &= G_{t-r_1}(x,z_1)\ \sigma'(\Psi^{\bar{h}}_{X_0}(r_1,z_1))\ D_{r_2,z_2} X_1^{0,\bar{h}}(r_1,z_1) \\ &+ G_{t-r_2}(x,z_2)\ \sigma'(\Psi^{\bar{h}}_{X_0}(r_2,z_2))\ D_{r_1,z_1} X_1^{0,\bar{h}}(r_2,z_2) \\ &+ \int_{r_1\vee r_2}^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\ \sigma'(\Psi^{\bar{h}}_{X_0}(s,y))\ D^2_{(r_2,z_2)(r_1,z_1)} S^{0,\bar{h}}(s,y)\ \dot{\bar{h}}(s,y) ds dy \\ &+ \int_{r_1\vee r_2}^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\ \sigma''(\Psi^{\bar{h}}_{X_0}(s,y))\ D_{r_2,z_2} X_1^{0,\bar{h}}(s,y)\ D_{r_1,z_1} X_1^{0,\bar{h}}(s,y)\ \dot{\bar{h}}(s,y) ds dy \\ &+ \int_{r_1\vee r_2}^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\ b'(\Psi^{\bar{h}}_{X_0}(s,y))\ D^2_{(r_2,z_2)(r_1,z_1)} S^{0,\bar{h}}(s,y) ds dy \\ &+ \int_{r_1\vee r_2}^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)\ b''(\Psi^{\bar{h}}_{X_0}(s,y))\ D_{r_2,z_2} X_1^{0,\bar{h}}(s,y)\ D_{r_1,z_1} X_1^{0,\bar{h}}(s,y) ds dy. \end{aligned}$$

A més, (5.2.2) i les regles del càlcul de Malliavin donen

$$\begin{aligned} D_{r_1,z_1} X_1^{0,\bar{h}}(t,x) = &\ G_{t-r_1}(x,z_1)\ \sigma(\Psi^{\bar{h}}_{X_0}(r_1,z_1)) \\ &+ \int_{r_1}^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) \Big\{\sigma'(\Psi^{\bar{h}}_{X_0}(s,y))\ D_{r_1,z_1} X_1^{0,\bar{h}}(s,y)\ \dot{\bar{h}}(s,y) \\ &+ b'(\Psi^{\bar{h}}_{X_0}(s,y))\ D_{r_1,z_1}\ X_1^{0,\bar{h}}(s,y)\Big\}\ ds\, dy. \end{aligned}$$

Així, (5.3.9) i el mètode estàndard basat en la desigualtat de Hölder i el lema de Gronwall impliquen

$$\sup_{t,x} \left| \int_0^t \int_0^1 |D_{r_1,z_1} X_1^{0,\bar{h}}(t,x)|^2 \, dr_1 \, dz_1 \right|^p \le C \, \exp\{C \, (\|\sigma'\|_\infty^{2p} + \|b'\|_\infty^{2p})\}.$$

I per tant,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \int_0^1 \int_0^t \int_0^1 |D^2_{(r_2,z_2)(r_1,z_1)} S^{0,\bar{h}}(t,x)|^2 \, dr_1 \, dz_1 \, dr_2 \, dz_2 \right|^p \\ &\quad \le C \, \{\|\sigma'\|_\infty^{2p} + \|\sigma''\|_\infty^{2p} + \|b''\|_\infty^{2p}\} \, \exp\{p \, C \, (\|\sigma'\|_\infty^{2p} + \|b'\|_\infty^{2p})\}. \end{aligned} \tag{5.3.41}$$

Finalment, analitzant els resultats provats a [36] (vegeu la Proposició 1.4 i el Lema 2.5) podem concloure que

$$(\lambda^{\bar{h}})^2 := \frac{\|\bar{h}\|_{\mathcal{H}}^2}{E|X_1^{0,\bar{h}}(t,x)|^2} \le C, \tag{5.3.42}$$

amb C depenent de b, σ i la condició inicial. L'Observació és una conseqüència de (5.3.40), (5.3.41) i (5.3.42).

5.4 Apèndix

Objectiu

La secció està dedicada a demostrar dos lemes tècnics que hem utilitzat al llarg del present capítol.

Preliminars

Per obtenir el primer resultat usarem el lema de Garsia-Rodemich-Rumsey, i per tant, tot seguit, l'enunciarem.

Siguin $\Psi(x)$ i $p(x)$ dues funcions contínues i positives sobre $\mathbb{R}$, tals que Ψ i p són simètriques en 0, $p(x)$ és creixent per $x > 0$ i $p(0) = 0$, i Ψ és convexa amb $\lim_{x\to\infty} \Psi(x) = \infty$. Si R és un cub de $\mathbb{R}^n$, sigui $|R|$ el seu volum. Finalment, sigui R_1 el cub unitat.

Lema 5.4.1 (Teorema 1.1 [55]) *Si f és una funció mesurable sobre R_1 tal que*

$$\int_{R_1}\int_{R_1} \Psi\left(\frac{f(x)-f(y)}{p(|y-x|/\sqrt{n})}\right) dx\, dy = B < \infty,$$

aleshores existeix un conjunt K de mesura zero tal que si $x, y \in R_1 \setminus K$

$$|f(x)-f(y)| \leq 8\int_0^{|y-x|} \Psi^{-1}\Big(\frac{B}{u^{2n}}\Big)\, dp(u). \qquad (5.4.1)$$

Si f és contínua, (5.4.1) *es compleix per a tot x i y.*

A l'altre resultat necessitem la definició de derivada *Gâteaux* i el teorema següent:

Sigui F una aplicació entre dos espais de Banach, X i Y. La usual derivada direccional de F en x en la direcció v és

$$F'(x;v) := \lim_{t\downarrow 0}\frac{F(x+tv)-F(x)}{t},$$

quan aquest límit existeix. F admet una derivada *Gâteaux* en x, un element de l'espai $\mathcal{L}(X,Y)$ denotat per $\tilde{D}F(x)$, provat que per cada v de X, $F'(x;v)$ existeix i és igual a $\langle \tilde{D}F(x), v\rangle$. Notem que això és equivalent a dir que per cada v tenim

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{F(x+tv)-F(x)}{t} = \langle \tilde{D}F(x), v\rangle,$$

i que la convergència és uniforme respecte v en conjunts finits. Si en lloc de conjunts finits són compactes, la derivada es coneix com derivada *Hadamard*; i si són fitats, derivada de *Fréchet*.

Sigui X un espai de Banach. Denotarem per (P) al problema de minimitzar una funció donada sobre X subjecta a tres tipus de restriccions:

(i) Restricció de desigualtat: $g_i(x) \leq 0$, $i = 1, \cdots, n$, on cada g_i és una funcio real sobre X.

(ii) Restricció d'igualtat: $h_j(x) = 0, \ j = 1, \cdots, m$, on cada h_j és una funció real sobre X.

(iii) Restricció abstracta: $x \in C$, on C és un subconjunt donat de X.

El *Lagrangià* és la funció $L(x, \lambda, r, s, k) : X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida per

$$L(x, \lambda, r, s, k) \ := \ \lambda f(x) \ + \ \langle r, g(x) \rangle \ + \ \langle s, h(x) \rangle \ + \ k|(\lambda, r, s)| d_C(x),$$

on d_C és la distància usual associada a C (si $C = X$, d_C és idènticament zero). Denotem per ∂ el gradient generalitzat.

Teorema 5.4.2 (Teorema 6.1.1 [15]) *Sigui x que resol (P). Aleshores per cada k suficientment gran existeixen $\lambda \geq 0$, $r \geq 0$ i s, no tots zero, tals que $\langle r, g(x) \rangle = 0$ i $0 \in \partial_x L(x, \lambda, r, s, k)$.*

Resultats

El primer lema és una desigualtat exponencial per integrals estocàstiques on hi participa el nucli de la calor $G_{t-s}(x, y)$. És una extensió del Lema 2.3 de l'article de C. Rovira i S. Tindel [48], amb una demostració similar (vegeu també el de C. Rovira i M. Sanz-Solé [46]). Per aquest motiu nosaltres donarem tan sols un esborrany de la prova amb els principals arguments.
Denotem per $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, T]$ la σ-àlgebra generada per $\{W_{s,x}, (s, x) \in [0, t] \times [0, 1]\}$.

Lema 5.4.3 *Sigui $\tau = \{\tau(s, y), \ (s, y) \in [0, T] \times [0, 1]\}$ un procés $\mathcal{F}_t$-adaptat i de quadrat integrable. Considerem*

$$J(t, x) \ = \ \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x, y) \ \tau(s, y) \ W(ds, dy).$$

Fixem $\beta \in (3, \infty)$, $R > 0$ i sigui $A^{\beta, R} = \{\int_0^T \int_0^1 |\tau(s, y)|^{2\beta} ds \, dy \leq R\}$. Aleshores, existeixen constants K_1, K_2 positives tals que

$$P\{\, \|J\|_\infty \geq L, \ A^{\beta, R}\} \ \leq \ \exp\Big(- \frac{L^2}{R^{1/\beta}} \, K_2 \Big), \qquad (5.4.2)$$

per qualssevol $R, L > 0$ amb $\frac{L}{R^{1/2\beta}} \geq K_1$.

Prova. Fixem $0 \leq r \leq t$ in $[0,T]$, $x, z \in [0,1]$. Tenim

$$
\begin{aligned}
J(t,x) - J(r,z) &= \int_0^T \int_0^1 \Big(\mathbb{1}_{\{s \leq t\}} \, G_{t-s}(x,y) - \mathbb{1}_{\{s \leq r\}} \, G_{r-s}(z,y) \Big) \, \tau(s,y) W(ds,dy) \\
&= \int_r^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) \, \tau(s,y) \, W(ds,dy) \\
&+ \int_0^r \int_0^1 \Big(G_{t-s}(x,y) - G_{r-s}(x,y) \Big) \, \tau(s,y) \, W(ds,dy) \\
&+ \int_0^r \int_0^1 \Big(G_{r-s}(x,y) - G_{r-s}(z,y) \Big) \, \tau(s,y) \, W(ds,dy) \, .
\end{aligned}
$$

Sigui $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Fem constar que $\alpha \in (1, \frac{3}{2})$. Aleshores, pel Lema B.1 de [5], existeix una constant C_0 tal que

$$
\begin{aligned}
&\int_r^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y)^{2\alpha} \, ds \, dy \ \leq \ C_0 \, |t-r|^{\frac{3-2\alpha}{2}} \, , \\
&\int_0^r \int_0^1 \Big(G_{t-s}(x,y) - G_{r-s}(x,y) \Big)^{2\alpha} \, ds \, dy \ \leq \ C_0 \, |t-r|^{\frac{3-2\alpha}{2}} \, , \\
&\int_0^r \int_0^1 \Big(G_{r-s}(x,y) - G_{r-s}(z,y) \Big)^{2\alpha} \, ds \, dy \leq C_0 \, |x-z|^{3-2\alpha} \, .
\end{aligned}
$$

Definim

$$
\begin{aligned}
&\rho(u) = 2 \, C_0^{\frac{1}{2\alpha}} \, R^{\frac{1}{2\beta}} \, u^{\frac{1}{2}}, \qquad u \geq 0, \\
&d\Big((t,x), \, (r,z)\Big) = 2 \, |t-r|^{\frac{3-2\alpha}{2\alpha}} + |x-z|^{\frac{3-2\alpha}{\alpha}}, \\
&g(s,y) = \frac{\mathbb{1}_{\{s \leq t\}} \, G_{t-s}(x,y) - \mathbb{1}_{\{s \leq r\}} \, G_{r-s}(z,y)}{\rho\left(d(t,x), (r,z)\right)} \, \tau(s,y)
\end{aligned}
$$

i, per qualsevol $0 \leq u \leq T$,

$$
M_u = \int_0^u \int_0^1 g(s,y) \, W(ds,dy) \, .
$$

Llavors, $\{M_u; \mathcal{F}_u, \ u \in [0,T]\}$ és una martingala contínua amb procés creixent donat per

$$
\langle M \rangle_u = \int_0^u \int_0^1 g(s,y)^2 \, ds \, dy \, .
$$

Per la desigualtat de Hölder, sobre el conjunt $A^{\beta,R}$

$$\langle M\rangle_T \leq 1$$

Sigui $\Psi(x) = \exp(\frac{x^2}{4}),\ x \in \mathbb{R}$. Aleshores

$$E\left(\Psi\left(\frac{J(t,x)-J(r,z)}{\rho\Big(d\left((t,x),(r,z)\right)\Big)}\right)\mathbb{1}_{A^{\beta,R}}\right) \leq E_{\tilde{P}}\left\{\exp\left(\frac{1}{4}\sup_{0\leq u\leq 1}|Z_u|^2\right)\right\} = 2^{1/2}, \tag{5.4.3}$$

on $\{Z_u,\ 0 \leq u \leq 1\}$ és un moviment brownià definit sobre algun espai de probabilitats $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ tal que $M_u = Z_{\langle M\rangle_u}$.
Ara, procedim com a [50], [48].
Sigui

$$B = \iint_{([0,T]\times[0,1])^2} \Psi\left(\frac{J(t,x)-J(r,z)}{\rho\Big(d((t,x),(r,z))\Big)}\right) dt\, dx\ dr\, dz\,.$$

I des de (5.4.3) obtenim que

$$E\left(B\,\mathbb{1}_{A^{\beta,R}}\right) \leq T^2\ 2^{1/2}. \tag{5.4.4}$$

Pel lema de Garsia-Rodemich-Rumsey, per a les trajectòries en $A^{\beta,R}$ tenim

$$\|J\|_\infty \leq C_1\ R^{\frac{1}{2\beta}}\Big((\log_+\ B)^{1/2} + C_2\Big).$$

A més a més, (5.4.4) dóna

$$E\Big(\exp(\log_+\ B)\,\mathbb{1}_{A^{\beta,R}}\Big) \leq 2 + T^2\ 2^{1/2}.$$

Finalment, la desigualtat exponencial de Txebitxev implica

$$P\{\,\|J\|_\infty \geq L,\ A^{\beta,R}\} \leq \exp\left(-\frac{L^2}{R^{1/\beta}}\left(\Big(\frac{1}{C_1} - \frac{R^{\frac{1}{2\beta}}}{L}\ C_2\Big)^2 - \log(2+T^2\ 2^{1/2})\ \frac{R^{\frac{1}{\beta}}}{L^2}\right)\right)$$

i (5.4.2) es compleix sempre que $\frac{L}{R^{\frac{1}{2\beta}}} \geq C_1C_2$, amb $K = \frac{1}{8C_1^2}$, $K_1 = \max\{2\,C_1C_2,\ 2^{3/2}$ $\log(2+T^2\ 2^{1/2})^{1/2}C_1\}$. $\square$

Lema 5.4.4 *Assumim* (H$_4$1) *i* (H$_4$2). *Sigui* $h \in K_y^{min}$, *llavors existeix* $\lambda^h > 0$, *dependent de* h, *tal que*

$$\int_0^t \int_0^1 \dot{h}(s,z)\; W(ds,\, dz) = \lambda^h\; X_1^{0,h}(t,x), \tag{5.4.5}$$

on $X_1^{0,h}(t,x)$ *és definit a* (5.2.2).

Prova. Apliquem el mètode dels multiplicadors de Lagrange (vegeu, per exemple, [15]) Així, el Teorema 5.4.2 implica que existeixin $\lambda_1 \geq 0$ i $\lambda_2 \geq 0$, no anul.lant-se simultàneament, tals que

$$0 \in [\lambda_1 \partial\; \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \;+\; \lambda_2 \partial\; \{\psi_{X_0}^h(t,x) - y\}](h), \tag{5.4.6}$$

on ∂ denota el gradient generalitzat.
Les aplicacions $h \longrightarrow \|h\|_{\mathcal{H}}^2$, $h \longrightarrow \Psi_{X_0}^h(t,x)$ són contínuament diferenciables en el sentit Gâteaux. Així, els gradients generalitzats d'aquestes aplicacions es redueixen a un singletó, la corresponent derivada Gâteaux, que serà denotada per $\tilde{D}$ a partir d'ara. Hom pot comprovar que $\tilde{D}\|h\|_{\mathcal{H}}^2 = 2h$ i $\tilde{D}\Psi_{X_0}^h(t,x) \in \mathcal{H}$ satisfà

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\alpha,\beta}\Psi_{X_0}^h(t,x) = {} & G_{t-\alpha}(x,\beta)\; \sigma(\Psi_{X_0}^h(\alpha,\beta))\, \mathbb{1}_{\{\alpha\leq t\}} \;+ \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,y) \\ & \times\; \tilde{D}_{\alpha,\beta}\Psi_{X_0}^h(s,y) \Big\{ \sigma'(\Psi_{X_0}^h(s,y))\; \dot{h}(s,y) \;+\; b'(\Psi_{X_0}^h(s,y)) \Big\} ds\, dy. \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

Ara provarem que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$.
Doncs, suposem que $\lambda_1 = 0$; llavors $\tilde{D}\Psi_{X_0}^h(t,x) = 0$, contradint el Lema 2.5 a [36]. Si $\lambda_2 = 0$ aleshores $h \equiv 0$ i $h \in K_y^{\min}$. Això és contradictori amb la condició $\Psi_{X_0}^0(t,x) \neq y$. Per tant, per (5.4.6) existeix $\lambda^h > 0$ tal que

$$h(\alpha,\beta) = \lambda^h\; \tilde{D}_{\alpha,\beta}\Psi_{X_0}^h(t,x).$$

Utilitzant (5.4.7) hom té

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^1 \tilde{D}_{s,z}\Psi_{X_0}^h(t,x) W(ds,dz) = {} & \int_0^t \int_0^1 G_{t-s}(x,z)\; \sigma(\Psi_{X_0}^h(s,z)) \mathbb{1}_{\{s\leq t\}}\; W(ds,dz) \\ & + \int_0^t \int_0^1 \int_0^t \int_0^1 G_{t-\alpha}(x,\beta)\tilde{D}_{s,z}\Psi_{X_0}^h(\alpha,\beta)\; \Big\{\sigma'(\Psi_{X_0}^h(\alpha,\beta))\dot{h}(\alpha,\beta) \\ & + \; b'(\Psi_{X_0}^h(\alpha,\beta))\Big\}\; d\alpha\, d\beta\; W(ds,dz). \end{aligned}$$

Aleshores pel teorema de Fubini i la unicitat de solució obtenim

$$X_1^{0,h}(t,x) = \int_0^t \int_0^1 \tilde{D}_{s,z}\Psi_{X_0}^h(\alpha,\beta)\; W(ds,dz),$$

provant així (5.4.5). $\square$

Bibliografia

[1] S. Aida, S. Kusuoka i D. Stroock: *On the support of Wiener functionals.* A: Pitman Research, Notes in Math. Series 284, K.O. Elworthy and N. Ikeda (eds.), Asymptotic Problems in Probability Theory: functionals and asymptotic, Longman Scientific and Technical (1993).

[2] R.Azencott: *Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'integrales de Feymann.* Séminaire de Probabilités XVI 1980/81. Lecture Notes in Math. 921 (1982) 237-284.

[3] R.Azencott: *Densité de diffusions en temps petit: Développements asymptotiques.* Séminaire de Probabilités XVIII 1982/83. Lecture Notes in Math. 1059 (1984) 402-498.

[4] R. Azencott et al: *Géodésiques et diffusions ne temps petit.* Séminaire de Probabilités Université de Paris (1981). Astérisque, vol 84-85.

[5] V. Bally, A. Millet i M. Sanz-Solé: *Approximation and Support Theorem in Hölder norm for Parabolic Stochastic Partial Differential Equations.* The Annals of Probability Vol 23, 1 (1995) 178-222.

[6] V. Bally i E. Pardoux: *Malliavin Calculus for white noise driven parabolic SPDEs.* Preprint.

[7] G .Ben Arous: *Méthodes de Laplace et de la phase stationnaire sur l'espace de Wiener.* Stochastics, vol 25 (1988) 125-153.

[8] G .Ben Arous: *Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus.* Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., 4^e sèrie, t 21 (1988) 307-331.

[9] G .Ben Arous: *Développement asymptotique sur la diagonale.* Ann. Inst. Fourier 39, 1 (1989) 1-17.

[10] G .BEN AROUS: *Noyau de la chaleur hypoelliptique et geometrie sous-riemannieme.* A: M. Métivier i S. Watanabe (eds), Lecture Notes in Mathematics 1322 (1989) 1-17. Springer-Verlag, Berlin.

[11] G. BEN AROUS i R. LÉANDRE: *Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonnale (I).* Probab. Th. Rel. Fields 90, (1991) 175-202.

[12] G. BEN AROUS i R. LÉANDRE: *Décroissance exponentielle du noyau de la chaleur sur la diagonnale (II).* Probab. Th. Rel. Fields 90, (1991) 337-402.

[13] J.M. BISMUT: *Large deviations and the Malliavin Calculus.* Progress in Mathematics, vol 45. Editat per J. Coates i S. Helgason. Birkhäuser (1984) Boston.

[14] F. CHENAL i A. MILLET: *Uniform Large deviations for parabolic SPDEs and applications.* Stochastic Processes and their Applications 72 (1997) 161-186.

[15] F.H. CLARKE: *Optimization and Nonsmooth Analysis.* Classics in Applied Mathematics 5. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1990).

[16] H. DOSS: *Quelques formules asymptotiques pour les petites perturbations de systèmes dynamiques.* Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol XVI, n 1 (1980) 17-28.

[17] S. FANG: *Une inégalité isopérimetrique sur l'espace de Wiener.* Bull. Sc. Math. 2^{e} série 112 (1988) 345-355.

[18] M. FARRÉ i D. NUALART: *Nonlinear stochastic integral equation in the plane.* Stoch. Proc. and their Applic. 46 (1993) 219-239.

[19] L. HÖRMANDER: *Hypoelliptic second order differential equations.* Acta Mathematica 119 (1967) 147-171.

[20] K. KANNAI: *Off diagonal short time asymptotics for fundamental solutions of difussion equations.* Comm. In Partial Differential Equations, 2(8) (1977) 781-830.

[21] YU.I KIFER: *on the asymptotics of the transition density of processes with small diffusion.* Theory of Probability and its Applications, Vol 21, n 3 (1976) 513-522-

[22] A. KOHATSU-HIGA, D. MÁRQUEZ-CARRERAS i M. SANZ-SOLÉ: *Asymptotic behavoiur of the density in a parabolic SPDE.* Preprint.

[23] R. LÉANDRE: *Estimations en temps petit de la densité d'une diffusion hypoelliptique.* C.R.Acad. Sc. Paris, t 301, Série I, n 17 (1985) 801-804.

[24] R. LÉANDRE: *Renormalisation et calcul de variations stochastiques.* C.R.Acad. Sc. Paris, t 302, Série I, n 3 (1986) 135-138.

[25] R. LÉANDRE: *Majoration en temps petit de la densite d'une diffusion dégénérée.* Probab. Th. Rel. Fields 74 (1987) 289-294.

[26] R. LÉANDRE: *Minoration en temps petit de la densite d'une diffusion dégénérée.* Journal of Functional Analysis 74 (1987) 399-414.

[27] R. LÉANDRE: *Intégration dans la fibre associée à une diffusion dégénérée.* Probab. Th. Rel. Fields 76 (1987) 341-358.

[28] R. LÉANDRE: *Applications quantitatives et geometriques du calcul de Malliavin.* Lecture Notes in Mathematics 1322 (1989) 109-135. Springer-Verlag, Berlin.

[29] R. LÉANDRE i F. RUSSO: *Estimation de Varadhan pour des diffusions à deux paramètres.* Probab. Th. Rel. Fields 84 (1990) 429-451.

[30] R. LÉANDRE i F. RUSSO: *Small Stochastic perturbation of a one-dimensional wave equation.* A: H. Korezlioglu and A.S. Ustunel eds., Stoc. Analysis and Rel. Topics. Progress in Prob. 31 (1992) 285-332.

[31] R. LIPSTER i A.N. SHIRYAYEV: *Statistics of random process I.* General Theory. (1977) Springer-Verlag.

[32] D. MÁRQUEZ-CARRERAS i M. SANZ-SOLÉ: *Small perturbations in a hyperbolic stochastic differential equation.* Stochastic Processes and their Applications 68 (1997) 133-154.

[33] D. MÁRQUEZ-CARRERAS i M. SANZ-SOLÉ: *Expansion of the density: A Wiener-Caos approach.* Es publicarà a Bernouilli.

[34] D. MÁRQUEZ-CARRERAS i M. SANZ-SOLÉ: *Taylor expansion of the density in a stochastic Heat equation.* Es publicarà a Collectanea Mathematica.

[35] A. MILLET i M. SANZ-SOLÉ: Points of positive density for the solution to a hyperbolic *SPDE*. Potential Analysis 7 (1997) 623-659.

[36] A. MILLET i M. SANZ-SOLÉ: *Varadhan estimates for the density of the solution to a parabolic Stochastic partial differential equation,* A: A. Truman. I.M. Davies i K. Elworthy eds. Stoch. Analysis and Applications 330-342, Word Scientific Pub. Singapore 1996.

[37] S.A. MOLCHANOV: *Diffusion processes and Riemannian geometry.* Russian Math. Surveys 30, 1 (1975) 1-63.

[38] P.L. MORIEN: *Thèse doctorat de l'Université Paris 6* (París 1996).

[39] J. NEVEU: *Processus Aléatoires Gaussiens.* Séminaire de Mathématiques Supérieures (1968). Les Presses de l'Université de Montreal.

[40] J.R. NORRIS: *Twisted sheets.* Journal Functionnal Analysis 132 (1995) 219-239.

[41] D. NUALART: *Malliavin Calculus and Related Topics.* (1995) Springer- Verlag.

[42] D. NUALART: *Analysis on Wiener space and Anticipating Stoch. Calculus.* Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXV (1995). Lecture Notes in Mathematics 1690 (1998) 123-227. Lectures Notes in Mathematics.

[43] D. NUALART i M. SANZ-SOLÉ: *Malliavin Calculus for two-parameter Wiener functinals.* Z. Wahrscheinlichkitstheorie Verw. Gebiete 70 (1985) 573-590.

[44] D. NUALART i M. SANZ-SOLÉ: *Stochastic differential equations on the plane: Smoothness of the solution.* Journal of Multivariate Analysis, Vol 31, n 1 (1989) 1-29.

[45] C. ROVIRA: *Contribució a l'estudi de les equacions diferencials estocàstiques.* Tesi doctoral, Universitat de Barcelona (1995).

[46] C. ROVIRA i M. SANZ-SOLÉ: *The law of the solution to a nonlinear SPDE.* Journal of Theoretical Probability Vol 9 (1996) 863-901.

[47] C. ROVIRA i M. SANZ-SOLÉ: *A nonlinear hyperbolic SPDE: approximations and support.* A: Stochastic Partial Differential Equations, A. Etheritdge (ed). Lond. Math. Soc. Lect. Note 216 (Cambridge University Press, 1995) 241-261.

[48] C. ROVIRA i S. TINDEL: *Sharp Laplace Asymptotics for SPDEs: The Parabolic and Elliptic cases.* Mathematics Preprint Series 243 (1997).

[49] I.N. SNEDDON: *Elements of Partial differential equations.* McGraw-Hill (1957).

[50] R.B. Sowers: *Large Deviations for a reaction-diffusion equation with non-gaussian perturbations.* The Annals of Probability 20 (1992) 504-537.

[51] D.W. Stroock: *Homogeneous chaos revisited.* A: Séminaire de Probabilités XXI. Lecture Notes in Mathematics 1247 (1987) 1-8.

[52] S. Takanobu i S. Watanabe: *Asymptotic expansion formulas of the Schilder type for a class of conditional Wiener functional integrations.* A: Pitman Research Notes in Math. Series 284, K.O. Elworthy and N. Ikeda (Eds) (1993) 194-241.

[53] S.R.S. Varadhan: *On the behavior of the fundamental solution of the Heat equation with variables coefficients.* Comm. on Pure and Applied Mathematics, Vol XX (1967) 431-455.

[54] S.R.S. Varadhan: *Diffusion processes in a small time interval.* Comm. on Pure and Applied Mathematics, Vol XX (1967) 659-685.

[55] J.B. Walsh: *An introduction to Stochastic differential equations.* École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIV-1984. Lecture Notes in Math. 1180 (1986) 266-437.

[56] S. Watanabe: *Analysis of Wiener Functionals (Malliavin Calculus) and its appications to heat kernels.* Ann. Probab 15 (1987) 1-39.

UNIVERSITAT DE BARCELONA
FACULTAT DE BIOLOGIA

Amb data 15-12-1998 s'ha procedit a la lectura de la TESI DOCTORAL d'En/Na David Márquet Carreras davant el Tribunal sotasignant, i ha obtingut la qualificació de Excel·lent "cum laude"

VOCALS