

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES  
EXPERIMENTALS I DE LA MATEMÀTICA

PROGRAMA DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS  
I DE LA MATEMÀTICA

BIENNI 2000-2002

**LA REPRESENTACIÓN CARTESIANA DEL  
MOVIMIENTO RECTILÍNEO: UN ESTUDIO DE LAS  
ARGUMENTACIONES DE LOS ESTUDIANTES DEL  
BÁSICO DE INGENIERÍA**

Tesi doctoral per optar al títol de Doctor de la Universitat de Barcelona

Presentada per

**NADIA LIZABETA GONZALEZ DAZA**

Dirigida per

Dra. JANETE BOLITE FRANT

Tutor Ponente

Dr. JOAQUIM GIMÉNEZ RODRÍGUEZ

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA, 2008



## Capítulo 5

# CONCLUSIONES

“...evidencias en esta investigación nos mostraron que para los estudiantes fue favorable participar de un ambiente donde sus interacciones les permitieron reflexionar sobre sus propias soluciones, donde se les dejaba cambiarlas, cuando encontraban otra que parecía más adecuada para ellos”.



## CAPITULO 5

### CONCLUSIONES

---

Esta investigación, fundamentada en los trabajos sobre el estudio del lenguaje, y las proyecciones cognitivas (Castro y Bolite Frant, 2008; Lakoff y Nuñez, 2000; Fauconnier y Turner, 2002; Nuñez, 2000), tiene como fin, reconocer las argumentaciones y proyecciones conceptuales de estudiantes noveles de ingeniería y la producción de significado matemático presente en ellas, mientras resuelven tareas relacionadas con la representación cartesiana del movimiento rectilíneo.

El desarrollo de la investigación, fue realizado implementando distintas tareas extra-clase, para dos grupos de estudiantes, confrontándolas con lo que sucedía en su clase de física, sobre movimiento rectilíneo.

Las actividades propuestas en las tareas se basaron en varios estudios: los ejercicios propuestos por Belmonte (1993), los trabajos de Speiser et al., (2003), que se refieren a la investigación sobre la forma como un grupo de estudiantes de secundaria -al trabajar con modelos, representaciones y su experiencia personal-, perciben el movimiento; y principalmente, en los trabajos de Nemirovsky (2004), que indican que la relación entre cambio físico y cálculo posibilitan el aprendizaje tanto de la física como de la matemática.

## 5.1 REFLEXIONES SOBRE LAS TRES TAREAS, INCLUYENDO LA CLASE

En el episodio 1 nos encontramos que, al realizar la observación de la clase de física sobre movimiento rectilíneo, no podíamos saber cual era el impacto del discurso de la profesora María Victoria en la comprensión de los estudiantes, ya que durante la grabación de la clase los estudiantes se dedicaron principalmente a escribir y a atender a las explicaciones de la profesora.

Cuando realizamos la primera tarea extra-clase con un grupo de estudiantes de su curso con el propósito de investigar esta situación encontramos dos situaciones: tres de los cuatro estudiantes, Olga, Alma y Carlos nos mostraban en sus diálogos, que ellos repetían el habla de María Victoria, pero, al comparar con sus hojas de trabajo y el video vimos que en su respuesta al problema utilizan una expresión analítica, en lugar de la estrategia gráfica indicada por la profesora en la clase, es decir expresan y utilizan la estrategia gráfica como un adorno para conseguir la aprobación de la profesora/investigadora.

Mientras que Fedor, el cuarto estudiante, se apropia del género del habla de la profesora, no para agradar a alguien sino para que efectivamente lo ayude a solucionar el problema de un modo aceptable en la academia, utilizando la estrategia gráfica propuesta por la profesora a su conveniencia.

Como consecuencia de esta diferencia, fue posible aislar dos argumentos: *el dibujo es una herramienta* y *el dibujo es un adorno*. Por otra parte, en esta experiencia, observamos que Fedor, utiliza al menos tres espacios mentales: el espacio de las ecuaciones matemáticas, el espacio de las ecuaciones físicas y el espacio de los gráficos de funciones matemáticas que al combinarse le posibilitan producir significados. Para el análisis de los mapeamientos cognitivos, en nuestro estudio, nos fue posible establecer el montaje conceptual de Fedor, para este caso

En el episodio 2 elegimos varios momentos en los cuales los estudiantes se dedicaban a resolver las actividades de la tarea 1, usando definiciones y reglas

matemáticas, aplicadas a la física. Observamos que utilizaban el mismo género del habla de su profesora en clases de Física y notamos que trataban siempre de que sus argumentos concordaran entre todos.

Sin embargo, en el episodio 3, al proponerles una pregunta que no implicara el uso de cálculos matemáticos *-¿Qué significa que la velocidad de una partícula sea positiva?-* vimos que comenzaron a disentir en cuanto a sus opiniones y a negociar las posibles soluciones. Hay en juego tres argumentos: el de Carlos, Olga y Alma que afirmaban *-se aleja del origen cuando la velocidad es positiva-* y los argumentos de Fedor, primeramente *-se mueve hacia la derecha cuando la velocidad es positiva* y finalmente *-se mueve en la dirección y sentido del vector  $\hat{i}$  -*.

Estas dos visiones podrían explicarse con las hipótesis: “el gráfico muestra que la partícula avanza cuando tiene velocidad positiva” y “la partícula se mueve en sentido positivo cuando la velocidad es positiva”. Estas diferentes hipótesis se originan de distintos montajes conceptuales que producen los estudiantes.

En el episodio 4, nos habíamos propuesto observar a los estudiantes desarrollando sus propias argumentaciones, alejándose del género del habla de la clase. Por lo cual, les presentamos situaciones problemáticas sobre representación del movimiento, utilizando secuencias de dibujos y el accionar de sus propios cuerpos, las cuales no son habituales en el aula de clase. En este episodio los estudiantes se turnaron para realizar los movimientos que en la secuencia de dibujos un niño le impartía a un balón. Antes de esta actividad, ellos habían observado la secuencia y habían explicado por escrito los movimientos del niño y el balón.

Observamos que cuando los movimientos fueron ejecutados por los estudiantes, los realizaron de manera distinta en las etapas iniciales de 0 a 1 y de 1 a 2: una estudiante supuso un movimiento de rotación del niño, manteniendo el balón en un plano horizontal, y el otro estudiante, supuso un movimiento de rotación del niño, manteniendo el balón en un plano vertical.

En las otras etapas coincidieron aparentemente al realizar los movimientos, aunque al explicarlos verbalmente ellos indicaron diferencias.

Cuando comparamos el accionar de los estudiantes con sus descripciones escritas observamos que tratan de coincidir con lo que escribieron en ellas. En las etapas iniciales los estudiantes, al describir el movimiento por escrito, enfocan su atención en el niño y todos dicen que éste efectúa un movimiento de rotación, mientras que sobre el balón: una declara que experimenta un movimiento rectilíneo, otro que es parabólico y otra no hace indicaciones sobre el movimiento. Después que el balón es lanzado, dos estudiantes indican que el balón describe un movimiento rectilíneo, y el otro afirma que describe un movimiento parabólico. Ningún estudiante hace mención a que el niño permanece en reposo.

Pensamos que estas diferencias se presentan porque esta actividad involucra dos objetos en movimiento, el niño y el balón. Debido a las diferencias y ambigüedades encontradas en las descripciones y ejecuciones del movimiento, intentamos explicarlas mediante el análisis del siguiente episodio en el que los estudiantes, elaboran un gráfico posición/ tiempo del movimiento del balón, para luego discutir sus soluciones.

En el episodio 5, luego de que cada estudiante describió e interpretó su gráfico, se les propuso que opinaran sobre los gráficos en conjunto, allí, al confrontar los gráficos surgieron diálogos en las que los estudiantes comenzaron a negociar sus soluciones.

Notamos que en esta negociación no se produjo una discusión verbal que nos permitiera levantar los argumentos a partir de los diálogos que se realizaron, ya que el discurso de uno de los estudiantes (Leoncio) siempre prevalecía sobre el de las otras dos estudiantes Marta y Belkis. Pero, al discutir con la profesora/investigadora en el pizarrón y volver a dibujar sus gráficos, emergieron, en los gráficos realizados finalmente por Marta y Belkis, los cambios originados por la influencia del discurso y del gráfico de Leoncio.

Cuando revisamos este episodio en su totalidad reconocemos que aunque pretendíamos con esta tarea generar diálogos, e interacciones, entre los estudiantes, nos encontramos que la secuencia de dibujos a pesar de las expectativas generadas en los estudiantes y que les permitió expresar y ejecutar formas distintas de describir el movimiento, al explicar e interpretar el movimiento oralmente, casi siempre se expresaron como lo hacen en la clase, o como escuchan a su profesora hacerlo.

Es importante destacar que en una situación de aprendizaje, muchas veces lo que el estudiantes quiere es impresionar al profesor o a compañero. Puede suceder también que el objetivo del estudiante al enunciar algunas justificaciones para la resolución de algún problema matemático sea solamente para librarse de la incomodidad de ser cuestionado.

A veces, y es lo que observamos entre los estudiantes participantes en la tarea 3, el estudiante sede a los argumentos de otro, sólo porque este otro esta considerado como buen alumno, o como en el caso de Leoncio, por la forma como se expresa y las palabras que utiliza, que reflejan en mayor medida, el género del habla de la profesora en la clase, y no porque estaba de acuerdo con lo que fue dicho.

A continuación reflexionamos sobre el episodio 6, el cual ocurre durante la implementación de la tarea 6. En esta tarea continuamos con la búsqueda de crear espacios para la participación natural y directa de los estudiantes y conseguir sus discursos argumentativos, así que decidimos incorporar tecnología en sus actividades.

Para esta tarea se diseño el programa de simulación *Pepo El Caminante*, basado principalmente en el software *vrum-vrum* (Teodoro y Clérigo, 2007, 3 de octubre), en la que un niño camina por una vereda rectilínea, controlando su movimiento por medio de los cambios de la velocidad originados a partir de las teclas del computador.



Este episodio resume la ejecución de dos de las cuatro actividades que realizaron los estudiantes Alma, Olga, Fedor y Carlos, para la tarea 6. Ellos analizaron gráficos posición/tiempo en sistemas de representación cartesiana, dibujados por el simulador y por ellos mismos en el pizarrón. Al inicio los estudiantes comenzaron a describir sus gráficos con términos semejantes a los que escucharon en la clase mientras insistíamos para que hablarán en términos de lo que hace el niño en el simulador, esto lo hacíamos (y pudimos verificar esta insistencia en las visualizaciones del video) porque queríamos que los estudiantes hablarán sobre el movimiento rectilíneo en términos diferentes a los de la clase.

Pero ellos, estaban más atentos en ubicar la velocidad a la que caminaba el niño para que el gráfico quedara como el que les habíamos dado para representar. En análisis posteriores, observando el video muchas veces, notamos que de verdad el niño representaba para los estudiantes un ornamento del simulador.

Para los estudiantes los controles (las teclas del computador) eran fundamentales y no el niño, puesto que la forma del gráfico dependía del uso dado a la tabla numérica de la velocidad /tiempo que variaba al pisar las teclas de la computadora y que simultáneamente hacía caminar al niño.

Aunque nosotros esperábamos que los estudiantes al realizar las actividades con el simulador, se concentraran particularmente en el movimiento del niño y el gráfico posición/ tiempo, al final de las actividades y en el análisis respectivo encontramos que lo que favorecía el simulador era al blending, que realizaron los estudiantes entre la tabla numérica, la tabla de los controles, el teclado y la forma del gráfico, ya que esta última actividad fue realizada con notable éxito.

Por lo tanto, encontramos que estas situaciones podían generar la aparición de nuevos espacios mentales de entrada, en los montajes conceptuales de los estudiantes.

Como síntesis de lo expuestos anteriormente, concluimos acerca de las preguntas organizadas para responder a los objetivos de nuestra investigación.

## 5.2 CONCLUSIONES SOBRE LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Para responder a los objetivos de nuestra investigación nos planteamos, primeramente las dos siguientes preguntas:

- ¿Qué argumentaciones expresan los estudiantes, a través del lenguaje oral, gestual y escrito, al participar en tareas relacionadas con la representación gráfica cartesiana del movimiento rectilíneo?
- ¿Qué modelos de proyección conceptual emergen durante las actividades de interpretación y representación del movimiento rectilíneo?

Luego de realizar nuestro estudio podemos afirmar que, el análisis del discurso (oral, escrito, gestual) observado en las imágenes y las transcripciones de los videos (tareas-clase), junto con las hojas de respuestas de los estudiantes, mostró la coexistencia de diferentes argumentos, metáforas y montajes conceptuales, con distintas formas de representaciones.

Los modos comunicativos de las argumentaciones de los estudiantes fueron principalmente orales y escritos. Debido a la naturaleza de las tareas, dentro del modo escrito, se privilegiaron los gráficos cartesianos. Adicionalmente, en las discusiones se desarrollaron otras representaciones gráficas menos complejas para complementar y justificar las argumentaciones.

En relación con la tercera pregunta propuesta en nuestra investigación, cuyo contenido es:

- ¿Qué papel juegan las argumentaciones de los estudiantes, en el reconocimiento de la producción de significados matemáticos y la comprensión de la representación cartesiana del movimiento rectilíneo?

Hemos encontrado que el análisis de las argumentaciones observadas en las imágenes y las transcripciones de los videos (tareas-clase), junto a las hojas de respuestas de los estudiantes, evidenciaron que las enunciaciones de los estudiantes, al realizar las tareas propuestas, están impregnadas por el género del habla de la profesora del curso, creando un conflicto entre lo que el estudiante piensa o quiere decir y lo que el campo de comunicación de la clase le impone a través del habla o discurso de la profesora. Mientras la profesora durante la clase, hace sus explicaciones preocupada en conectar, la matemática con la física implicada en los contenidos; los estudiantes, de toda la información que se les presenta, se apoderan sólo de partes de ella

En relación con el papel que juegan las argumentaciones en la comprensión, notamos que durante las discusiones entre los estudiantes, luego de producirse controversias y del levantamiento de argumentos convincentes, se llegaron a acuerdos, sin embargo, al solicitar conclusiones al grupo, algunos de los estudiantes retomaban sus argumentos iniciales. Esto podría verse como un reflejo de lo que ocurre en el salón de clases, cuando el profesor/a, luego de exponer un contenido, al indagar entre los estudiantes sobre lo aprendido, consigue respuestas satisfactorias, que luego en evaluaciones posteriores pueden llegar a modificarse.

En relación al contenido de las argumentaciones de los estudiantes, se observó, además del uso del lenguaje cotidiano, la producción de conocimiento matemático relacionado con conceptos tales como el de pendiente (como interpretación física y geométrica de la derivada); el estudio analítico de gráficos de funciones; dirección, sentido y módulo de vectores, entre otros.

Según Bolite Frant et al. (2005), no se puede tener la certeza de qué, y cómo, están siendo mapeadas las inferencias que hacen los estudiantes sobre un *texto* (en el sentido de Bakhtin, 2003). Aunque no podemos saber exactamente, qué es lo que está siendo mapeado del discurso de la profesora por los estudiantes, sus acciones revelan que mientras para ella, la matemática es fundamental para resolver problemas de la física; para ellos, que no comparten el mismo conocimiento matemático, ésta tiene una interpretación diferente.

### 5.3 CONSIDERACIONES FINALES E IMPLICACIONES

Realizamos esta investigación proponiendo a grupos de estudiantes distintas tareas con objetivos semejantes, relacionados con la representación cartesiana del movimiento rectilíneo, que inicialmente fueron elaboradas más próximas de las tareas y actividades que se proponen usualmente en el aula de clases.

A través de la implementación, del levantamiento y el análisis de episodios relevantes, las tareas se fueron rediseñando, distanciándose unas a otras, hasta la ejecución y el subsiguiente análisis de la tarea con informática (simulador). La influencia recíproca entre las representaciones matemáticas, tales como gráficos, tablas y ecuaciones, por un lado y la significación de cambio correspondiente a la física por el otro, se presentó como un ambiente rico para la comprensión de las matemáticas envueltas en esos procesos.

En este estudio, idealizamos escenarios en los cuales los estudiantes usaron lápiz y papel; su propio cuerpo y la informática para representar el movimiento rectilíneo. En todas estas situaciones, los estudiantes parecían “obligados” a hablar y discutir sobre lo que estaban haciendo para llegar a las soluciones de cada problema, ejercicio o actividad sobre el gráfico posición/ tiempo.

En sus argumentos pudimos destacar metáforas orientacionales, como por ejemplo, hacia arriba-hacia abajo, adelante-atrás, se aleja ó se acerca del

origen, pero no nos preocupamos en explórarlas una vez que varios trabajos, entre ellos el de Acevedo (2007) del mismo Departamento, lo hace con maestría.

Nuestro estudio sobre las argumentaciones y las proyecciones conceptuales ha permitido llamar la atención, sobre la importancia de que, los profesores, las tomen en cuenta durante los procesos de enseñanza-aprendizaje, tal como lo hemos evidenciado en las respuestas a las preguntas de la investigación

Hemos aportado, datos empíricos que permiten un mejor conocimiento del uso de las argumentaciones y las proyecciones conceptuales en la comprensión de ideas matemáticas de los estudiantes, durante la representación del movimiento rectilíneo, en primer año de ingeniería.

Como contribuciones teóricas y metodológicas, proponemos una articulación de la teoría de la corporeidad, con el modelo de la estrategia argumentativa para los estudios de las interacciones en clase de matemática, que considere, no solamente las características del contexto educacional venezolano, sino también, otros casos similares, que tengan cursos de ingeniería, con la misma estructura programática.

Resaltamos asimismo, que un análisis realizado a partir de la perspectiva lingüística, y con la articulación acá utilizada, ayudó tanto a la profesora/ investigadora como a la profesora participante en el estudio, a abrir nuevas ventanas para tener miradas distintas a las usuales (insights) en la comprensión del conocimiento de los estudiantes.

Presentamos un resumen a continuación, en la Figura 5.1, basado en Croos (2003), sobre las implicaciones para la comprensión en el aula de clases, que se pueden derivar bajo la óptica de la perspectiva lingüística propuesta en la investigación.

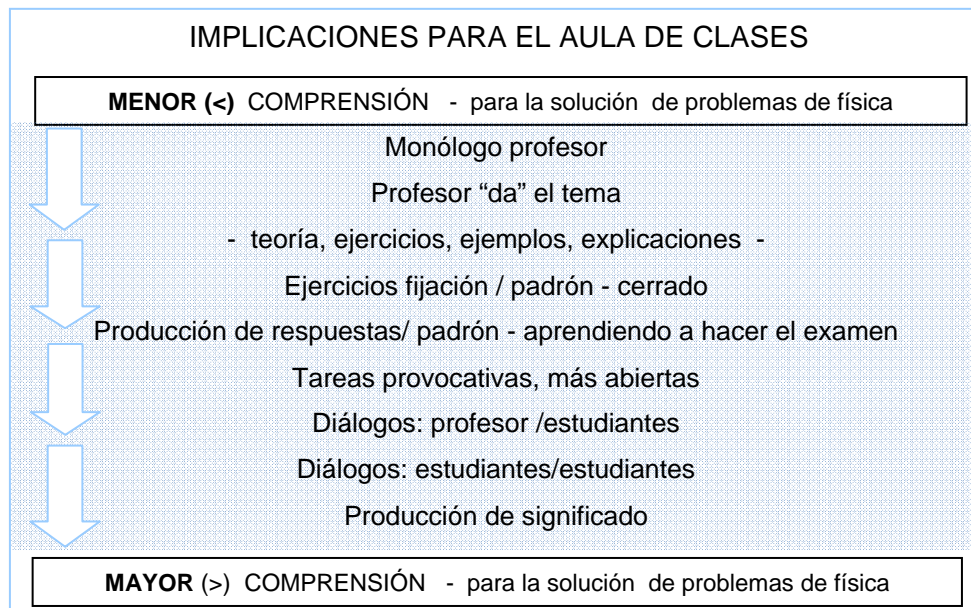


Figura 5.1. Implicaciones para el aula de clases

Sabemos que es necesario profundizar el estudio, por lo que vamos a seguir investigando los abordajes de los estudiantes, para gráficos cartesianos de funciones reales que representan movimiento, y también vamos a seguir mejorando y perfeccionando el diseño de objetos como el programa de simulación, entretanto, evidencias en esta investigación nos mostraron que para los estudiantes fue favorable participar de un ambiente donde sus interacciones les permitieron reflexionar sobre sus propias soluciones, donde se les dejaba cambiarlas, cuando encontraban otra que parecía más adecuada para ellos. Es importante destacar que estas interacciones no deben ser vistas como "copias" sino como una posibilidad de crecimiento cognitivo.

