ESTUDI ALGEBRAIC

DE CERTES LOGIQUES INTUICIONISTES MODALS

JOSEP MARIA FONT I LLOVET

pletament irreductible i $D \subseteq D'\}$; però si no es complís la inclusió contrària, existiria un $a \notin D$ tal que $a \in D'$ per tot $D' \in \mathfrak{D}$ completament irreductible tal que $D \subseteq D'$. Ara bé, la proposició 4 comporta que si $a \notin D$ aleshores existeix un $D' \in \mathfrak{D}$ completament irreductible tal que $a \notin D'$ i $D \subseteq D'$, i segons la nostra hipòtesi hauria de ser $a \in D'$, contradicció. Per tant per tot $D \in \mathfrak{D}$ tenim que $D = \bigcap \{D' \in \mathfrak{D} : D'$ és completament irreductible i $D \subseteq D'$, és a dir, els completament irreductibles de $\mathfrak{D}$ formen una base de $\mathfrak{D}$; i evidentment aquesta base és la més petita possible ja que per la seva mateixa naturalesa els sistemes deductius completament irreductibles han de formar part de qualsevol base de $\mathfrak{D}$. #

III.2 ELS MAXIMALS I LA SIMPLICITAT

Així com la idea de "teoria" engendra el concepte de sistema deductiu, la idea encara més important de teoria consistent i completa té el següent homòleg algebraic:

Definició 1

Un $D \in \mathfrak{D}$ és maximal ssi $D \neq A$ i per tot $D' \in \mathfrak{D}$, si $D \subsetneq D'$ aleshores $D' = A$.

Com a la secció anterior, un H-maximal serà un maximal de $\mathfrak{D}_H$. A continuació assenyalem alguns fets trivials entorn aquests dos conceptes:

Proposició 1

Tot sistema deductiu maximal és completament irreductible (i, per tant, irreductible, i, per tant, primer) . #

El recíproc d'aquesta proposició no és cert; ara bé, a la proposició 3.1 veurem una caracterització més precisa dels maximals en termes del completament irreductibles.

Proposició 2

Si un sistema deductiu és H-maximal, aleshores és maximal. #

El recíproc d'aquesta tampoc no és cert, com ens mostra l'exemple VI.8 ;

en aquest mateix veiem que no tot H-sistema deductiu H-maximal ha de ser obert. Una altra cosa que podríem pensar és que si D és un H-sistema deductiu que és H-maximal aleshores D^o , que és el més gran sistema deductiu contingut en D, podria ser maximal; però no és pas veritat, segons podem veure a l'exemple VI.5 . Més endavant, a la proposició IV.2.15, millorarem aquesta hipòtesi en un cas especial.

A continuació donarem caracteritzacions dels sistemes deductius maximals a les que veurem com les operacions naturals d'implicació juguen a les aHt el mateix paper que juga el . a les àlgebres de Heyting.

<u>Proposició 3</u>

Per a tot $D \in \mathfrak{D}$ les següents afirmacions són equivalents :

(1) D és maximal .

(2) $D \neq A$ i $\forall a,b \in A$, si $a \notin D$ i $b \notin D$ aleshores $a*b \in D$.

(3) $D \neq A$ i $\forall a,b \in A$, si $(a*b)*b \in D$ aleshores $a \in D$ o $b \in D$.

(4) $\forall a \in A$, $a \notin D$ si i solament si $\neg^* a \in D$.

Demostració:

(1) implica (2) : Si $a \notin D$, $D \subsetneq \mathbb{D}(D,a)$ i per tant $\mathbb{D}(D,a) = A$, d'on per tot $b \notin D$, $b \in \mathbb{D}(D,a)$ que equival a $a*b \in D$.

(2) implica (3) : Suposem que $(a*b)*b \in D$ i que $b \notin D$; aleshores, com que D és tancat per (MP*), ha de ser $a*b \notin D$ i per (2) tenim $a \in D$.

(3) implica (1) : Si existeix un $D' \in \mathfrak{D}$ tal que $D \subsetneq D'$, existeix un $x \in D'$ tal que $x \notin D$. Ara bé, per qualsevol $y \in A$, com que per la proposició II.3.2.(ix) tenim que $(x*(x*y))*(x*y) = 1 \in D$, per (3) resulta que $x \in D$ o bé $x*y \in D$, per tant ha de ser $x*y \in D$, d'on $x*y \in D'$, i

$x \in D'$ resulta que $y \in D'$ per tot $y \in A$, és a dir, $D' = A$: D és maximal .

(2) implica (4) : Si $a \notin D$, com que $0 \notin D$ ja que $D \neq A$, resulta que $\neg^* a = a^* 0 \in D$. Inversament, i $\neg^* a = a^* 0 \in D$ no pot ser $a \in D$ ja que per (MP*) tindríem $0 \in D$, és a dir, $D = A$, que no és possible .

(4) implica (1) : Si existís un $D' \in \mathfrak{D}$ tal que $D \subsetneq D'$, existiria un $a \in D'$ tal que $a \notin D$, per tant hauria de ser $a^* 0 \in D$ és a dir que tindríem $a^* 0 \in D'$ i per tant $0 \in D'$, d'on $D' = A$: D és maximal. #

Volem cridar l'atenció sobre dues coses: En primer lloc, la condició (4) es pot llegir, alternativament, " $\forall a \in A$, $a \in D$ o bé $\neg^* a \in D$, però no pas ambdós alhora" , que és la forma algebraica de la definició clàssica d'una teoria consistent i completa (per a cada sentència, o bé ella o bé la seva negació hi pertanyen, però no les dues) ; és una nova mostra del funcionament lògic de negació que té l'operació $\neg^*$.

En segon lloc, la condició (3) expressa el fet que per a determinades operacions $\circ$, l'expressió $(a \circ b) \circ b$ es pot assimilar funcionalment a un suprem en el sentit que generalitza el concepte de sistema deductiu primer en àlgebres que no disposen d'operacions reticulars. Fou Sales qui primer s'adonà , a [56] , que en una àlgebra de Hilbert l'operació definida per (a.b).b , en cas de ser commutativa, definia un suprem per a l'ordre propi de l'àlgebra. Pla a [45] reprengué la idea i observà que els sistemes deductius d'una àlgebra de Hilbert que satisfeien la condició (3) amb . , i que ell anomenà "fortament primers", coincidien amb els maximals. Veiem que en el nostre cas passa exactament el mateix amb * . Les àlgebres de Hilbert que satisfan la "condició de Sales" (commutativitat de l'operació esmentada) s'anomenen "àlgebres d'Abbott", o "àlgebres d'implicació" per Rasiowa que tanmateix , a [50] , les defineix, seguint a Abbott, amb una condició equivalent. Més interès tenen les "àlgebres de Sales" que hom obté imposant la condició de Sales a una àlgebra deductivament completa; aquestes àlgebres foren introduïdes per A. Torrens a [72] i estudiades més a fons per aquest autor i A. Rodríguez a [73] i [52] respectivament.

Més endavant veurem una altra caracterització dels sistemes deductius maximals en termes de la simplicitat de certes àlgebres.

La següent proposició correspon al teorema de completesa de Gödel, ja que ve a dir que tota teoria consistent es pot incloure en una teoria consistent i completa.

Proposició 4

Si $D \in \mathfrak{D}$ i $D \neq A$ aleshores existeix un sistema deductiu D' maximal tal que $D \subseteq D'$.

Demostració:

Cal només comprovar que la família $\mathfrak{D}^D$ és inductiva superiorment, cosa immediata, i pel Lema de Zorn té un maximal, que clarament és el que busquem. #

Corol.lari

Per tot $a \in A$, si $Ia \neq 0$, aleshores existeix un sistema deductiu D maximal tal que $a \in D$.

Demostració:

Aplicar la proposició 4 al sistema deductiu $\mathbb{D}(a)$, ja que $Ia \neq 0$ és equivalent a $\mathbb{D}(a) \neq A$. #

És a dir, que en particular tota sentència no necessàriament falsa està inclosa en alguna teoria consistent i completa. En la seva forma algebraica aquest darrer corol.lari serà usat amb molta freqüència, especialment quan treballarem amb el **radical**.

Recordem ara una definició d'àlgebra universal:

Definició 2

Una àlgebra de Heyting topològica és simple ssi té exactament dues congruències : la diagonal (o identitat) i la total (o burda) .

De la definició es segueix que si A és simple, A és no degenerada ($A \neq \{1\}$) i a més tenim la següent

Proposició 5

Per a tota aHt A les següents afirmacions són equivalents:

(1) A és simple.

(2) A té exactament dos sistemes deductius: $\{1\}$ i A .

(3) A té exactament dos elements oberts: 0 i 1 .

(4) A té exactament dues imatges homomorfes: $\{1\}$ i A .

Demostració:

Per la proposició II.1.4., (1) equival a (2), i pel corol.lari de la proposició 5, (2) equival a (3) . D'altra banda és sabut que hi ha una correspondència bijectiva entre epimorfismes i congruències, per tant (1) és també equivalent a (4) . #

Tenint en compte que l'única àlgebra de Hetying simple és l'àlgebra de Boole de dos elements, podem derivar el següent

Corol.lari

Una aHt A és simple ssi B és una àlgebra de Heyting simple .

Queda ara clar que una aHt A és simple si i solament si el seu interior és l'interior simple descrit a I.3, i, per tant, que a tota àlgebra de Heyting hi podem definir una estructura d'àlgebra de Heyting topològica simple.

La següent proposició expressa la relació que hi ha entre àlgebres simples i sistemes deductius maximals, relació completament homòloga a la que es formula en els mateixos termes per a àlgebres de Heyting, però la nostra es pot considerar més rica ja que, mentre d'àlgebres de Heyting simples només n'hi ha una, d'aHt simples n'hi ha tantes com en vulguem.

Proposició 6

Per a tot $D \in \mathfrak{D}$ les següents afirmacions són equivalents:

(1) D és maximal .

(2) $A/\equiv_D$ és una aHt simple .

(3) $A/\sim_D$ és una àlgebra de Heyting simple .

Demostració:

(1) implica (2) : En $A/\equiv_D$ $\overline{0}$ i $\overline{1}$ són evidentment oberts, i són diferents ja que en cas contrari $A/\equiv_D = \{\overline{1}\}$, que equival a D = A , cosa impossible ja que D és maximal. Si $\overline{a} \neq \overline{1}$, $a \notin D$ i per tant $Ia.0 = a \to 0 \in D$;

però sempre $0.Ia = 1 \in D$, per tant $Ia \equiv_D 0$, és a dir $\bar{I}\bar{a} = \overline{Ia} = \bar{0}$: $A/\equiv_D$ és simple.

(2) implica (1) : Si existís un $D' \in \mathfrak{D}$ tal que $D \subsetneq D'$, existiria un $x \in D'$ tal que $x \notin D$, és a dir, $\bar{x} \neq \bar{1}$, per tant $\bar{I}\bar{x} = \overline{Ix} = \bar{0}$ d'on en particular $x \rightarrow 0 = Ix.0 \in D$ d'on $x \rightarrow 0 \in D'$ i per (MP$\rightarrow$) resultaria $0 \in D'$ és a dir, $D' = A$: D és maximal.

(1) implica (3) : Si D és maximal, $\mathfrak{D}^D = \{D , A\}$ i per tant $\forall x \in A$ si $x \in D$ aleshores $\mathbb{D}^D(x) = D = \mathbb{D}^D(1)$ d'on $\bar{x} = \bar{1}$; i si $x \notin D$, $\mathbb{D}^D(x) = A = \mathbb{D}^D(0)$ és a dir $\bar{x} = \bar{0}$: $A/\sim_D = \{\bar{0} , \bar{1}\}$, l'àlgebra de Boole de dos elements, és a dir, l'àlgebra de Heyting simple.

(3) implica (1) : Si existís un $D' \in \mathfrak{D}$ amb $D \subsetneq D'$, hi hauria un $x \in D'$ tal que $x \notin D$, i per tant $\mathbb{D}^D(x) = \mathbb{D}(D,x) \neq D = \mathbb{D}^D(1)$, d'on $\bar{x} \neq \bar{1}$ i per tant ha de ser $\bar{x} = \bar{0}$ és a dir $\mathbb{D}^D(x) = \mathbb{D}^D(0) = A \subseteq D'$ ja que $x \in D'$ i $\mathbb{D}^D(x) = \mathbb{D}(D,x)$. Per tant $D' = A$ i D resulta maximal. #

Acabem aquesta secció amb dues propietats de les àlgebres simples que necessitarem més endavant .

<u>Proposició 7</u>

Si A és una aHt simple, aleshores $T = \{0 , 1\}$.

Demostració:

0 i 1 són sempre tancats, i per tot $a \in A$, si $a \neq 0$, $\neg a \neq 1$ i per la simplicitat d'A $I\neg a = 0$, d'on $\delta a = \neg I \neg a = \neg 0 = 1$; per tant $T = \{0 , 1\}$. #

El recíproc d'aquesta proposició no és pas veritat, com podem veure a l'exemple VI. 7 .

Com a darrer resultat vegem què passa si amplifiquem una aHt simple.

Proposició 8

Si A és una aHt simple aleshores o bé A^+ és simple o bé $I^+ = I_p$ essent $p \in A^+ - A$.

Demostració:

Si $I^+p = p$ aleshores $B^+ = B \cup \{p\} = \{0 , p , 1\}$ d'on $I^+ = I_p$. Si no és aquest el cas, $I^+p = \sup^+ B - \{1\} = \sup^+\{0\} = 0$ d'on $B^+ = \{0 , 1\}$ és a dir que A^+ és simple . #

III.3 EL RADICAL I LA SEMISIMPLICITAT

En aquesta secció introduïm i relacionem tres conceptes d'origen divers: la semisimplicitat (àlgebra universal), el radical (sistemes clausura) i els elements peirceans (lògica algebraica) .

Definició 1

En una aHt un element $a \in A$ és un <u>element *-peirceà</u> ssi existeixen $b,c \in A$ tals que $a = ((b*c)*b)*b$. Designarem per P_* el conjunt dels elements *-peirceans, per a cada implicació * .

Una considerable i sorprenent millora d'aquesta definició serà obtinguda a la proposició 4.9 , per a quan * és $\rightarrow$ o $\Rightarrow$.

Reservarem el nom de H-peirceans per al mateix concepte referit al producte . de les àlgebres de Heyting, essent P_H el conjunt dels H-peirceans . Donarem també una nova i simple caracterització dels H-peirceans.

Aquesta nomenclatura fou introduïda per A. Monteiro a [39] en homenatge al matemàtic americà Charles Sanders Peirce (1839-1914), precursor dels moderns estudis d'història de la lògica i un dels primers a considerar la implicació com a operació algebraica; normalment el teorema de la lògica clàssica $((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$ rep el nom de Llei de Peirce.

Observem que tot element $\Rightarrow$-peirceà és obert; a la secció 4 estudiarem les relacions entre els tres conjunts d'elements peirceans, $P_{\rightarrow}$, $P_{\Rightarrow}$ i $P_{\not\rightarrow}$, i n'obtindrem algunes caracteritzacions . De moment els farem servir per a caracteritzar els sistemes deductius maximals i llur intersecció.

Proposició 1

Sigui D un sistema deductiu. Aleshores D és maximal si i solament si D és completament irreductible i $D \supsetneq P_*$.

Demostració:

Tot maximal és completament irreductible, i si prenem $a,b \in A$ qualssevol, si $a \in D$ com que $a*(((a*b)*a)*a) = 1 \in D$, resulta $((a*b)*a)*a \in D$ per (MP*) ; i si $a \notin D$, aleshores tant si $b \in D$ (en general) com si $b \notin D$ (per ser D maximal, proposició 2.3) tenim $a*b \in D$ i per tant ha de ser $(a*b)*a \notin D$ i novament perquè $a \notin D$ surt $((a*b)*a)*a \in D$. En qualsevol cas $((a*b)*a)*a \in D$, és a dir, $P_* \subseteq D$.

Si D és completament irreductible existeix un $x \in A$ tal que D és lligat a x; suposem que existís un $D' \in \mathfrak{D}$ tal que $D \subsetneq D'$; tindríem $x \in D'$. Prenguem ara un $y \in A$ qualsevol: com que tenim $((x*y)*x)*x \in D$ i $x \notin D$, ha de ser $(x*y)*x \notin D$ i per la proposició 1.3 això implica $x*y \in D$ d'on $x*y \in D'$ i com que $x \in D'$ per (MP*) $y \in D'$, és a dir, $D' = A$ i resulta que D és maximal . #

Definició 2

A tota aHt A el <u>radical d'A</u> és la intersecció de tots els sistemes deductius maximals d'A, i es designa per R(A).

Seguint la lectura lògica que anem fent dels sistemes deductius, podríem assenyalar que el radical és una característica deductiva molt important, ja que es tracta del conjunt de sentències que pertanyen a totes les teories consistents i completes. Tals sentències forçosament han de tenir una significació destacada, com en efecte veurem.

Denominarem <u>H-radical</u> la intersecció de tots els H-sistemes deductius H-maximals d'A, que designarem per $R_H(A)$. També es podria parlar de radical primer (o irreductible) i de radical completament irreductible, en un sentit obvi, però en el nostre cas ambdós són iguals a $\{1\}$ ja que els completament irreductibles, i per tant els irreductibles, formen una base de $\mathfrak{D}$ segons la proposició 1.5 .

Notem que R(A) és un sistema deductiu propi, ja que $0 \notin R(A)$.

<u>Proposició 2</u>

Si A és totalment ordenat aleshores $R(A) = \{a \in A : Ia \neq 0\}$.

Demostració:

Si $Ia = 0$ evidentment $a \notin R(A)$ ja que R(A) és obert ; si $Ia \neq 0$ el corol.lari de la proposició 2.4 ens diu que existeix un $D \in \mathfrak{D}$ maximal tal que $a \in D$, però en un conjunt totalment ordenat només hi pot haver un sistema deductiu maximal , per tant $D = R(A)$ i $a \in R(A)$. #

<u>Proposició 3</u>

$R(A) = \mathbb{D}(P_*)$ per a cada operació natural d'implicació $*$.

Demostració:

Com que els completament irreductibles són base de $\mathfrak{D}$, tenim que $\mathbb{D}(P_*) = \bigcap \{ D \in \mathfrak{D} : D \text{ és completament irreductible i } D \supseteq P_* \}$. Però per la proposició 1 aquesta família coincideix amb la família dels sistemes deductius maximals, que té com a intersecció R(A); per tant $\mathbb{D}(P_*) = R(A)$. #

Definició 3

Una aHt A és semisimple ssi és isomorfa a un producte subdirecte d'aHt simples, és a dir, ssi existeix una família $\{A_i\}$ d'aHt simples i una subàlgebra A' del producte directe de la família tal que si p_i és la i-èsima projecció del producte sobre A_i, es té $p(A') = A_i$, i tenim que A és isomorfa a A'.

Proposició 4

Per a tota aHt A les següents afirmacions són equivalents:

(1) A és semisimple.

(2) $R(A) = \{1\}$.

(3) Per tots $a,b \in A$ tenim que $((a*b)*a)*a = 1$.

(4) Per tot $a \in A$ tenim que $((a*0)*a)*a = 1$.

Demostració:

(1) implica (2) : Sigui h l'isomorfisme entre A i A'; aleshores $h_i = p_i \circ h$ és un epimorfisme d'A sobre A_i, per tant A_i és isomorf al quocient $A/\equiv_{Ker\ h_i}$ on $Ker\ h_i = h_i^{-1}(\{1\})$; però cada A_i és simple, per tant també ho és aquest quocient, és a dir, que $Ker\ h_i$ és un sistema deductiu maximal; ara bé, h és injectiva, per tant $\{1\} = Ker\ h = \bigcap Ker\ h_i$, és a dir, que existeix una família de sistemes deductius maximals que té intersecció $\{1\}$, per tant amb més raó $R(A) = \{1\}$.

(2) implica (1) ja que es dedueix fàcilment del teorema 97 de [64] que una àlgebra qualsevol és semisimple si i solament si existeix una família de congruències maximals que doni com a intersecció la congruència identitat; per la proposició II.1.2, si $R(A) = \{1\}$ tenim una d'aquestes famílies; i del mateix teorema es dedueix que A és isomorfa a un producte subdirecte

de la família $\{A/\equiv_D$: D és sistema deductiu maximal d'A$\}$.

(3) equival a (2) després de la proposició 3.

(3) implica (4) ja que es tracta d'un cas particular.

(4) implica (3) ja que per la isotonia i antiisotonia de $*$, de $0 \leqslant b$ deduïm $((a*0)*a)*a \leqslant ((a*b)*a)*a$. #

La següent proposició, en les seves parts (1), (2) i (3), és anàloga a les parts (1), (2) i (3) de la proposició 2.6; aquí obtenim caracteritzacions sobre un sistema deductiu per a que doni quocients semisimples.

Proposició 5

Per a tot $D \in \mathfrak{D}$ les següents afirmacions són equivalents:

(1) D és intersecció de sistemes deductius maximals.

(2) $A/\equiv_D$ és una aHt semisimple.

(3) $A/\sim_D$ és una àlgebra de Heyting semisimple, és a dir, una àlgebra de Boole.

(4) $D \supseteq R(A)$.

(5) $D \supseteq P_*$.

Demostració:

(4) i (5) són trivialment equivalents, per la proposició 4 .

(1) implica (4) també trivialment.

(4) implica (1) : En general $D \subseteq \bigcap\{D' \in \mathfrak{D} : D'$ és maximal i $D' \supseteq D\}$; si la inclusió fos estricta existiria un $x \notin D$ tal que $x \in D'$ per tot $D' \in \mathfrak{D}$ maximal amb $D' \supseteq D$, i per la proposició 1.4 existiria un D" lligat a x tal que $D'' \supseteq D$, per tant $D'' \supseteq R(A)$; però com que D" és completament irreductible, per la proposició 1 resulta que és maximal i per tant hauria de ser

III.4 ALTRES ELEMENTS DISTINGITS

A la secció precedent hem vist ja un tipus d'elements distingits de les aHt: els elements $*$-peirceans. En aquesta secció en definirem d'altres i els relacionarem entre si i amb els anteriors, obtenint algunes caracteritzacions i propietats de clar significat lògic.

Definició 1

Un element $a \in A$ és *$*$-dens* ssi $\neg^* a = a{*}0 = 0$. El conjunt dels elements $*$-densos d'A serà designat per D_* .

Com de costum, anomenarem H-densos els elements densos de l'àlgebra de Heyting subjacent a A, és a dir, els $a \in A$ tals que $\neg a = a.0 = 0$, i designarem el seu conjunt per D_H . Com és sabut, $D_H = R_H(A)$.

Des d'un punt de vista lògic, els elements $*$-densos representen les sentències "gairebé certes relativament a la implicació $*$" ja que es tracta de sentències tals que llur $*$-negació és falsa. Evidentment en lògica clàssica això equival a ésser cert; algebraicament, una àlgebra de Heyting és de Boole si i solament si l'únic element H-dens és 1 .

Proposició 1

A tota aHt es compleix que $D_{\rightarrow} = D_{\not\rightarrow} \subseteq D_{\Rightarrow}$.

Demostració:

Tenint en compte que $I0 = 0$, $a \rightarrow 0 = a \not\rightarrow 0$; i si aquests són iguals a zero, aleshores $a \Rightarrow 0 = I(a \rightarrow 0) = I0 = 0$. #

III.4 ALTRES ELEMENTS DISTINGITS

A la secció precedent hem vist ja un tipus d'elements distingits de les aHt: els elements *-peirceans. En aquesta secció en definirem d'altres i els relacionarem entre si i amb els anteriors, obtenint algunes caracteritzacions i propietats de clar significat lògic.

Definició 1

Un element $a \in A$ és *-dens ssi $\neg^* a = a{*}0 = 0$. El conjunt dels elements *-densos d'A serà designat per D_* .

Com de costum, anomenarem H-densos els elements densos de l'àlgebra de Heyting subjacent a A, és a dir, els $a \in A$ tals que $\neg a = a.0 = 0$, i designarem el seu conjunt per D_H . Com és sabut, $D_H = R_H(A)$.

Des d'un punt de vista lògic, els elements *-densos representen les sentències "gairebé certes relativament a la implicació *" ja que es tracta de sentències tals que llur *-negació és falsa. Evidentment en lògica clàssica això equival a ésser cert; algebraicament, una àlgebra de Heyting és de Boole si i solament si l'únic element H-dens és 1 .

Proposició 1

A tota aHt es compleix que $D_{\rightarrow} = D_{\not\leftrightarrow} \subseteq D_{\Rightarrow}$.

Demostració:

Tenint en compte que $I0 = 0$, $a \rightarrow 0 = a \not\leftrightarrow 0$; i si aquests són iguals a zero, aleshores $a \Rightarrow 0 = I(a \rightarrow 0) = I0 = 0$. #

La inclusió precedent pot ser estricta, com a l'exemple VI.2 , o pot ésser una igualtat com a l'exemple VI.1 .

Proposició 2

A tota aHt es compleix que $D_{\Rightarrow} = R(A)$.

Demostració:

Si $a \in D_{\Rightarrow}$, $a \Rightarrow 0 = 0$ per tant si D és un sistema deductiu maximal qualsevol, $a \Rightarrow 0 \notin D$ i per tant ha de ser $a \in D$, és a dir, $a \in R(A)$.

Si $a \notin D_{\Rightarrow}$, $a \Rightarrow 0 \neq 0$ i també $I(a \Rightarrow 0) \neq 0$, per tant, pel corol.lari de la proposició 2.4, existeix un sistema deductiu maximal D tal que $a \Rightarrow 0 \in D$, d'on $a \notin D$ i per tant $a \notin R(A)$. #

Aquesta proposició és força interessant, ja que ens dóna una caracterització equacional del radical, i a més realça el valor lògic de la implicació i la negació intuicionistes: ens diu que les sentències que hem convingut en anomenar informalment "gairebé $\Rightarrow$-certes" són exactament les que apareixen a totes les teories consistents i completes.

Observem que el resultat anterior determina completament els elements $\Rightarrow$- densos. Ara, intentem determinar millor els elements $\rightarrow$-densos.

Proposició 3

A tota aHt A es compleixen les següents propietats:

(i) $D_{\rightarrow} = (D_H)^{\circ}$

(ii) $D_{\rightarrow}$ és un sistema deductiu

(iii) $D_{\rightarrow} \subseteq D_H = R_H(A)$.

Demostració:

(i) : En efecte, $a \in D_{\rightarrow}$ ssi $a \rightarrow 0 = 0$ ssi $Ia.0 = 0$ ssi $Ia \in D_H$; això equival a dir que $D_{\rightarrow} = (D_H)^{\circ}$, segons el que hem establert a la definició II.1.2 .

(ii) i (iii) són conseqüència directa de (i) usant la proposició II.1.6, encara que és fàcil demostrar-les directament. #

La igualtat de (i) és una bona caracterització de $D_{\rightarrow}$; pel que fa a la inclusió de (iii), no pot ser igualtat en general ja que $D_{\rightarrow}$ és un sistema deductiu, i en canvi D_H no té perquè ser-ho (és H-sistema deductiu, però podria no ser obert, com a VI.3) ; i en efecte, a VI.3 tenim una inclusió estricta, mentre que a VI.1 una igualtat. És a dir, la inclusió recíproca no és certa; tenim, però, un recíproc parcial:

Proposició 4

A tota aHt es compleix que $D_H \cap B \subseteq D_{\rightarrow}$.

Demostració:

En efecte, si $a \in D_H \cap B$ aleshores $a = Ia$ i tenim que $a \rightarrow 0 = Ia.0 =$ $= a.0 = 0$ ja que $a \in D_H$, per tant $a \in D_{\rightarrow}$. #

Tampoc aquesta inclusió es pot refinar més, ja que a VI.1 veiem que pot ser una igualtat, i a VI.7 que pot ser estricta.

Corol.lari

A tota aHt es compleix sempre que $D_H \cap B = D_{\rightarrow} \cap B$.

Demostració:

De la proposició 4 tenint en compte la proposició 3.(iii) . #

Un cop vistes les relacions entre $D_{\rightarrow}$ i D_H , passem ara a les relacions entre $D_{\Rightarrow}$ i D_H , és a dir, entre els radicals $R(A)$ i $R_H(A)$. En primer lloc tenim la

Proposició 5

A tota aHt A es compleix que $R_H(A) \cap B \subseteq R(A)$.

Demostració:

En efecte, si $Ia = a$ aleshores $a \Rightarrow 0 = I(Ia.I0) = I(a.0) = I0 = 0$ #

També aquesta inclusió pot ser estricta, com a VI.2, o bé igualtat com a VI.1 . De fet, si volem comparar els dos radicals, veurem que es poden trobar en qualsevol posició relativa que podem imaginar, i a més a cada una d'elles poden ser o no iguals a $\{1\}$ (el menor, s'entén). Heus-ne aquí una llista exhaustiva:

$\{1\} = R_H(A) \subsetneq R(A)$ a l'exemple VI.6

$\{1\} = R(A) \subsetneq R_H(A)$ a l'exemple VI.11

$\{1\} = R(A) = R_H(A)$ a qualsevol àlgebra de Boole monàdica

$\{1\} \neq R_H(A) \subsetneq R(A)$ a l'exemple VI.3

$\{1\} \neq R(A) \subsetneq R_H(A)$ a l'exemple VI.7

$\{1\} \neq R(A) = R_H(A)$ a l'exemple VI.1

Ambdós $\neq \{1\}$ i cap inclusió : a l'exemple VI.5

Ara establirem relacions entre els elements definits en aquesta secció i els elements *-peirceans, que són més complicats de calcular; de fet, alguns dels resultats que obtindrem ens en donaran caracteritzacions molt simples. En primer lloc enunciarem i demostrarem una caracterització dels elements H-peirceans per a tota àlgebra de Heyting; malgrat sortir de l'àmbit del nostre treball, és un resultat nou i força interessant, que a més podrem comparar amb algun dels que obtindrem per a les aHt .

Proposició 6

Si A és una àlgebra de Heyting, aleshores $R_H(A) = P_H$.

Demostració:

El que ja és conegut és que $R_H(A) = \mathbb{D}_H(P_H)$. Per tant $P_H \subseteq R_H(A)$; però si $a \in R_H(A) = D_H$, resulta que $a.0 = 0$ i aleshores podem posar $((a.0).a).a = (0.a).a = 1.a = a$ és a dir, que $a \in P_H$, d'on la igualtat. #

Corol.lari:

A tota àlgebra de Heyting el conjunt dels elements H-peirceans és un H-sistema deductiu. #

Si pensàvem en una proposició anàloga per a les àlgebres de Heyting topològiques, podríem creure que es compliria per a la implicació $\Rightarrow$, ja que a la demostració precedent hem usat que $R_H(A) = D_H$, i nosaltres tenim $R(A) = D_{\Rightarrow}$; però sorprenentment no és així sinó que ho obtenim per a $\rightarrow$.

Proposició 7

A tota aHt A es compleix que $R(A) = P_{\rightarrow}$.

Demostració:

Com que $R(A) = \mathbb{D}(P_{\rightarrow})$, tenim la inclusió $P_{\rightarrow} \subseteq R(A)$; però si $a \in R(A) = D_{\Rightarrow}$, $a \Rightarrow 0 = 0$ i aleshores $((a \rightarrow 0) \rightarrow a) \rightarrow a = ((a \Rightarrow 0) \rightarrow a) \rightarrow a = (0 \rightarrow a) \rightarrow a = 1 \rightarrow a = a$, per tant $a \in P_{\rightarrow}$. #

Corol.lari

A tota aHt el conjunt dels elements $\rightarrow$-peirceans és un sistema deductiu de l'àlgebra. #

La lectura lògica dels dos resultats anteriors és especialment remarcable; en efecte, hem vist que dels elements $\rightarrow$-peirceans només en podem deduir elements $\rightarrow$-peirceans, i que aquests elements corresponen a les sentències que pertanyen a totes les teories consistents i completes.

Pel que fa a les relacions entre el radical i els altres elements peirceans, tenim resultats més febles però igualment interessants.

Proposició 8

A tota aHt A es compleixen les següents propietats:

(i) $P_{\Rightarrow} = R(A) \cap B$

(ii) $P_{\Rightarrow} = P_{\not\rightarrow} \cap B$

(iii) $P_{\Rightarrow} = I(P_{\not\rightarrow})$.

Demostració:

(i) Sabem que $P_{\Rightarrow} \subseteq R(A)$ i a més que tot $\Rightarrow$-peirceà és obert, és a dir, $P_{\Rightarrow} \subseteq B$; i sigui ara $a \in R(A) \cap B$, és a dir, $a = Ia$ i $a \Rightarrow 0 = 0$, d'on $((a \Rightarrow 0) \Rightarrow a) \Rightarrow a = (0 \Rightarrow a) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a = Ia = a$ és a dir, $a \in P_{\Rightarrow}$.

(ii) Com que $P_{\not\rightarrow} \subseteq R(A)$, $P_{\not\rightarrow} \cap B \subseteq R(A) \cap B = P_{\Rightarrow}$; i si $a \in P_{\Rightarrow}$, aleshores $a \in R(A) \cap B$ d'on $a \Rightarrow 0 = 0$ i $Ia = a$ i resulta $((a \not\rightarrow 0) \not\rightarrow a) \not\rightarrow a$ $= ((a \Rightarrow 0) \not\rightarrow a) \not\rightarrow a = (0 \not\rightarrow a) \not\rightarrow a = 1 \not\rightarrow a = Ia = a$ és a dir, $a \in P_{\not\rightarrow}$.

(iii) Tenint en compte que $x \Rightarrow y = I(x \not\rightarrow y)$ i que $x \Rightarrow y$ és sempre obert, tenim que $((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \Rightarrow a = I(((a \Rightarrow b) \Rightarrow a) \not\rightarrow a) = I(I(I(a \not\rightarrow b).Ia).Ia$

$= I(I(I(a \nrightarrow b).Ia).Ia) = I(((a \nrightarrow b) \nrightarrow a) \nrightarrow a)$ i per tant $P_{\Rightarrow} = I(P_{\nrightarrow})$. #

Corol.laris

A tota aHt A es compleixen les següents propietats:

(i) $P_{\Rightarrow} \subseteq P_{\nrightarrow} \subsetneq P_{\rightarrow} = R(A) = D_{\Rightarrow}$

(ii) $P_{\Rightarrow} = P_{\nrightarrow} \cap B = P_{\rightarrow} \cap B = R(A) \cap B = D_{\Rightarrow} \cap B$

(iii) $D_{\rightarrow} \cap B \subseteq P_{\Rightarrow}$.

Demostració:

(i) i (ii) es troben, implícitament o explícita, a resultats anteriors, i els posem aquí només per a fixar-nos-hi.

(iii) és deguda a que $D_{\rightarrow} \cap B = D_H \cap B = R_H(A) \cap B \subseteq R(A) \cap B = P_{\Rightarrow}$, seguint el corol.lari de la proposició 4 i les proposicions 5 i 8.(i) . #

Tenim també unes re-definicions dels elements peirceans que simplificaran enormement el seu càlcul i que seran essencials per a caracteritzar els elements peirceans a les aHt monàdiques, al capítol IV.

Proposició 9

A tota aHt A es compleix que $\forall a \in A$, $a \in P_{\rightarrow}$ ssi $a = ((a \rightarrow 0) \rightarrow a) \rightarrow a$ i $a \in P_{\Rightarrow}$ ssi $a = ((a \Rightarrow 0) \Rightarrow a) \Rightarrow a$.

Demostració:

La demostració per a $\rightarrow$ és implícita a la demostració de la proposició 7 : en efecte, si $a = ((a \rightarrow 0) \rightarrow a) \rightarrow a$, evidentment $a \in P_{\rightarrow}$; i si $a \in P_{\rightarrow}$, aleshores $a \in R(A)$, i segons hem vist allí $a = ((a \rightarrow 0) \rightarrow a) \rightarrow a$.

Per a $\Rightarrow$ és similar: en efecte, en un sentit no hi ha res a demostrar, i si $a \in P_{\Rightarrow} = R(A) \cap B$, tenim $a \Rightarrow 0 = 0$ i $Ia = a$ d'on resulta que $a = ((a \Rightarrow 0) \Rightarrow a) \Rightarrow a$. #

Hom pot preguntar-se com és que aquesta caracterització no val per a la implicació rara. A la demostració per a $\rightarrow$ el punt essencial és $1 \rightarrow a = a$ i en canvi la implicació rara només compleix $1 \not\rightarrow a = Ia$; i a la demostració per a $\Rightarrow$ els punts essencials són dos, que $1 \Rightarrow a = Ia$, que $\not\rightarrow$ sí compleix, i el fet que tot $\Rightarrow$-peirceà és obert, cosa que no compleix $\not\rightarrow$; per tant és lògic que no obtinguem una caracterització anàloga per a aquesta implicació.

Un nou tipus d'element distingit és el següent:

Definició 2

En una aHt A un element $a \in A$ és lliure ssi $\delta a = 1$; designarem per L_A el conjunt dels elements lliures d'A .

Si interpretem δ per M , aleshores els elements lliures corresponen a les sentències que són possiblement certes, i la següent proposició identifica aquestes sentències amb aquelles la negació de les quals és necessàriament falsa:

Proposició 10

Un element $a \in A$ és lliure ssi $I\neg a = 0$.

Demostració:

Si $\delta a = 1$, $I\neg a \leq \neg\neg I\neg a = \neg\delta a = \neg 1 = 0$ i per tant també $I\neg a = 0$; si $I\neg a = 0$ aleshores $\delta a = \neg I\neg a = \neg 0 = 1$. #

Proposició 11

A tota aHt A es compleix que $R(A) \subseteq L_A$ i $R_H(A) \subseteq L_A$.

Demostració:

Si $a \notin L_A$ aleshores $I\neg a \neq 0$ i segons el corol.lari de la proposició 2.4 existeix un sistema deductiu maximal D tal que $\neg a \in D$ i com que $a \rightarrow 0 \geqslant a.0 = \neg a$, resulta que $a \rightarrow 0 \in D$ d'on $a \notin D$ és a dir, $a \notin R(A)$.

Si $a \in R_H(A)$, $a.0 = 0$ i per tant $I\neg a = I(a.0) = I0 = 0$, és a dir, a és lliure . #

Ambdues inclusions poden ser igualtats, com a VI.1, o bé inclusions estrictes, com a VI.4 .

Els elements lliures deuen el seu nom a Monteiro i Varsavski, que els introdueixen a [40] amb la idea de buscar representacions funcionals de les seves "àlgebres de Heyting monàdiques", sense però haver-ho aconseguit; al seu treball no donen demostracions, i a més algun dels resultats que enuncien és fals. Els elements lliures formen un filtre d'ordre que conté 1, però ni tan sols no són sistema deductiu (per exemple, a VI.4 es compleix que $\mathbb{D}(L_A) = A$), de manera que no semblen tenir per a nosaltres altre interès que els dos resultats tot just formulats.

El darrer tipus d'element distingit que presentem tindrà un paper important a la secció IV.2 .

Definició 3

Un element $a \in A$ és regular ssi $a = \delta Ia$. Designarem per Reg(A) el conjunt dels elements regulars d'A .

Aquest nom i aquesta definició corresponen a una noció topològica, la de conjunt tancat regular (el que és igual a l'adherència del seu propi interior) ; aquesta fou la justificació de McKinsey i Tarski quan introduïren aquest concepte, a [36] , malgrat que llur definició era en termes del producte únicament: en una àlgebra de Heyting, anomenarem elements H-regulars els que compleixin $a = \neg\neg a = (a.0).0$, i posarem $Reg_H(A)$. En un context d'àlgebres no tan clàssiques, com les deductivament completes, les de Sales o les de Wajsberg, els elements que compleixen aquesta condició reben el nom de "crisipians" , en honor de Crisip (280-207 aC) , que fou el més important lògic de l'escola estoica; el fet que igualin llur doble negació fa que usualment presentin un capteniment clàssic en alguns sentits. Concretament a les àlgebres de Heyting formen una àlgebra de Boole isomorfa al quocient d'A per $R_H(A)$. A les àlgebres monàdiques obtindrem un resultat similar i encara més interessant.

Si intentem lligar el concepte d'element regular, per ara "topològic", amb les negacions lògiques que tenim, trobarem la següent

Proposició 12

Un element a és regular si i solament si $a = (a \rightarrow 0) \rightarrow 0$ si i solament si $a = (a \nrightarrow 0) \nrightarrow 0$.

Demostració:

Només cal considerar les següents igualtats: $\delta Ia = \neg I \neg Ia =$
$= I(Ia.0).0 = (a \rightarrow 0) \rightarrow 0 = (a \nrightarrow 0) \nrightarrow 0$. #

Veiem per tant que amb les negacions $\neg\!\rightarrow$ i $\neg\!\nrightarrow$ s'identifiquen el concepte algebraic original amb la justificació topològica també original, però que a [36] no es va poder formular algebraicament perquè no hi havia operadors interior ni clausura. Aleshores l'anterior proposició ens suggereix la següent

Definició 4

Un element $a \in A$ és $\Rightarrow$-regular ssi $a = (a \Rightarrow 0) \Rightarrow 0$. El conjunt dels elements $\Rightarrow$-regulars el designarem per $\mathrm{Reg}_{\Rightarrow}(A)$.

Notem que $(a \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 = I\delta Ia$; de tota manera, no hem trobat una interpretació topològica usual d'aquest concepte. A continuació explicitarem els fets més elementals que fan referència als elements regulars i que més endavant hauran de fer-nos servei.

Proposició 13

A tota aHt A es compleixen les següents propietats:

(i) $\{0,1\} \subseteq \mathrm{Reg}(A) \subseteq T$

(ii) $\{0,1\} \subseteq \mathrm{Reg}_{\Rightarrow}(A) \subseteq B$

(iii) $T \cap B = \mathrm{Reg}(A) \cap B \subseteq \mathrm{Reg}_{\Rightarrow}(A)$

(iv) $\mathrm{Reg}(A) \cap R(A) = \mathrm{Reg}(A) \cap D_{\rightarrow} = \{1\}$.

Demostració:

(i) i (ii) són conseqüència immediata de les definicions.

(iii) Si $a \in T \cap B$ evidentment $a \in \mathrm{Reg}(A)$ d'on $T \cap B \subseteq \mathrm{Reg}(A) \cap B$ i si $a \in \mathrm{Reg}(A) \cap B$ alesores $(a \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 = I\delta Ia = Ia = a$ d'on $a \in \mathrm{Reg}_{\Rightarrow}(A)$. D'altra banda la inclusió $\mathrm{Reg}(A) \cap B \subseteq T \cap B$ és clara a partir de (i) .

(iv) Tenim que $\mathrm{Reg}(A) \cap D_{\rightarrow} \subseteq \mathrm{Reg}(A) \cap R(A)$; i si $a \in \mathrm{Reg}(A) \cap R(A)$, $a = (a \rightarrow 0) \rightarrow 0 = I(a \rightarrow 0) = 0 = (a \Rightarrow 0) \rightarrow 0 = 0 \rightarrow 0 = 1$. #

L'exemple VI.1 ens mostra que la inclusió de (iii) no ha d'ésser forçosament una igualtat, encara que pot ser-ho, com a l'exemple VI.3 .

Aquesta secció és especialment rica en qüestions obertes. En efecte, a la vista dels resultats obtinguts hom es pot fer moltes preguntes, a més de les que ja ens hem fet i resolt, que estan incorporades orgànicament al treball. En donarem algunes:

- $D_{\to} = R(A) \cap R_H(A)$? No, en general és més petit, com a VI.3, però pot arribar a ser igual, com a VI.1 .
- $R(A) \cup R_H(A) = L_A$? Tampoc; hi ha una inclusió, que pot ser estricta com a VI.4 o bé igualtat com a VI.1 .
- Qui és, doncs, $D(R(A) \cup R_H(A))$? No tenim cap caracterització, només sabem que en determinats casos pot arribar a ser tota l'àlgebra, com a VI. 4 , però no sempre és així, ja que per exemple a VI.1 és exactament igual a $R(A)$.
- Són iguals $P_{\Rightarrow}$ i $P_{\not\to}$? No ho sabem.
- Formen els elements regulars una àlgebra de Boole ? Tenen alguna estructura, encara que més feble ? Són isomorfos a algun quocient d'A per un dels radicals o per algun dels conjunts d'elements densos ? No hem obtingut respostes en el cas general, pero sí a les àlgebres monàdiques, resultats continguts a les proposicions IV.2.13 i IV.2.14 .

CAPÍTOL IV

ÀLGEBRES MONÀDIQUES I SEMISIMPLES

IV.1 EL PROBLEMA DE LES ÀLGEBRES MONÀDIQUES

En els capítols precedents hem estudiat, especialment des d'un punt de vista deductiu, les àlgebres de Heyting topològiques. Hom haurà pogut observar que les hem definides afegint a una àlgebra de Heyting els mateixos axiomes per a l'operador interior que s'afegeixen a una àlgebra de Boole quan es defineixen les àlgebres de Boole topològiques. Ara ens proposem definir l'equivalent en àlgebres de Heyting del concepte d'àlgebra de Boole monàdica; en aquest cas ens trobem amb un ampli ventall de possibilitats per a convertir una àlgebra de Boole topològica en monàdica, possibilitats a les quals passarem revista a continuació.

El concepte d'àlgebra de Boole monàdica fou ideat per Halmos, que a [21] les introdueix per a generalitzar les propietats dels quantificadors del càlcul de predicats (monàdic) de primer ordre, i concretament usa l'axioma específic (és a dir, no d'àlgebra de Boole topològica)

(1)* $\quad \delta(x \wedge \delta y) = \delta x \wedge \delta y \qquad \forall x,y \in A$

i desseguida demostra que aquesta propietat equival a suposar que

(2) $\quad T = \delta(A)$ és una subàlgebra d'A

Independentment de Halmos, Davis a [10] defineix uns "operadors S5" amb inspiració topològica imposant la condició

(3) $\quad$ Si $x \wedge \delta y = 0$ aleshores $\delta x \wedge \delta y = 0 \quad \forall x,y \in A$

i demostra que això equival a l'axioma

* Les "etiquetes" que anem posant a les diferents condicions que aniran apareixent seran conservades per a les cites al llarg de tot el capítol.

(4) $\delta\neg\delta x = \neg\delta x \qquad \forall x \in A$

Aquest axioma apareix als tractats de lògica modal amb la forma $M\neg Mp \to \neg Mp$, l'axioma específic del sistema M" suggerit per von Wright a [80] ; Sobociński a [62] va demostrar que aquest sistema és equivalent al sistema S5 de Lewis; per la seva banda, Halmos demostra que (4) equival a (1) , quedant així establert un lligam entre les àlgebres de Boole monàdiques i el sistema S5 de lògica modal.

En una àlgebra de Boole topològica els operadors I i δ són mútuament interdefinibles, per tant no ha de ser difícil de trobar condicions sobre I per a obtenir una àlgebra monàdica. Concretament a la literatura n'han aparegut dues; una d'elles és

(M1) $I\neg Ix = \neg Ix \qquad \forall x \in A$

que és dual de (4) i és la definició (algebraica) de Monteiro [39] ; com a axioma lògic la trobem a l'axiomàtica usada ja el 1933 per Wajsberg a [81] i a la conjecturada el mateix any per Gödel a [18] . Monteiro, que és el primer que destaca la importància de I sobre δ (deguda a les generalitzacions que només I permet a estructures implicatives molt més febles que la Booleana) dona també un altre axioma implicatiu, el

(5) $I(x \vee Iy) = Ix \vee Iy \qquad \forall x,y \in A$

que és la forma dual d'(1) . L'equivalència d'(1) i (5) és fàcil de demostrar per la dualitat Booleana (curiosament Monteiro no la fa i diu que ha estat demostrada per Halmos; però Halmos mai no va treballar amb l'operador interior) .

Cal mencionar també una propietat que apareix als esmentats treballs [21] i [39] i que és de tipus algebraic:

(S1) A és semisimple

que també equival a (1), ja que Halmos demostra que tota àlgebra monàdica és semisimple, i Monteiro que tota àlgebra de Boole topològica semisimple satisfà (5) .

Fins ací les condicions que hem trobat a treballs d'orientació algebraica; però existeixen algunes altres formes netament lògiques per a passar del sistema S4 al sistema S5 , i les seves traduccions algebraiques (posant I per L i δ per M) obviament transformaran àlgebres de Boole topològiques en monàdiques.

Lemmon, a [28] , utilitza la següent llei simple de reducció de modalitats

(M2) $I\delta x = \delta x \qquad \forall x \in A$

que en la seva forma estricta ja havien usat Lewis i Langford a [32] ; per dualitat és molt fàcil veure que també l'altra llei de reducció

(S2) $\delta Ix = Ix \qquad \forall x \in A$

és suficient per a passar d'S4 a S5 .

D'altra banda hem de considerar també els axiomes i la regla que introdueix Becker [1] als estudis de lògica modal:

(S3) $\delta Ix \leqslant x \qquad \forall x \in A$

(M3) $x \leqslant I\delta x \qquad \forall x \in A$

(M4) Si $\delta x \leqslant y$ aleshores $x \leqslant Iy \qquad \forall x,y \in A$

que afegits als sistema T de Feys [12] defineixen el sistema B (anomenat pel mateix Becker "sistema Brouwerià") però que cada un, per separat, afegit al sistema S4 dóna el sistema S5 .

Cal finalment esmentar l'axioma

(S4) $I\neg Ix \vee Ix = 1 \qquad \forall x \in A$

que Bull proposa a [7] per a un possible càlcul intuicionista modal (cf. la Introducció) pero que en una àlgebra de Boole és trivialment equivalent a la condició (M1) .

Com hom pot observar, poques de les precedents condicions van ésser formulades en termes de la implicació. Per a S4 tant Gödel com Monteiro donen axiomàtiques implicatives, pero per a S5 només en coneixem una, la de Beth i Nieland [2] que imposa l'axioma

(FM) $I(Ix.y) = Ix.Iy \qquad \forall x,y \in A$.

Que afegint aquest axioma a una àlgebra de Boole topològica obtenim una àlgebra monàdica és conseqüència d'un fet força general:

<u>Proposició</u>

Si A és una àlgebra de Hilbert i I un interior implicatiu sobre A, aleshores $B = I(A)$ és una subàlgebra d'A si i solament si es compleix la condició (FM) .

Demostració:

B subàlgebra equival a B tancat per . , com hem advertit a la secció I.2 , i aquest equival a $I(Ix.Iy) = Ix.Iy$. Evidentment la condició (FM) implica aquesta, ja que $I^2 = I$, i si es compleix aquesta, com que $Iy \leq y$ implica $Ix.Iy \leq Ix.y$, resulta que $Ix.Iy = I(Ix.Iy) \leq I(Ix.y) \leq Ix.Iy$ d'on la igualtat de-la condició (FM) . #

Corol.lari

Una àlgebra de Boole topològica és monàdica si i solament si satisfà la condició (FM) .

Demostració:

Fent $y = 0$ a (FM) obtenim la condició (M1) ; i a la inversa, si A és monàdica per (M2) i (S2) resulta que $T = \delta(A) = I(A) = B$ d'on per (2) resulta que B és subàlgebra, que com hem vist equival a la condició (FM) . #

Hem vist doncs catorze condicions que en una àlgebra de Boole topològica són equivalents entre si i cada una per separat és suficient per a definir-hi el concepte d'àlgebra monàdica. Justament un dels trets més interessants de les àlgebres de Heyting topològiques és que en elles aquestes condicions no són equivalents ni molt menys, sinó que s'articulen a diferents nivells d'implicacions; avançant els resultats que anirem veient a les seccions 2 i 3 ho podem dibuixar al següent esquema :

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[rrrr] & & & & (5) \arrow[rrrr] & & & & \bullet \arrow[dd] \\
 & (S1) \arrow[u] \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & & & (M1) \arrow[dr, leftrightarrow] & & & & \\
(S2) \arrow[dr, leftrightarrow] & & (S4) \arrow[r] & (FM) \arrow[r] & (M2) \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & (M4) \arrow[r] & (1) \arrow[r] & (3) \arrow[r] & aHt \\
 & (S3) \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[d] & & & & (M3) \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[d] & & & & \\
 & (2) \arrow[rrrr] & & & & (4) \arrow[rrrr] & & & & \bullet \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Al seu moment anirem veient també que els recíprocs d'aquestes implicacions no són veritat, i que no hi ha cap implicació entre els punts no connectats de la gràfica.

A l'hora d'escollir una d'aquestes condicions per a definir les aHt monàdiques resulta que les condicions (Si) són massa fortes, com veurem més endavant, per tant haurem de triar entre les condicions intermèdies. La nostra elecció ha recaigut sobre les condicions (Mi) que ofereixen alhora una forta arrel a la lògica modal tradicional i una pila d'interessants conseqüències algebraiques que detallarem a la secció següent. Al final d'aquesta direm alguna cosa sobre les àlgebres que satisfan (FM), però només de passada i com a pont natural per a arribar a les àlgebres semisimples, que tenen també un acusat contingut modal i un destacat paper algebraic.

IV.2 PROPIETATS DE LES ÀLGEBRES DE HEYTING TOPOLÒGIQUES MONÀDIQUES

D'acord amb el que hem manifestat al final de la secció anterior, donem la següent

Definició 1

Una àlgebra de Heyting topològica A és monàdica si i solament si satisfà la condició (M1) $I\neg Ix = \neg Ix \quad \forall x \in A$.

Examinant amb atenció la definició 1 és immediata la següent

Proposició 1

Una aHt A és monàdica ssi $B = I(A)$ és tancat per la negació, és a dir, ssi $\forall x \in A$, si x és obert, aleshores $\neg x$ és obert . #

Passarem revista en primer lloc als diferents mètodes de construcció d'àlgebres monadiques. Comencem pels més senzills:

Proposició 2

La classe de les aHt monàdiques és una varietat, és a dir, és tancada per la formació de subàlgebres, d'imatges homomorfes, i de productes directes de famílies no buides.

Demostració:

Ja sabem que la classe de les aHt és una varietat; i les aHt monàdiques es constitueixen en una subclasse individualitzada de moment per la condició (M1) que és equacional, per tant també constitueixen una varietat. #

I seguim amb altres mètodes generals de construcció d'aHt, veient la seva efectivitat o les seves limitacions quan s'apliquen a àlgebres monàdiques.

Proposició 3

Si A és una aHt, aleshores A^+ és monàdica ssi A és monàdica .

Demostració:

Si A és monàdica, B és tancat per $\neg$. En el cas que $B^+ = B$, no hi ha res a demostrar; i si $B^+ = B \cup \{p\}$, com que en A^+ tenim $\neg^+ p = 0$, també B^+ serà tancat per $\neg^+$: A^+ és monàdica en qualsevol cas.

Si A^+ és monàdica, tenint en compte que $\forall x \in A \quad I^+x = Ix$ i $\neg^+ x = \neg x$, és evident que A ha de ser monàdica. #

Proposició 4

Si A és una aHt tal que $I = I_a$ per cert $a \in A$, $a \neq 0,1$, aleshores A és monàdica ssi $a \in R_H(A)$.

Demostració:

Sabem que $B = \{0,a,1\}$ i per tant A serà monàdica ssi $\neg a \in B$; però $a \neq 0$, per tant $\neg a \neq 1$; i d'altra banda no pot ser $\neg a = a$ ja que implica $A = \{1\}$; per tant $\neg a \in B$ ssi $\neg a = 0$, és a dir, $a \in R_H(A)$. #

És convenient de completar la lectura d'aquesta proposició amb la de la proposició 19, que veurem al seu moment.

A les proposicions 16 i 17 veurem dos tipus d'àlgebres dels descrits a I.3 que són sempre monàdiques, però posposem aquest resultat ja que en formularem una forma més forta.

A continuació demostrarem l'equivalència de les quatre condicions (Mi) , $i = 1,2,3,4$, que són les de major significació modal.

Proposició 5

A tota aHt A les següents condicions són equivalents:

(M1) $I\neg Ix = \neg Ix \quad \forall x \in A$, és a dir, A és monàdica.

(M2) $I\delta x = \delta x \quad \forall x \in A$; és a dir, tot element tancat és obert ($T \subseteq B$)

(M3) $x \leqslant I\delta x \quad \forall x \in A$

(M4) Si $\delta x \leqslant y$ aleshores $x \leqslant Iy \quad \forall x,y \in A$.

Demostració:

(M1) implica (M2) ja que $I\delta x = I\neg I\neg x = \neg I\neg x = \delta x$.

(M2) implica (M3) sempre.

(M3) implica (M4) : Si $\delta x \leqslant y$ aleshores $I\delta x \leqslant Iy$; i si es compleix (M3) aleshores podem deduir que $x \leqslant Iy$.

(M4) implica (M1) : Hem vist que la negació d'un obert és un tancat (proposició I.2.6) , és a dir, $\forall x \subset A \quad \delta\neg Ix = \neg Ix$; en particular tenim que $\delta\neg Ix \leqslant \neg Ix$ i per (M4) resulta que $\neg Ix \leqslant I\neg Ix$, és a dir, queda demostrada la igualtat $I\neg Ix = \neg Ix$. #

A la proposició següent veurem que a les àlgebres monàdiques es satisfan dues de les condicions esmentades a la secció 1, però que no són equivalents a cap de les anteriors.

<u>Proposició 6</u>

A tota aHt monàdica A es compleixen les següents condicions:

(4) $\delta\neg\delta x = \neg\delta x \quad \forall x\in A$; i

(3) Si $x\wedge\delta y = 0$ aleshores $\delta x\wedge\delta y = 0 \quad \forall x,y\in A$.

Demostració:

(4) : $\delta\neg\delta x = \neg I\neg\neg\neg I\neg x = \neg I\neg I\neg x = \neg\neg I\neg x = \neg\delta x$.

(3) : $x\wedge\delta y = 0$ equival a $x \leqslant \neg\delta y$ i per tant $\delta x \leqslant \delta\neg\delta y =$ $= \neg\delta y$ que equival a $\delta x\wedge\delta y = 0$. #

Que aquestes condicions no impliquen que A sigui monàdica ho veiem a l'exemple VI.1, una aHt no monàdica que les satisfà alhora. La condició (1) de la secció 1 també es compleix a tota aHt monàdica, però per a demostrar-la necessitarem alguns recursos tècnics que veurem desseguida. A la secció 3 acabarem de repassar la resta de les condicions de la secció 1, veient que o bé són equivalents a la semisimplicitat o bé en són conseqüència, però són independents de la monadicitat.

Dedicarem pràcticament tot el que queda d'aquesta secció a examinar propietats algebraiques de les aHt monàdiques que milloren les que hem trobat als capítols precedents per a les aHt en general. En primer lloc refinarem la qüestió suscitada a la secció I.2 sobre el caràcter d'obert i de tancat d'un element i la seva relació amb la seva negació (proposició I.2.6) . Observem de passada que a les aHt monàdiques es compleix que si $a\in B$ aleshores $\neg a\in B$ (proposició 1), si $a\in T$ aleshores $a\in B$ (proposició 5) i que si $a\in T$ aleshores $\neg a\in T$ (proposició 6) . Ara afegirem una implicació més d'aquest tipus a la llista.

Proposició 7

A tota aHt monàdica es compleix que per a tot $a \in A$, si a és tancat aleshores $\neg a$ és obert .

Demostració:

Com que estem en una àlgebra monàdica, si a és tancat aleshores a és obert, i per tant $\neg a$ és obert . #

Aquesta implicació no caracteritza les àlgebres monàdiques, com veiem a l'exemple VI.2 . Ja hem vist (proposició I.2.7) que el recíproc de la proposició precedent no es compleix mai; i la implicació que resta (si $\neg a$ és tancat aleshores a és obert) es pot complir en una aHt monàdica, com la de l'exemple VI.9, o bé no, com a la del VI.8 . #

Proposició 8

En una aHt monàdica A es compleix, per a tot $a \in B$, que $\delta a = \neg\neg a$.

Demostració:

Si suposem que $a = Ia$ posem $\delta a = \neg I \neg a = \neg I \neg Ia$ i aleshores resulta que $\delta a = \neg I \neg Ia = \neg\neg Ia = \neg\neg a$. #

Corol.lari

En una aHt monàdica A per a tot $a \in B$ es compleix que $a \in T$ si i solament si $a = \neg\neg a$; és a dir, $T = B \cap \mathrm{Reg}_H(A)$.

Demostració:

Naturalment, de la proposició anterior, i tenint a més en compte que per ser A monàdica tenim $T \subseteq B$. #

Observem que la proposició 8 ens diu que si A és monàdica, sobre el conjunt d'oberts coincideixen les dues clausures de l'àlgebra ($\neg\neg$ i δ) ; i també que el corol.lari és cert en general en un sentit (si $a \in T$ aleshores $a = \neg\neg a$, ja que $T \subseteq B$) , però en l'altre sentit si $a \notin B$ no és cert, com podem comprovar a l'exemple VI.10 .

Ara podem demostrar la darrera condició de la secció 1 que esmentarem en referència a les aHt monàdiques.

<u>Proposició 9</u>

A tota aHt monàdica A es compleix la condició

(1) $\delta(x \wedge \delta y) = \delta x \wedge \delta y \qquad \forall x,y \in A$.

Demostració:

Com sabem (proposició I.2.5) $\delta(x \wedge \delta y) = \inf \{ t \in T : t \leqslant x \wedge \delta y$.

Com que $x \wedge \delta y \leqslant \delta x \wedge \delta y$ i $\delta x \wedge \delta y \in T$, tenim aleshores que $\delta(x \wedge \delta y) \leqslant \delta x \wedge \delta y$.

Sigui $t \in T$ tal que $x \wedge \delta y \leqslant t$, d'on $\delta y \leqslant x.t \leqslant \neg t.\neg x$ que equival a $\delta y \wedge \neg t \leqslant \neg x$; però δy , $t \in T \subseteq B$ ja que A és monàdica, per tant $\neg t \in B$ i $\delta y \wedge \neg t \in B$ d'on es segueix que $\delta y \wedge \neg t = I(\delta y \wedge \neg t) \leqslant$ $\leqslant I(\neg x)$ d'on $\delta x = \neg I \neg x \leqslant \neg(\delta y \wedge \neg t) = (\delta y \wedge \neg t).0 =$ $= \delta y.((\neg t).0) = \delta y.(\neg\neg t) = \delta y.t$ ja que $t \in T$ implica $t = \neg\neg t$; en definitiva $\delta x \wedge \delta y \leqslant t$.

Per tant $\delta(x \wedge \delta y) = \delta x \wedge \delta y$. #

Tampoc aquesta condició no és suficient per a caracteritzar les aHt monàdiques, com veiem a l'exemple VI.1 .

Per a treballar amb els conceptes algebraics de la secció III.4 ens convindrà molt la següent forma de la definició 1 :

Proposició 10

Una aHt A és monàdica ssi $\forall a \in A \quad a \Rightarrow 0 = a \rightarrow 0 = a \nrightarrow 0$.

Demostració:

Trivial, ja que $a \Rightarrow 0 = I(Ia.I0) = I(Ia.0) = I\neg Ia$, mentre que $a \rightarrow 0 = a \nrightarrow 0 = Ia.0 = \neg Ia$. #

Corol.lari

A tota aHt monàdica A es compleix que $D_{\rightarrow} = D_{\Rightarrow} = P_{\Rightarrow} = P_{\nrightarrow} =$

$= P_{\rightarrow} = R(A) \subseteq R_H(A) \subseteq L_{\dot{A}}$.

Demostració:

La coincidència de les tres negacions lògiques duu a $D_{\rightarrow} = D_{\Rightarrow} =$ $= R(A)$; i gràcies a la caracterització de $P_{\Rightarrow}$ i de $P_{\rightarrow}$ donada a la proposició III.4.9, duu també a $P_{\Rightarrow} = P_{\rightarrow}$, i com que $P_{\nrightarrow}$ es troba enmig dels dos conjunts, resulta $P_{\Rightarrow} = P_{\nrightarrow} = P_{\rightarrow}$. #

La inclusió entre els radicals segueix podent ésser estricta (VI.10) o no (VI.8), així com la d'$R_H(A)$ i $L_{\dot{A}}$ (mateixos exemples) .

Observem que el resultat precedent ens permet parlar d'elements simplement "peirceans" i simplement "densos" . Notem però que la igualtat d'ambdós tipus d'elements densos no caracteritza les aHt monàdiques, com veiem a l'exemple VI.1 , ni tampoc la dels tres tipus de peirceans (VI.6) .

Des del punt de vista lògic els anteriors resultats ens diuen que les tres operacions naturals d'implicació defineixen els mateixos elements "gairebé certs", i que això es pot interpretar de tres maneres aparentment diferents però equivalents: com a sentències les negacions "lògiques" de les quals són falses, com a sentències equivalents a una de la forma $((a*0)*a)*a$, o bé com a sentències que apareixen a totes les teories consistents i completes.

Proposició 11

En una aHt monàdica A , per a tot $a \in B$ els elements $a \vee \neg a$ i $\neg\neg a.a$ són densos .

Demostració:

$\neg(a \vee \neg a) = \neg a \wedge \neg\neg a = 0$, per tant en general $a \vee \neg a \in D_H$; però si $a \in B$ i A és monàdica, $\neg a \in B$ i per tant $a \vee \neg a \in B$, és a dir, que $a \vee \neg a \in D_H \cap B$, i per la proposició III.4.4 això implica que $a \vee \neg a$ sigui dens .

Notem que a tota aHt tenim $\neg a \vee b \leqslant a.b$ ja que $(\neg a \vee b) \wedge a =$ $= (\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a) = b \wedge a \leqslant b$; en particular $\neg a \vee a = \neg\neg\neg a \vee a \leqslant \neg\neg a.a$ i com que els elements densos formen un sistema deductiu, també $\neg\neg a.a$ és dens . #

També aquesta proposició té un significat lògic molt interessant, ja que ens diu que els elements oberts, és a dir, les sentències que comporten llur pròpia necessitat, tenen un capteniment que s'acosta al clàssic: en efecte, $a \vee \neg a$ i $\neg\neg a.a$ no arriben a ser 1 , però són "gairebé iguals a 1", és a dir,"gairebé certs", la interpretació dels elements densos. Aquest "caràcter clàssic" dels elements oberts arribarà al límit a les àlgebres semisimples; a les àlgebres monàdiques veurem que són els elements tancats els que presenten en un altre sentit un capteniment clàssic. Vegem en primer lloc quina relació tenen amb els elements regulars.

Proposició 12

A tota aHt monadica A tenim que $T = Reg(A) = Reg_{\Rightarrow}(A)$.

Demostració:

D'una banda tenim que en una àlgebra monàdica $(a \Rightarrow 0) \Rightarrow 0 = (a \rightarrow 0) \rightarrow 0$ i per tant $Reg(A) = Reg_{\Rightarrow}(A)$. D'altra banda $T \subseteq B$ i per tant, tenint en compte la proposició III.4.13, $T = T \cap B = Reg(A) \cap B \subseteq Reg(A) \subseteq T$, per tant $Reg(A) = T$. #

Proposició 13

En una aHt monàdica els elements tancats formen una àlgebra de Boole respecte l'ordre, implicació, conjunció i negació de l'àlgebra, i la disjunció $a \dot{\vee} b = \neg\neg(a \vee b) \quad \forall a,b \in T$.

Demostració:

Hem demostrat que si A és monàdica $T \subseteq Reg_H(A)$, i sabem que a tota àlgebra de Heyting aquest conjunt és una àlgebra de Boole amb $\neg$, $\wedge$ i $\dot{\vee}$ esmentades. Cal doncs només veure que T és subàlgebra de $Reg_H(A)$. T conté 0 i 1 i és tancat per $\wedge$ (tot això és general) i per $\neg$(ja que A és monàdica) ; i com que $a \dot{\vee} b = \neg\neg(a \vee b) = \neg(\neg a \wedge \neg b)$, és també tancat per $\dot{\vee}$. Amb això n'hi ha prou per a poder afirmar que T és subàlgebra de $Reg_H(A)$ i per tant àlgebra de Boole ell mateix.

Resta veute que la implicació Booleana que es dedueix de $\neg$ i $\dot{\vee}$ és la mateixa d'A . Es tracta de demostrar que $\forall a,b \in T$, $\neg a \dot{\vee} b = a.b$, és a dir, $a.b = \neg\neg(\neg a \vee b) = \neg(\neg\neg a \wedge \neg b) = \neg(a \wedge \neg b)$ ja que $a \in T \subseteq$

$\subseteq \mathrm{Reg}_H(A)$. En general tenim $a.b \leqslant (\neg b).(\neg a) = (b.0).(a.0) = (a \wedge (b.0)).0 =$ $= \neg(a \wedge \neg b)$; però en ser $b \in T$ podem posar $\neg(a \wedge \neg b) \wedge a = (a \wedge \neg b).0 \wedge a =$ $= a.(\neg b.0) \wedge a = a.\neg\neg b \wedge a = a.b \wedge a = a \wedge b \leqslant b$ és a dir , $\neg(a \wedge \neg b) \leqslant a.b$ i per tant $a.b = \neg(a \wedge \neg b) = \neg a \dot{\vee} b$ per tot $a,b \in T$. #

Corol.lari

A tota aHt monàdica T és tancat pel producte. #

Proposició 14

En una aHt monàdica A , T és isomorf a $A/\sim_{R(A)}$.

Demostració:

Definim una aplicació $h: A/\sim_{R(A)} \longrightarrow T$ de la següent manera: Per cada $\bar{a} \in A/\sim_{R(A)}$ posem $h(\bar{a}) = \neg\neg Ia$. Cal veure que això és una aplicació i que és ben definida; però de fet demostrarem amb més precisió que per cada $a \in A$, $\neg\neg Ia$ és l'únic element tancat de la classe $\bar{a}$.

En primer lloc, $\neg\neg Ia \sim_{R(A)} a$; en efecte, $a \rightarrow \neg\neg Ia = Ia.\neg\neg Ia = 1 \in$ $\in R(A)$; i de $0 \leqslant a$ deduim $(a \rightarrow 0).0 \leqslant (a \rightarrow 0) \rightarrow 0 \leqslant (a \rightarrow 0) \rightarrow a$, d'on $\neg\neg Ia \rightarrow a = I\neg\neg Ia.a = ((a \rightarrow 0).0) \rightarrow a \leqslant ((a \rightarrow 0) \rightarrow a) \rightarrow a \in P_{\rightarrow} = R(A)$ i per tant $\neg\neg Ia \rightarrow a \in R(A)$ ja que aquest és filtre d'ordre.

En segon lloc $\neg\neg Ia$ és sempre tancat ja que $Ia \in B$ i per ser A monàdica $\neg\neg Ia \in B$ d'on $\delta\neg\neg Ia = \neg\neg\neg\neg Ia = \neg\neg Ia$: $\neg\neg Ia \in T$.

En tercer lloc suposem que tenim $a,b \in T$ tals que $\bar{a} = \bar{b}$; veurem que $a = b$. En efecte, $T \subseteq B$ per tant $a = Ia$ i $b = Ib$, d'on $a \rightarrow b = a.b$ i $b \rightarrow a = b.a$; pel corol.lari anterior, resulta que $a \rightarrow b \in T$ i $b \rightarrow a \in T$ i a més tinguem en compte que $T = \mathrm{Reg}(A)$. D'altra banda $\bar{a} = \bar{b}$ vol dir que $a \rightarrow b \in R(A)$ i $b \rightarrow a \in R(A)$; per la proposició III..4.13 resulta

$Reg(A) \cap R(A) = \{1\}$, ha de ser $a \rightarrow b = 1$ i $b \rightarrow a = 1$ és a dir $Ia = Ib$ i per tant $a = b$.

Del que hem fet fins ara resulta que per tot $t \in T$ $\neg\neg It \sim_{R(A)} t$ i per tant $h(\bar{t}) = t$, és a dir, que h és exhaustiva, i també que h és injectiva, és a dir, h és bijectiva.

Ambdós conjunts són àlgebres de Boole, T amb $\neg, \wedge, \dot{\vee}, .$ i $A/\sim_{R(A)}$ amb $\bar{\neg}, \bar{\wedge}, \bar{\vee}, \bar{.}$; aleshores ens resta només demostrar que h és morfisme, que com sabem és suficient de demostrar-ho per a la conjunció i la negació:

$$h(\bar{\neg}\bar{a}) = h(\overline{\neg Ia}) = \neg\neg I \neg Ia = \neg\neg\neg Ia = \neg h(\bar{a}) .$$

$$h(\bar{a} \bar{\wedge} \bar{b}) = h(\overline{\neg\neg Ia} \bar{\wedge} \overline{\neg\neg Ib}) = h(\overline{\neg\neg Ia \wedge \neg\neg Ib}) = \neg\neg I(\neg\neg Ia \wedge \neg\neg Ib) =$$
$$= \neg\neg(\neg\neg Ia \wedge \neg\neg Ib) = \neg\neg\neg(\neg Ia \vee \neg Ib) = \neg\neg Ia \wedge \neg\neg Ib = h(\bar{a}) \wedge h(\bar{b}) .$$

Per tant h és un isomorfisme entre les àlgebres de Boole T i $A/\sim_{R(A)}$. #

Tenint en compte que $T = Reg(A)$ i $R(A) = D_{\rightarrow}$, podem dir que els elements regulars formen una àlgebra de Boole isomorfa al quocient (usual) de l'àlgebra A pel sistema deductiu dels elements densos. Observem que si suprimim el caràcter topològic de l'àlgebra A , amb les mateixes paraules hom expressa un conegut teorema de les àlgebres de Heyting; és curiós de constatar que aquest paral.lelisme no és veritat a les àlgebres de Heyting topològiques sinó a les monàdiques. En la nostra opinió, aquest sol fet basta per a fer prou interessants les aHt monàdiques.

Finalitzarem l'estudi d'aquestes àlgebres demostrant un fet que ens havíem plantejat a la secció III.2 i que en general no era cert.

Proposició 15

En una aHt monàdica, $\forall D \in \mathfrak{D}_H$, si D és H-maximal aleshores D^o és maximal.

Demostració:

En primer lloc $0 \notin D^{\circ}$ ja que $D^{\circ} \subseteq D$ i D és H-maximal.

Sigui $a \in A$ qualsevol i suposem que $a \notin D^{\circ}$, és a dir, que $Ia \notin D$; això equival a $\neg Ia \in D$ però A és monàdica, per tant $I\neg Ia = \neg Ia$, d'on $I\neg Ia \in D$ i per tant $a \to 0 = \neg Ia \in D^{\circ}$. Per tant, o bé $a \in D^{\circ}$, o bé $a \to 0 \in D^{\circ}$ i a més no és possible simultàniament $a \in D^{\circ}$ i $a \to 0 \in D^{\circ}$ ja que per (MP$\to$) obtindríem $0 \in D^{\circ}$ contra el que hem vist al començament. Per la caracterització de III.2.3 resulta que D° és maximal. #

Abans de passar a la secció següent, on estudiarem les àlgebres semisimples, direm alguna cosa sobre una classe d'àlgebres intermèdia, que té una doble raó de ser, modal i algebraica.

<u>Definició 2</u>

Una aHt A és <u>fortament monàdica</u> si i solament si compleix la condició

(FM) $I(Ix.y) = Ix.Iy \quad \forall x,y \in A$.

Segons la proposició 1.1 això equival a dir que B és subàlgebra d'A. Es evident que tota aHt fortament monàdica és monàdica, i que el recíproc no és pas cert (exemple VI.7). També ho és que la classe de les aHt fortament monàdiques forma una varietat, i que hi ha dues menes d'aHt que sempre hi pertanyen:

<u>Proposició 16</u>

Tota aHt totalment ordenada és fortament monàdica.

Demostració:

En una cadena que sigui àlgebra de Heyting el producte només pot ser l'anomenat "canònic" : $x.y = 1$ ssi $x \leqslant y$, i $x.y = y$ en cas contrari. Per tant, si $x,y \in B$ és immediat que $x.y \in B$, és a dir, que B és tancat pel producte: A és fortament monàdica. #

Proposició 17

Tota aHt funcional és fortament monàdica.

Demostració:

Ja hem vist (secció I.3) que els elements oberts d'una aHt funcional són les funcions constants. Com que les operacions es defineixen puntualment, les funcions constants adquireixen l'estructura del conjunt d'arribada, que en el nostre cas és una àlgebra de Heyting. Òbviament, el producte de dues funcions constants és una funció constant; per tant aquest tipus d'àlgebres són sempre fortament monàdiques. #

Com a conclusió d'aquesta proposició direm que les àlgebres de Heyting topològiques no poden en general ser representades per àlgebres funcionals, a diferència del que passa a les àlgebres de Boole monàdiques, i contràriament al que havien conjecturat Monteiro i Varsavski a [40] .

Pel que fa a altres mètodes de construcció d'àlgebres, tenim:

Proposició 18

Si A és una aHt aleshores A^+ és fortament monàdica si i solament si A és monàdica.

Demostració:

Si tenim en compte que el producte a A^+ és l'extensió del producte d'A, és evident que si A^+ és fortament monàdica ho ha de ser A . I si ho és A , per a veure que A^+ és fortament monàdica és suficient de veure que en el cas que fos $p \in B^+$, per tot $x \in B^+$, $x \leqslant^+ p$, resulti $p \dot{+} x \in B^+$ (ja que si $x \in A - \{1\}$, $x.^+p = 1$, $1\dot{+}p = p$ i $p\dot{+}1 = 1$). Però per tot $t \in A - \{1\}$, $t \leqslant^+ p$ per tant $p \wedge^+ t = t$ i per tant $p\dot{+}x = x \in B^+$: A^+ és monàdica . #

Proposició 19

Si A és una aHt tal que $I = I_a$ per un $a \in A$, $a \neq 0,1$, aleshores A és fortament monàdica si i solament si A és monàdica.

Demostració:

Si $B = \{0,a,1\}$, és el mateix dir que B sigui tancat pel producte que dir que B sigui tancat per la negació, ja que l'únic producte que en principi no pertany a B és a.0 que és igual a $\neg a$. #

Cal enllaçar aquesta proposició amb la proposició 4.

Per finalitzar veurem què passa si fem que coincideixin dues de les tres operacions d'implicació natural.

Proposició 20

Una aHt A és fortament monàdica si i solament si $\forall a,b \in A$ es compleix que $a \Rightarrow b = a \not\twoheadrightarrow b$.

Demostració:

$a \Rightarrow b = a \not\twoheadrightarrow b$ equival a $I(Ia.Ib) = Ia.Ib$, que és dir que B sigui tancat pel producte, és a dir, que A sigui fortament monàdica. #

Contrastant amb aquesta proposició, la coincidència de les altres parelles d'implicacions és impossible, o no té interès.

Proposició 21

A tota aHt són equivalents les següents afirmacions:

(1) $a \Rightarrow b = a \rightarrow b \quad \forall a,b \in A$

(2) $a \not\twoheadrightarrow b = a \rightarrow b \quad \forall a,b \in A$

(3) $Ix = x \quad \forall x \in A$.

Demostració:

Si es compleix (3) es compleixen (1) i (2) i en aquest cas a més coincideixen entre sí les quatre implicacions $(.,\rightarrow,\Rightarrow,\not\twoheadrightarrow)$; si es compleixen (1) o (2) , posant $a = 1$ obtenim en els dos casos $Ib = b$. #

IV.3 ÀLGEBRES SEMISIMPLES

Recordem la definició III.3.3, i la proposició III.3.4 segons la qual la semisimplicitat d'una aHt equival a $R(A) = \{1\}$ i que 1 sigui l'únic element peirceà de l'àlgebra. La definició primigènia de semisimplicitat ens forneix un mètode molt potent per a demostrar propietats equacionals o implicacionals (implicacions entre equacions) per a les àlgebres semisimples: És suficient de demostrar-les per a tota àlgebra simple, ja que aquest tipus de propietats es conserven per productes directes i subàlgebres. La potència d'aquest mètode resideix a l'extraordinària simplicitat de les aHt simples.

Proposició 1

Tota aHt semisimple és fortament monàdica.

Demostració:

Tota aHt simple és fortament monàdica ja que $\{0,1\}$ és sempre una subàlgebra d'A . I com que la condició que defineix les aHt fortament monàdiques és una equació , també tota aHt semisimple serà fortament monàdica. #

Per tant podem usar per a les aHt semisimples totes les propietats que hem vist a la secció anterior per a les fortament monàdiques i especialment per a les monàdiques.

A continuació veurem algunes formes equivalents de formular la semisimplicitat d'una aHt .

Proposició 2

Una aHt A és semisimple ssi $\forall a \in A \quad Ia = (a \Rightarrow 0) \Rightarrow a$.

Demostració:

Tenim en general que $Ia \leqslant (a \Rightarrow 0) \Rightarrow a$ per la proposició II.3.2.(vi) ; la semisimplicitat equival a $((a \Rightarrow 0) \Rightarrow a) \Rightarrow a = 1$ (proposició III.3.4) i això equival a $(a \Rightarrow 0) \Rightarrow a \leqslant Ia$, per tant també serà equivalent a la igualtat $Ia = (a \Rightarrow 0) \Rightarrow a$. #

<u>Proposició 3</u>

Si A és una aHt fortament monàdica aleshores A és semisimple ssi

$\forall a \in A \quad Ia = (a \nrightarrow 0) \nrightarrow a$.

Demostració:

Es podria deduir de la proposició anterior tenint en compte la proposició 2.20, o bé directament, ja que la semisimplicitat equivaldrà a $Ia = I((a \nrightarrow 0) \nrightarrow a)$, però si A és fortament monàdica $I((a \nrightarrow 0) \nrightarrow a) =$
$= I(I(Ia.I0).Ia) = I(Ia.I0).Ia = (a \nrightarrow 0) \nrightarrow a$. #

La següent caracterització és homòloga a la que en àlgebres de Heyting diu que una àlgebra de Heyting és de Boole si i solament si 1 és l'únic element dens de l'àlgebra.

<u>Proposició 4</u>

Si A és una aHt monàdica aleshores A és semisimple ssi l'únic element dens d'A és 1 .

Demostració:

Només cal considerar que, segons la proposició 2.10, el conjunt dels elements densos és igual a R(A) , i tenir en compte la proposició III.3.4 . #

La proposició que segueix és la caracterització fonamental de la semisimplicitat de les àlgebres de Heyting topològiques.

Proposició 5

Si A és una aHt aleshores A és semisimple si i solament si B és una àlgebra de Boole i és subàlgebra d'A .

Demostració:

Si A és semisimple en particular és fortament monàdica i per tant B és subàlgebra d'A, és a dir, és àlgebra de Heyting; a més sobre B coincideixen el producte . i les tres operacions naturals d'implicació, per tant la semisimplicitat d'A implica que si $a,b \in B$, $((a.b).a).a = 1$, és a dir, que B és semisimple, i, per tant, és una àlgebra de Boole.

Suposem ara que B sigui subàlgebra d'A i àlgebra de Boole, i demostrarem que $R(A) = \{1\}$. Prenguem un $a \in A$, $a \neq 1$; tenim que $Ia \neq 1$ però com que $Ia \in B$ tenim $Ia \vee \neg Ia = 1$, per tant ha de ser $\neg Ia \neq 0$; però si B és subàlgebra d'A , resulta que A és fortament monàdica, i en particular monàdica, d'on $I\neg Ia = \neg Ia \neq 0$ i pel corol.lari de la proposició III.2.4 existeix un sistema deductiu D maximal tal que $a \rightarrow 0 = \neg Ia \in D$ i per tant $a \notin D$ d'on $a \notin R(A)$. D'aquí que $R(A) = \{1\}$, és a dir, A és semisimple. #

Tenint en compte que les àlgebres de Boole són precisament les àlgebres de Heyting semisimples, podem expressar el resultat anterior d'una forma singularment elegant, paral.lela al corol.lari de la proposició III.2.5 .

Corol.lari

Una aHt A és semisimple ssi B és una subàlgebra semisimple d'A . #

La proposició anterior expressa l'objecció més forta dels intuicionistes contra prendre les aHt semisimples com a homòlogues de les àlgebres de Boole monàdiques (que, efectivament, són semisimples). En efecte, la lectura lògica de la proposició 5 ens diu que les sentències necessàries "per se" , (és a dir, que comporten llur pròpia necessitat) formen un reducte que obeeix les lleis de la lògica classica (lleis Booleanes); i això, com diu Bull a [7] , és inacceptable per a un filòsof intuicionista. Cal dir que el seu resultat algebraic és més feble que el nostre perquè l'obté no de la semisimplicitat sinó de quelcom més fort, que és suposar la interdefiibilitat dels dos operadors, $I = \neg\delta\neg$ i $\delta = \neg I \neg$; l'exemple VI.11 ens mostra que efectivament és una hipòtesi més forta.

Passem ara a considerar els mètodes de construcció d'aHt semisimples. Evidentment tota aHt simple ho és, i també els productes directes i subdirectes d'àlgebres simples. A més, i com era d'esperar, tenim la

Proposició 6

La classe de les aHt semisimples és una varietat.

Demostració:

Hem vist ja condicions equacionals, com $((a*b)*a)*a = 1$, que són equivalents a la semisimplicitat. #

Més endavant (proposició 12) veurem algunes altres condicions equivalents que també són equacionals . I a la secció 4 estudiarem quines d'aquestes condicions formen axiomàtiques independents, i com són aquestes.

Veurem ara molts dels mètodes usuals i comprovarem com molts d'ells no ens permeten obtenir àlgebres semisimples.

Proposició 7

Si A és una aHt tal que $I = I_a$ per cert $a \in A$, $a \neq 0,1$ aleshores A no és semisimple.

Demostració:

Si $I = I_a$ només existeix en A un sistema deductiu maximal, que és $\mathbb{D}(a) = [a , \rightarrow)$ i per tant $R(A) = [a , \rightarrow)$; com que $a \neq 1$, A no pot pas ésser semisimple. #

Proposició 8

Si A és una aHt semisimple que no és simple, aleshores en A^+ es compleix $I^+p = p$ i A^+ és una aHt fortament monàdica però no semisimple.

Demostració:

Segons les hipòtesis, existeix un $b \in B$, $b \neq 0,1$; per tant $\neg b \in B$ i $b \vee \neg b = 1$ per ser B àlgebra de Boole. Per tant no existeix en A cap fita superior de $B - \{1\}$ llevat d'1 , d'on $I_2^+p = \sup^+ B - \{1\} = p = I_1^+p$, i és l'únic interior possible en A^+ . Aleshores resulta que $p \in B^+$ però $\neg^+p = 0$ i en canvi $p \neq 1$, per tant B^+ no pot ser àlgebra de Boole, és a dir, A^+ no és semisimple ; però essent A semisimple, és fortament monàdica, i per la proposició 2.18 A^+ ha de ser fortament monàdica. #

Proposició 9

Si A és una aHt simple, aleshores o bé A^+ és simple o bé $I^+ = I_p$, i en aquest cas A^+ és fortament monàdica no semisimple.

Demostració:

En efecte, si $I^+p = \sup^+ B - \{1\} = 0$ resulta que A^+ és simple; i l'altra possibilitat és que $I^+p = p$ i aleshores $B^+ = B \cup \{p\} = \{0,p,1\}$ és a dir que $I^+ = I_p$; per les proposicions 7 i 2.19 , com que $p \neq 0,1$ i $\neg +p = 0$, A^+ és en aquest cas fortament monàdica no semisimple. #

Corol.lari

Si A és una aHt qualsevol aleshores A^+ és simple o bé no és semisimple. #

Veiem per tant que un procediment senzill per a construir aHt monàdiques i fortament monàdiques que no siguin semisimples és obtenir àlgebres semisimples no simples (cosa fàcil fent només productes directes) i aplicar-los l'operació d'amplificació. Diguem de passada que aquest és el procediment amb què Jaśkowski, a [26] , construí la seva successió característica de matrius per al càlcul proposicional intuicionista.

Proposició 10

Si A és una aHt totalment ordenada, aleshores A és semisimple si i solament si A és simple.

Demostració:

Si A és cadena, també ho serà B ; i una cadena no és mai àlgebra de Boole llevat que sigui la de dos elements. #

Ja hem vist (proposició 2.17) que tota aHt funcional és fortament monàdica. Ara ens preguntem : pot ser semisimple ?

Proposició 11

Una aHt funcional H^K és semisimple si i solament si H és àlgebra de Boole.

Demostració:

Com sabem, el conjunt d'oberts d'una àlgebra funcional és el de les funcions constants, i té la mateixa estructura que el conjunt d'arribada H. Per tant H^K serà semisimple si i solament si H és àlgebra de Boole. #

Ara bé, hi ha un tipus especial d'àlgebra de funcions que admet sempre una estructura d'àlgebra de Heyting topològica semisimple pròpia, naturalment diferent de la que hem definit en general sobre les àlgebres H^K amb H qualsevol àlgebra de Heyting: es tracta de les parts difuses d'un conjunt.

Sigui K un conjunt qualsevol amb almenys dos elements; i $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ àlgebra de Heyting amb l'operació canònica. El conjunt I^K s'anomena el conjunt de les parts difuses del conjunt K , i s'estructura en àlgebra de Heyting si definim puntualment les operacions, com és habitual*. La subàlgebra formada per les parts clàssiques de K : $\wp(K) = \{ f \in I^K : \text{Rang } f \subseteq \{0,1\} \}$ és una àlgebra de Boole que ens defineix un interior sobre I^K prenent per cada $f \in I^K$ i per cada $k \in K$, $(If)(k) = 0$ ssi $f(k) \neq 1$, i $(If)(k) = 1$ ssi $f(k) = 1$, interior que té com a oberts les parts clàssiques i per tant serà forçosament semisimple; aquest interior es pot anomenar "puntualment simple" perquè si considerem I^K com a producte directe de card(K) còpies de l'àlgebra I, l'interior que hem definit s'obtindria en considerar a cada còpia d'I l'interior simple . Aquesta és una altra manera de veure que l'interior definit per $\wp(K)$ sobre I^K és semisimple, ja que resulta ser producte directe d'àlgebres simples.

---

*Habitual al nostre treball, ja que hem de fer constar que la negació que així obtenim no coincideix pas amb la que usualment consideren els especialistes dels conjunts difusos, que és $f^c = 1 - f$, i que dóna a I^K una estructura algebraica força més heterodoxa que no ho puguin ser les àlgebres de Heyting.

A continuació veurem algunes propietats de les àlgebres semisimples. En primer lloc, establim l'equivalència de quatre de les condicions llistades a la secció 1 i també d'una cinquena prou interessant.

<u>Proposició 12</u>

En una aHt les següents condicions són equivalents:

(S1) A és semisimple

(ii) $\delta x = \inf \{ a \in B : a \geq x \} \quad \forall x \in A$

(S2) $\delta Ix = Ix \quad \forall x \in A$; és a dir. tot obert és tancat ($B \subseteq T$)

(S3) $\delta Ix \leq x \quad \forall x \in A$

(S4) $I \neg Ix \vee Ix = 1 \quad \forall x \in A$.

Demostració:

(S1) implica (ii) : Si A és semisimple, també és monàdica, i per tant $\delta x = I \delta x$, és a dir, $\delta x \in B$ i $\delta x \geq x$; i si $a \in B$ és tal que $a \geq x$, tenim que $\neg a \in B$ i $\neg a \leq \neg x$ d'on $\neg a = I \neg a \leq I \neg x$ i per tant $\delta x = \neg I \neg x \leq$ $\leq \neg\neg a = a$ ja que $a \in B$ que per ser A semisimple és àlgebra de Boole. En definitiva $\delta x = \inf \{ a \in B : a \geq x \}$.

(ii) implica (S2) en general ja que $Ix \in B$ i $Ix \geq Ix$.

(S2) implica (S3) sempre.

(S3) implica (S4) : Tenim que suposar que $\delta Ix = \neg I \neg Ix \leq x \quad \forall x \in A$, i en particular $\neg I \neg Ix \leq Ix \quad \forall x \in A$, és a dir $\neg I \neg Ix . Ix = 1$; però en general en una àlgebra de Heyting es compleix que $\neg a.b \leq \neg\neg(a \vee b)$, ja que $(\neg a.b) \wedge \neg(a \vee b) = (\neg a.b) \wedge \neg a \wedge \neg b = \neg a \wedge b \wedge \neg b = 0$, per tant podem deduir que $\neg\neg(I \neg Ix \vee Ix) = 1$; però la reunió de dos oberts és obert, i $\neg\neg a \leq \delta a$ per tot $a \in A$, per tant $1 = \neg\neg(I \quad Ix \quad Ix) \leq \delta I(I \neg Ix \vee Ix) \leq$ $\leq I \neg Ix \vee Ix$ per la hipòtesi (S3) un altre cop. Per tant $I \neg Ix \vee Ix = 1$.

(S4) implica (S1) : Si $x \neq 1$, $Ix \neq 1$ i com que ha de ser $I\neg Ix \vee Ix = 1$ ha de ser $I\neg Ix \neq 0$ i per tant existeix un sistema deductiu maximal D tal que $x \rightarrow 0 = \neg Ix \in D$ d'on $x \notin D$, és a dir, $x \notin R(A)$; per tant $R(A) = \{1\}$ i A és semisimple. #

En particular observem que a tota aHt semisimple coincideixen oberts i tancats (i, per tant, regulars, per ser A monàdica) i formen una àlgebra de Boole que és subàlgebra d'A .

Recuperem ara les dues condicions de la secció 1 que restaven i una altra que havíem anunciat a la secció I.1 .

Proposició 13

Si A és una aHt semisimple aleshores es compleixen les condicions:

(2) $T = \delta(A)$ és una subàlgebra d'A

(5) $I(x \vee Iy) = Ix \vee Iy \quad \forall x,y \in A$

(C3) $\delta(x \vee y) = \delta x \vee \delta y \quad \forall x,y \in A$.

Demostració:

(2) : Com hem dit, és conseqüència de la proposició 5 i de la proposició 12, que implica que $T = B$.

(5) : Es comprova fàcilment a tota àlgebra simple, ja que si $y = 1$ queda $1 = 1$, i si $y \neq 1$ $Iy = 0$ i queda $Ix = Ix$. Per tant també és vàlida a tota aHt semisimple.

(C3) : A les àlgebres simples és molt fàcil de comprovar, tenint en compte la proposició III.2.7 , per tant també es complirà a les àlgebres semisimples. #

Cap de les condicions precedents, però, no implica la semisimplicitat, ni en general ni entre les aHt monàdiques o fortament monàdiques; i a més totes són independents d'aquests darrers conceptes: Pel que fa a (2) , ho veiem als exemples VI.1 , VI.7 , VI.8 i VI.9 ; per a (5) cal veure els exemples VI.3 , VI.8 , VI.2 i VI.10 ; per a (C3), els exemples VI.5, VI.8 i VI.9 . D'altra banda, sabem que les condicions (2) i (5) són totalment independents, ja que si bé a VI.2 no se'n compleix cap i a VI.8 es compleixen les dues, a VI.3 tenim (5) i no (2), i a VI.10 passa el contrari.

Com a darrera part de la secció examinarem l'estructura del reticle $\mathfrak{D}$ i les propietats de la lògica $\mathbb{L}$ quan A és semisimple. Convé notar que no hem trobat cap propietat addicional per a $\mathfrak{D}$ o $\mathbb{L}$ a les àlgebres monàdiques ni a les fortament monàdiques. Per contra aquí tenim fets força interessants.

<u>Proposició 14</u>

Una aHt A és semisimple si i solament si $A/\sim$ és una àlgebra de Heyting semisimple, és a dir, és una àlgebra de Boole.

Demostració:

$A/\sim$ és àlgebra de Heyting amb la implicació $\bar{a}\,\bar{\cdot}\,\bar{b} = \overline{a*b}$, i la semisimplicitat d'$A/\sim$ com a àlgebra de Heyting es formula amb $\bar{\cdot}$, mentre que la d'A com a aHt es formula amb $*$. Com que $\bar{a} = \bar{1}$ equival a $a = 1$ perquè $a \sim 1$ equival a $Ia = I1 = 1$ d'on $a = 1$, resulta que ambdues semisimplicitats són equivalents, ja que $((\bar{a}\,\bar{\cdot}\,\bar{b})\,\bar{\cdot}\,\bar{a})\,\bar{\cdot}\,\bar{a} = \bar{1}$, que equival a $\overline{((a*b)*a)*a} = \bar{1}$, equivaldrà a $((a*b)*a)*a = 1$ per tot $a,b \in A$. #

Aleshores podem obtenir, a partir del resultat anterior, una formulació de la semisimplicitat en termes de lògiques abstractes.

Proposició 15

Per a tota aHt A les següents afirmacions són equivalents:

(1) A és semisimple

(2) $\mathbb{L}$ és una "lògica finitària de Boole"

(3) $\mathbb{L}$ satisfà el Principi de la Reducció a l'Absurd (P.R.A.) respecte $\neg^*$, és a dir, $\forall a \in A$ i $\forall X \subseteq A$, $a \in \mathbb{D}(X)$ ssi $\mathbb{D}(X, \neg^* a) = A$.

Demostració:

(3) és exactament el que li manca a $\mathbb{L}$ per a complir (2), per tant aquests dos són equivalents. D'altra banda hi ha un morfisme bilògic entre $\mathbb{L}$ i la lògica dels H-sistemes deductius d'$A/\sim$; i (1) hem vist que equival a que aquest quocient sigui una àlgebra de Boole, que és el mateix que dir que la seva lògica és "finitària de Boole", i per tant equival a que ho sigui la lògica $\mathbb{L}$. #

I aquesta al seu torn ens permet donar una condició equivalent en termes de $\mathfrak{D}$ que a més és homòloga a la mateixa per a àlgebres de Heyting i àlgebres de Boole.

Proposició 16

Si A és una aHt aleshores A és semisimple si i solament si en A coincideixen els sistems deductius primers i maximals.

Demostració:

El morfisme bilògic ja citat indueix un isomorfisme reticular entre $\mathfrak{D}$ i els H-sistemes deductius d'$A/\sim$, i aleshores la coincidència de primers i maximals de $\mathfrak{D}$ equival a la coincidència dels H-sistemes deductius H-primers i H-maximals d'$A/\sim$, ja que els primers equivalen als irreductibles, i tant la irreductibilitat com la maximalitat són conceptes reticulars que l'isomorfisme conserva; per tant equival a que el quocient sigui àlgebra de Boole. #

En general sabem que quan una certa lògica és finitària de Boole, el reticle dels seus tancats és isomorf al reticle dels H-sistems deductius de certa àlgebra de Boole, que aquí és $A/\sim$; però també podem trobar aquesta àlgebra de Boole sense moure'ns de l'àlgebra A.

Proposició 17

Si A és una aHt semisimple, aleshores el reticle dels sistemes deductius d'A, $\mathfrak{D}$, és isomorf al reticle dels H-sistemes deductius de l'àlgebra de Boole B .

Demostració:

Es dedueix de les dues proposicions anteriors i del fet que en ser A semisimple $B = T$, però també és aleshores monàdica i per tant T és una àlgebra de Boole isomorfa a $A/\sim_{R(A)}$; però aquí $R(A) = \{1\}$, per tant $\sim_{R(A)}$ coincideix amb $\sim$; en definitiva B resulta isomorf a $A/\sim$ i d'aquí el resultat. #

IV.4 AXIOMÀTIQUES INDEPENDENTS

A la proposició I.1.3 hem vist tres axiomàtiques independents per a les àlgebres de Heyting topològiques. És natural de buscar el mateix per a les monàdiques, les fortament monàdiques i les semisimples. Per a fer-ho correctament cal suposar que estem completant una axiomàtica independent per a les àlgebres de Heyting, i la que nosaltres coneixem, la de Monteiro [38] , es formula com a àlgebres de tipus (0,2,2,2) és a dir, amb les operacions binàries $\wedge$, $\vee$, i . i la constant 0 . Per a ésser coherents ens caldria, doncs, re-escriure les nostres condicions de la següent manera :

(M1) $I(Ix.0) = Ix.0$

(M2) $I(I(x.0).0) = I(x.0).0$

(M3) $x.(I(I(x.0).0)) = x.x$

(M4) Si $(I(x.0).0).y = x.x$ aleshores $x.Iy = x.x$

(FM) Queda igual $I(Ix.y) = Ix.Iy$

(S2) $(I(Ix.0)).0 = Ix$

(S3) $((I(Ix.0)).0).x = x.x$

(S4) $I(Ix.0)\ \ Ix = x.x$

De tota manera, per raons de comoditat, les usarem en llur forma original. Recordem les condicions emprades a les axiomàtiques de les àlgebres de Heyting topològiques:

(I1) $I1 = 1$ (que seria $I(x.x) = x.x$)

(I2) $Ix \leqslant x$ (que seria $Ix.x = x.x$)

(I3a) $I(x \wedge y) = Ix \wedge Iy$

(I3b) $I(x.y) \leqslant Ix.Iy$ (que seria $I(x.y).(Ix.Iy) = x.x$)

(I3c) $I(Ix.y) \leqslant Ix.Iy$ (que seria $I(Ix.y).(Ix.Iy) = x.x$)

(I4) $I^2x = Ix$

Començarem per les aHt monàdiques. D'entrada tenim ja la

Proposició 1

Les condicions (I2)+(Mi) impliquen la condició (I1), per cada $i = 1$ a 4 .

Demostració:

De (I2) podem deduir que $I0 = 0$; aleshores posant $x = 0$ a (M1) , (M2) o (M3) obtenim $I1 = 1$; i posant $x = y = 1$ a la hipòtesi de (M4) aquesta pren la forma $1 = 1$, per tant podem deduir per (M4) que $1 \leqslant I1$, és a dir, que $I1 = 1$. #

Amb això queden ja determinats els dotze conjunts independents d'axiomes següents:

Proposició 2

Els vuit conjunts d'axiomes (I2)+(I3j)+(I4)+(Mi) per $j = a,b$ i per $i = 1,2,3,4$, i els quatre conjunts d'axiomes (I2)+(I3c)+(Mi) per $i = 1,2,3,4$ són axiomàtiques independents de les àlgebres de Heyting topològiques monàdiques.

Demostració:

La proposició 1, junt amb la 2.5, ens diu que efectivament són axiomàtiques. Mostrarem la independència de cada condició simultàniament per a tots els conjunts en els que intervingui.

Considerem una cadena de tres elements $A = \{0,a,1\}$ és a dir $0<a<1$, que és àlgebra de Heyting amb l'operació canònica. L'aplicació $I0 = 0$, $Ia = I1 = 1$ compleix totes les condicions excepte la (I2) .

Sigui ara $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, també amb l'operació canònica; l'aplicació $Ix = \frac{x}{2}$ ssi $x \neq 1$, $I1 = 1$, compleix totes les condicions excepte (I3c) i (I4) ; aquestes condicions no formen mai part del mateix conjunt, per tant aquest exemple ens mostra llur independència als llocs respectius.

A la mateixa àlgebra de Heyting l'aplicació $I1 = 1$, $Ix = \frac{x}{2}$ ssi $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$ i $Ix = x$ ssi $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, compleix totes les condicions excepte les (I3j) $j = a,b,c$; en particular això mostra la independència de (I3a) i (I3b) .

Finalment és obvi que les condicions (Mi) són cada una independent de les condicions que les acompanyen, ja que disposem de moltes aHt no monàdiques. #

És molt curiós que mentre a les àlgebres monàdiques tenim dotze conjunts diferents d'axiomes independents, quan passem a les aHt fortament monàdiques aquests dotze conjunts col.lapsen vers un de sol. En efecte :

<u>Proposició 3</u>

El conjunt (I2)+(FM) és una axiomàtica independent de les aHt fortament monàdiques.

Demostració:

En primer lloc caldrà demostrar que és una axiomàtica. Si prenem només una desigualtat de les dues que conté la condició (FM) obtenim la condició (I3c); i posant $y = 0$ a (FM) obtenim (M1) . Per la proposició 1 podem deduir (I1), i aleshores tenim l'axiomàtica (I1)+(I2)+(I3c) de les aHt, que en afegir-hi la condició (FM) ens dóna una axiomàtica de les aHt fortament monàdiques.

La cadena de tres elements de la proposició 2 compleix (FM) però no (I2) . L'exemple que la seguia a la mateixa proposició compleix (I2) però en canvi no compleix (FM) .

Per tant aquesta axiomàtica és independent. #

Les axiomàtiques independents per a les aHt semisimples són més complexes; examinarem primer aquelles en què intervenen les condicions (S2), (S3) i (S4) , i ho farem afegint-les a una axiomàtica de les aHt simplement. Vegem en primer lloc quan podem eliminar la condició (I1) .

Proposició 4

Cada un dels conjunts següents: (I2)+(S2) , (I2)+(I4)+(S3) , (I2)+(S4) implica la condició (I1) .

Demostració:

Si posem $x = 0$ a (S4) obtenim directament $I1 = 1$. Si ho fem a (S2) obtenim $0 = \neg I1$, d'on $0 = I0 = I\neg I1$ i per tant $1 = \neg 0 = \neg I\neg I1 = I1$ aplicant un altre cop (S2) . Finalment si posem $x = 0$ a (S3) obtenim que $\neg I1 \leqslant 0$ és a dir, $\neg I1 = 0$, d'on $1 = \neg 0 = \neg I0 = \neg I\neg I1$ i utilitzant (I4) podem posar $1 = \neg I\neg I^2 1 \leqslant I1$ novament per (S3) ; per tant $I1 = 1$. #

Proposició 5

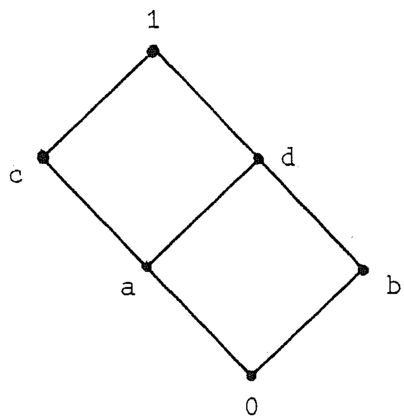
Els conjunts (I2)+(I3c)+(S2) i (I2)+(I3c)+(S4) són axiomàtiques independents de les aHt semisimples.

Demostració:

Ja hem vist que efectivament són axiomàtiques.

Si A és una àlgebra de Heyting qualsevol, amb almenys tres elements, l'aplicació $Ix = 1$ ssi $x \neq 0$, $Ix = 0$ compleix (I3c), (S2) i (S4) però no (I2) .

Per a la independència de (I3c) cal considerar l'àlgebra de Heyting donada pel diagrama adjunt, que utilitzem als exemples VI.1, VI.2 i VI.3 ; al desenvolupament del primer d'aquests es poden veure les taules del producte i de la negació. L'aplicació $I1 = 1$, $Ic = c$, $Ib = b$, i $Ia = Id = 0$, compleix les condicions (I2) , (S2) i (S4) , però no la condició (I3c) .



Finalment (S2) i (S4) són evidentment independents. #

Proposició 6

Els conjunts (I2)+(I3a)+(S2) i (I2)+(I3b)+(S2) són axiomàtiques independents per a les aHt semisimples.

Demostració:

Per la proposició 4 resulta que d'aquests conjunts podem deduir (I1), per tant per a veure que són axiomàtiques només ens falta veure que la condició (I4) es dedueix d'aquests conjunts. Ara bé, d'(I2) es dedueix $I^2x \leqslant Ix$, i aplicant (S2) dos cops resulta $I^2x = I(Ix) = \neg I \neg I(\neg I \neg Ix) =$

$= \neg I(\neg I \neg I(\neg Ix)) = \neg II \neg Ix = \neg I^2 \neg Ix$; però també tenim $I^2 \neg Ix \leqslant I \neg Ix$ i per tant $Ix = \neg I \neg Ix \leqslant \neg I^2 \neg Ix = I^2x$ d'on $I^2x = Ix$, que és (I4) .

L'exemple ja citat de la cadena de tres elements compleix (I3a), (I3b) i (S2) però no (I2) .

L'exemple que hem dibuixat a la proposició anterior, amb el mateix operador, compleix (I2) i (S2) , però en canvi no satisfà (I3a) ni (I3b) .

I evidentment (S2) és independent . #

Proposició 7

Els conjunts (I2)+(I3a)+(I4)+(S3) , (I2)+(I3b)+(I4)+(S3) , (I1)+(I2)+ +(I3c)+(S3) i (I2)+(I3c)+(I4)+(S3) són axiomatitzacions independents per a les aHt semisimples.

Demostració:

Per proposicions anteriors és clar que totes són axiomatitzacions. La independència, com a la proposició 2, la mostrarem simultàniament.

Si A és una àlgebra de Heyting qualsevol amb almenys dos elements, l'operador $Ix = 1$ per tot $x \in A$ compleix totes les condicions excepte (I2).

L'àlgebra dibuixada anteriorment compleix totes les condicions excepte (I3a), (I3b) i (I3c) .

Si A és la cadena de tres elements que ja hem esmentat, l'aplicació $I0 = Ia = 0$ i $I1 = a$ satisfà totes les condicions excepte (I1) i (I4) .

Finalment evidentment (S3) és independent de la resta. #

En aquesta proposició hom sembla advertir una cert caràcter més feble de la condició (S3) , ja que a les axiomàtiques en què intervé no és possible d'eliminar la condició (I4), o bé la (I1) . Per contra, a les axiomàtiques que exposem a continuació i que es basen en la condició (FM), la condició (S3) es comporta exactament igual que les condicions (S2) i (S4) .

Proposició 8

Els tres conjunts (I2)+(FM)+(Si) per i = 2,3,4 , són axiomàtiques independents per a les aHt semisimples.

Demostració:

Són axiomàtiques ja que es tracta d'afegir una de les condicions (Si) i = 2,3,4 , a una axiomàtica, independent per cert, de les aHt fortament monàdiques. L'exemple repetidament citat de la cadena de tres elements compleix (FM) , (S2) i (S4) , però no (I2) ; i si A és una àlgebra de Heyting qualsevol amb almenys dos elements l'aplicació Ix = 1 per tot $x \in A$ satisfà (FM) i (S3) però no (I2) .

Que (FM) no depèn de (I2)+(S2) ni de (I2)+(S4) és degut al fet que (I3c) no en depèn (proposició 5), ja que si (FM) en depengués, com que (FM) tot sol implica (I3c) , també aquest en dependria. I (FM) tampoc no depèn de (I2)+(S3) ja que en cas contrari, com que (I2)+(S2) impliquen (S3) trivialment, resultaria que (FM) dependria de (I2)+(S2), que acabem de veure que no és veritat .

Finalment les condicions (Si) són naturalment independents de (I2)+(FM) ja que hi ha aHt fortament monàdiques no semisimples. #

Per acabar hem d'aclarir que no sabem si els conjunts (I2)+(I3a)+ +(I4)+(S4) i (I2)+(I3b)+(I4)+(S4) , que certament són axiomàtiques de les aHt semisimples, són o no independents.

CAPÍTOL V

ALGUNES LÒGIQUES INTUICIONISTES MODALS

V.1 EL SISTEMA IM4

Ens proposem definir uns sistemes de lògica proposicional alhora intuicionistes i modals. Ho farem a l'estil correntment anomenat "de Lemmon" , popularitzat per aquest autor a [29] , encara que Gödel ja l'havia anticipat, a [18] ; aquest estil consisteix simplement en afegir regles i axiomes modals a una base completa per a la part no modal, que en el nostre cas serà evidentment el càlcul proposicional intuicionista. Concretament

Definició 1

Anomenarem IM4 el càlcul de proposicions donat de la següent manera :

El llenguatge d'IM4 és P(X) , l'àlgebra lliure de tipus (1,1,2,2,2) sobre un conjunt de generadors numerable X arbitrari. Les operacions es designaran com és habitual per L , $\neg$, $\wedge$, $\vee$, i $\rightarrow$, i abreviarem $\neg L \neg$ posant M .

Esquemes d'axiomes : - Els del càlcul proposicional intuicionista.

- $Lp \rightarrow p \qquad \forall p \in P(X)$
- $L(p \rightarrow q) \rightarrow (Lp \rightarrow Lq) \qquad \forall p,q \in P(X)$
- $Lp \rightarrow LLp \qquad \forall p \in P(X)$.

Regles d'inferència : Modus Ponens (MP): $p \, , \, p \rightarrow q \vdash q$

Necessitat (N) : $p \vdash Lp$.

La relació $\vdash$ de conseqüència sintàctica entre un $S \subseteq P(X)$ i un $p \in P(X)$ s'estén de la manera usual (demostracions finites) i com de costum posarem $\vdash p$ per a indicar que $\emptyset \vdash p$, i direm que "p és teorema (de