

DEPARTAMENT DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES  
EXPERIMENTALS I DE LA MATEMÀTICA

PROGRAMA DE DIDÀCTICA DE LES CIÈNCIES EXPERIMENTALS  
I DE LA MATEMÀTICA

BIENNI 2000-2002

**FENÓMENOS RELACIONADOS CON EL USO DE  
METÁFORAS EN EL DISCURSO DEL PROFESOR. EL  
CASO DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES**

Tesi doctoral per optar al títol de Doctor de la Universitat de Barcelona

Presentada per

**JORGE IVAN ACEVEDO NANCLARES**

Dirigida per

Dr. VICENÇ FONT MOLL

i

Dra. JANETE BOLITE FRANT

UNIVERSITAT DE BARCELONA

BARCELONA, 2007

## CAPÍTULO 1

# EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN. JUSTIFICACIÓN, METODOLOGÍA Y OBJETIVOS

### Resumen

*En el apartado 1 se justifica la relevancia del problema de investigación. En el apartado 2 se presentan los objetivos y las preguntas de la investigación. En el apartado 3 se comenta la metodología usada, en el apartado 4 se explica el contexto de la investigación, así como las características de los sujetos investigados y, por último, en el apartado 5 se comenta la estructura de la memoria de la investigación.*

### 1.1 RELEVANCIA DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En Sriraman y English (2005) se hace un estudio global sobre las diferentes agendas de investigación en Educación Matemática. En este trabajo se considera que una de las principales cuestiones a considerar es la reciente aparición en el área de la “Embodied Cognition” y proponen como pregunta de investigación la siguiente cuestión: ¿Cuáles son las implicaciones de este punto de vista para la educación matemática, para la investigación en educación matemática y para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

La cuestión que proponen investigar Sriraman y English (2005) está tomada del forum sobre investigación del PME del 2005 de Melbourne, lo cual no resulta sorprendente, sobre todo si tenemos en cuenta que, con alguna variante, esta pregunta ha sido uno de los temas debatidos en muchos de los congresos que recientemente se han celebrado en nuestra área de investigación. Por ejemplo, en la CIEAEM 54 (celebrada en España, en julio de 2002) se plantearon, entre otras, las siguientes preguntas:

- Si los conceptos abstractos son metafóricos, ¿cuáles son las metáforas usadas en la producción, sistematización y comunicación del pensamiento matemático?
- Las nuevas tecnologías permiten la posibilidad de nuevas y diferentes experiencias. ¿Pueden éstas ayudar al desarrollo de poderosas metáforas

que faciliten la construcción, organización y comunicación del pensamiento matemático?

Desde que Lakoff y Johnson pusieron de manifiesto la importancia del pensamiento metafórico, entendido como la interpretación de un campo de experiencias en términos de otro ya conocido (Lakoff y Johnson, 1991), el papel del pensamiento metafórico en la formación de los conceptos matemáticos es un tema que cada vez tiene más relevancia para la investigación en didáctica de las matemáticas (English 1997; Lakoff y Núñez, 2000; Núñez 2000, 2004 y 2005; Presmeg, 1992, 1998, 2002 y 2004; Van Dormolen, 1991, entre otros).

## **1.2 OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN**

Esta investigación se enmarca en la pregunta de investigación que proponen Sriraman y English (2005) pero restringida a un cierto tipo de objeto matemático: las funciones, y, más en concreto, su representación gráfica. La investigación que presentamos tiene como *primer objetivo* intentar responder a las cinco preguntas siguientes:

- 1) ¿Cuáles son las diferentes metáforas que se han utilizado históricamente para organizar el conocimiento sobre las gráficas de las funciones?
- 2) ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato?
- 3) ¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas?
- 4) ¿Qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos?
- 5) ¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados?

La investigación en didáctica de las matemáticas sobre las metáforas ha permitido resaltar por una parte la importancia que tienen éstas en el proceso de instrucción y, por otra, han puesto de manifiesto que cualquier reflexión sobre las metáforas tiene que tener presente la gran complejidad de factores relacionados con ellas. En nuestra opinión, una investigación sobre metáforas será más fructífera si se enmarca en alguno de los programas de investigación que últimamente se están desarrollando en el área de la didáctica de las matemáticas, ya que esta es la manera de poder afrontar la complejidad de factores asociados a las metáforas. Esta convicción nos ha llevado a las siguientes preguntas de tipo teórico:

- 6) ¿Cómo se relaciona la metáfora con las cinco dimensiones duales contempladas en el enfoque ontosemiótico de cognición e instrucción matemática?
- 7) ¿Cómo se relaciona la metáfora con los elementos constituyentes de los constructos Configuraciones Epistémicas/Cognitivas propuestos en dicho enfoque?

Si el primer objetivo nos lleva a considerar como primer marco teórico de referencia la “Embodied Cognition” de Lakoff y Núñez, el segundo nos lleva a considerar como segundo marco teórico de referencia el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS a partir de ahora) y, más en general, planteamientos recientes desarrollados desde nociones semióticas “peircianas” por investigadores como Adalira Saenz-Ludlow , Norma Presmeg, Michael Hoffmann, Paul Ernest, Luis Radford, Michael Otte, Sigmund Ongstad y recogidos en un monográfico publicado en *Educational Studies In Mathematics*<sup>1</sup>.

### 1.3 METODOLOGÍA

Las preguntas que nos hemos formulado en esta investigación se puedan clasificar en dos grupos: teóricas y empíricas. Para responder a las preguntas teóricas la metodología ha consistido, básicamente, en un análisis de fuentes documentales de tipo epistemológico, histórico, cognitivo, semiótico y didáctico, adoptando una posición propia sobre las diferentes fuentes. Ahora bien, esta posición se ha producido de manera dialéctica con el avance de la fase empírica de la investigación. Es decir, los constructos teóricos que se han ido proponiendo han servido para dirigir la parte empírica, al mismo tiempo que han sido revisados, modificados y enriquecidos a medida que ha ido avanzando dicha fase empírica.

La investigación para responder a las preguntas 2-5 de tipo “empírico” ha tenido en cuenta algunas características de las siguientes metodologías de investigación:

- *Interpretativa*: ya que la investigación ha tenido en cuenta el sentido de las acciones de los sujetos.
- *Cualitativa*: puesto que el objeto de investigación no es algo que se pueda observar y cuantificar.

---

<sup>1</sup> A. Sáenz-Ludlow, y N. Presmeg (Eds), Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. Special Issue, *Educational Studies In Mathematics*, 61, 1–296.

- *Hermenéutica*: en el sentido de que se han hecho interpretaciones de las interpretaciones que hacen los sujetos investigados (por ejemplo, lo que dicen los profesores sobre su discurso).

También ha presentado las siguientes características:

- *Exploratoria*: en el sentido que se ha pretendido recoger y analizar información que pueda servir para orientar futuras investigaciones.
- *Descriptiva*: puesto que se han generado informes narrativos a partir de la investigación de campo realizada.
- *De campo*: ya que la investigación se ha realizado mayoritariamente en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.
- *Etnográfica*: ya que se ha pretendido comprender los acontecimientos tal y como los interpretan los sujetos investigados, mediante una inmersión en su pensamiento y en su práctica, evitando en la medida de lo posible alterar la realidad estudiada. Además la mayor parte de la información se ha obtenido en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.

Los sujetos investigados han sido profesores de bachillerato del estado español. Se trata, por tanto, de un estudio de casos. La selección de estos profesores se ha hecho teniendo en cuenta las fases siguientes:

- 1) *En la fase descriptiva* se hizo un reconocimiento del lugar y los sujetos a investigar, para verificar que realmente aportaban información pertinente a la investigación.
- 2) *En la fase selectiva* se seleccionaron los profesores más representativos para ser los sujetos de nuestra investigación.
- 3) *En la fase focalizada* se realizaron grabaciones en video de algunas clases de estos profesores, las cuales fueron transcritas y analizadas, también se analizaron los libros de texto que se usaron, el material complementario que elaboraron, los exámenes de los alumnos y el cuaderno de algunos de sus alumnos. Después se entrevistó a los profesores y a algunos de sus alumnos.

La información de campo se obtuvo en el lugar de trabajo de los sujetos investigados. Los profesores participantes lo hicieron de manera voluntaria y consintieron de forma consciente la intromisión en sus tareas docentes (observación de sus clases, grabación en vídeo, análisis de materiales de trabajo, etc.). Los alumnos participaron a petición de su profesor. La elección de los profesores y de los alumnos que fueron grabados en vídeo

no se realizó bajo ningún criterio estadístico, simplemente se tuvo en cuenta su disponibilidad a colaborar y a ser grabados.

El principal instrumento de recolección de los datos ha sido las grabaciones en vídeo de clases impartidas por los profesores y de entrevistas con profesores y alumnos. También se han elaborado cuestionarios y se han analizado libros de textos y exámenes de alumnos. Hemos optado por estas herramientas de recolección de datos porque en nuestra investigación tratamos de analizar cómo alumnos y profesores le dan sentido a sus construcciones simbólicas a partir del mundo cotidiano, intentando una comprensión “desde dentro” y, en la medida de lo posible, ajustándonos a la complejidad de la relaciones entre alumno, profesor y saber. Se trata de una tarea que no es fácil si se tiene en cuenta que nuestro propósito era analizar como un profesor articula su discurso matemático en términos de un pensamiento y un lenguaje metafórico, y como este discurso conforma el conocimiento personal de cada alumno.

En esta investigación se ha optado por la grabación en video de ciertos episodios porque el uso del vídeo en la recolección de datos es una fase determinante dentro de cualquier investigación en didáctica de la matemática. El video es un instrumento flexible tanto para archivar información visual como auricular, es una manera de capturar ricos comportamientos y complejas interacciones, que le permiten al investigador examinar y reexaminar los datos una y otra vez. Esta potencialidad extiende y aumenta las posibilidades de observación por parte de los investigadores y permite capturar, momento a momento, el desarrollo de algunas actividades. Por otra parte, permite captar sutiles matices tanto en el desarrollo verbal como en el comportamiento no verbal.

En toda investigación los datos se convierten o bien en “grabaciones” o en “transcripciones”. En esta investigación hemos optado por convertir las grabaciones en transcripciones.

Se realizaron tres tipos de grabaciones de video que posteriormente fueron transcritas: 1) grabaciones en video de las clases de los profesores, 2) grabaciones en video de entrevistas a profesores y 3) grabaciones en video de entrevistas a alumnos.

- Grabaciones de clase. Para poder analizar los procesos de instrucción efectivamente realizados por los profesores necesitamos textos escritos. Por este motivo, primero se grabaron en video las clases y después se transcribieron. La transcripción se organizó en tres columnas: (1) transcripción del discurso oral de los profesores y de los estudiantes (2) lo que se escribe en la pizarra y (3) comentarios, en

especial sobre los gestos del profesor. Hay que resaltar que el foco de observación fue el discurso y la práctica del profesor, de esta manera el discurso y la práctica de los alumnos aparecen solamente cuando interactúan con el profesor.

- En las entrevistas la transcripción se estructuró en dos columnas: (1) transcripción del discurso oral de las preguntas del entrevistador y de las respuestas de los profesores y (2) comentarios.

Una vez que tenemos estos textos escritos necesitamos descomponerlos en unidades de análisis. Una posible manera de realizar esta descomposición es tomar como unidad de análisis básica el constructo “configuración didáctica”. En Godino, Contreras y Font (2006) se considera que una *configuración didáctica* –CD a partir de ahora- está constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática.

El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas. Aunque el criterio básico para determinar una CD es la realización de una tarea, la agrupación en configuraciones didácticas es flexible y queda a criterio del investigador.

La división de la sesión de clase en configuraciones didácticas permite realizar análisis a posteriori de tipo macroscópico sobre un conjunto amplio de configuraciones didácticas, mientras que los análisis más finos (microscópicos) se realizan fundamentalmente sobre un número muy reducido de estas configuraciones didácticas. En nuestra investigación, después de delimitar una CD, enfocaremos nuestro análisis, sobre todo, hacia los fenómenos relacionados con el uso de metáforas que se observan en ella.

Para Cohen y Manion (1990, p. 331) puede definirse la triangulación como: (...) *el uso de dos o más métodos de recogida de datos en el estudio de algún aspecto del comportamiento humano*. De acuerdo con este punto de vista, se ha realizado una primera triangulación de datos, la cual ha consistido en consultar diferentes fuentes (grabación de la clase, entrevista a los profesores, entrevista a sus alumnos y análisis del material -libros de texto, exámenes de los alumnos, etc.-). Ahora bien, en esta investigación consideramos, de acuerdo con Cerda (2000), que el objetivo de la técnica de la triangulación es impedir que se acepte con demasiada facilidad la validez de las impresiones iniciales. De acuerdo con este punto de vista, también nos planteamos una triangulación de expertos. Para validar nuestro análisis se planificó un nuevo proceso de triangulación, el cual consistió en que el primer tipo de análisis, realizado por el doctorando asesorado por el

director de tesis, se sometió al análisis de especialistas en el discurso verbal, escrito y no verbal de los docentes, después al análisis de especialistas en la moderna teoría de la metáfora y, más en general, con expertos en didáctica de las matemáticas interesados en los aspectos semióticos ya que los análisis realizados se han presentado como comunicaciones a diferentes congresos.

## 1.4 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN. ALUMNOS Y PROFESORES INVESTIGADOS

Tal como se ha dicho anteriormente, los sujetos que han participado en esta investigación han sido profesores que impartían clases en el curso de 2º de Bachillerato del Sistema Educativo del Estado Español, y también algunos de sus alumnos. A continuación describimos brevemente algunas características de dicho sistema escolar así como de los profesores y alumnos que han colaborado, de manera voluntaria, en esta investigación.

### 1.4.1 Estructura del Sistema Educativo Español

A continuación sigue un esquema de la estructura del Sistema Educativo Español, el curso en el que hemos centrado nuestro estudio ha sido el segundo curso de Bachillerato que es el último curso de la enseñanza secundaria no obligatoria, se trata de alumnos cuya edades oscilan entre 17 y 18 años:

| Estructura del sistema educativo español |                        |   |                          |
|--|------------------------|---|--------------------------|
| Edad                                     | Ciclos y Cursos        | Etapas  | Enseñanza                |
| 0 a 3                                    | 1º Ciclo Infantil      | Educación Infantil                              | Carácter voluntario      |
| 3 a 6                                    | 2º Ciclo Infantil      |   |                          |
| 6 a 8                                    | Ciclo Inicial 1º y 2º  | Educación Primaria                              | Enseñanza obligatoria    |
| 8 a 10                                   | Ciclo Medio 3º y 4º    |   |                          |
| 10 a 12                                  | Ciclo Superior 5º y 6º |   |                          |
| 12 a 14                                  | 1º Ciclo ESO: 1º y 2º  | Educación Secundaria Obligatoria                | Enseñanza obligatoria    |
| 14 a 15                                  | 2º Ciclo ESO: 3º       |   |                          |
| 15 a 16                                  | 2º Ciclo ESO: 4º       |   |                          |
| 16 a 17                                  | 1º curso               | Bachillerato y Ciclos Formativos de Grado Medio | Enseñanza no obligatoria |
| 17 a 18                                  | 2º curso               |   |                          |
| 18 ó más                                 | 1 ó 2 cursos           | Ciclos Formativos de Grado Superior             |                          |

Figura 1. Estructura del sistema educativo Español



### **1.4.2 Análisis del currículum del Bachillerato.**

El segundo curso de Bachillerato es el último de los dos cursos que forman el Bachillerato, que es la etapa no obligatoria de la enseñanza secundaria, y es la que prepara al alumno para estudios universitarios y ciclos formativos de grado superior.

La materia de matemáticas en el bachillerato de la Comunidad Autónoma de Catalunya (España) está regulada por tres niveles de concreción, el primero lo fijan las administraciones estatales y autonómica, el segundo lo fija el proyecto educativo de la institución escolar y el tercero está fijado por los libros de texto, material de aula, etc.

#### *Primer nivel de concreción*

La investigación que hemos desarrollado comenzó con un marco normativo que sufrió variaciones mientras duró dicha investigación, concretamente en el curso 2003-2004 se modificaron los currículums. Dichas variaciones afectaron muy poco al contenido “representación gráfica de funciones”, objetivo de nuestra investigación. Por este motivo consideramos suficiente, describir brevemente la normativa oficial vigente en el momento de iniciar nuestra investigación.

El 13/3/96 se publicó en el Diario Oficial de la Generalidad (a partir de ahora DOG n. 2181) el primer nivel de concreción del currículo de las tres modalidades del bachillerato LOGSE: de ciencias de la naturaleza y de la salud, de tecnología y ciencias sociales. El currículo de las modalidades de ciencias de la naturaleza y de la salud y el de tecnología es el mismo. En este DOG, para cada modalidad, podemos encontrar una introducción, unos objetivos generales, unos contenidos, clasificados en: 1) hechos, conceptos y sistemas conceptuales, 2) procedimientos y 3) valores, normas y actitudes) y unos objetivos terminales. La introducción es casi igual también para la modalidad de ciencias sociales, y los objetivos generales son los mismos.

En la introducción hay unas consideraciones de tipo social de las que queremos resaltar las siguientes:

“(..) centrar los objetivos del aprendizaje de los alumnos en generar capacidades para aprender, más que a dotarlos de contenidos estáticos propios de épocas más monótonas en el ámbito social y productivo en particular, y en el entorno cultural en general.” (DOG n. 2181, pág. 2454).

“(..) Por el otro, los currículos de bachillerato se diseñan pensando en una ampliación de la base social a la que van dirigidos y tienden a retrasar su

tratamiento más profundo en los currículos posteriores, ya sean universitarios o profesionalizadores.”(DOG n. 2181, pág. 2454).

A continuación siguen unas consideraciones sobre la Matemática como una ciencia fundamentalmente procedimental, y como instrumento para las otras ciencias:

“En este sentido, los contenidos que se detallan en este currículo pretenden servir para dotar al alumnado de un instrumento imprescindible para introducirse de manera autónoma y creativa en el mundo de la ciencia y la tecnología” (DOG n. 2181, pág. 2454).

A continuación hace una reflexión sobre el hecho de que considerar las matemáticas como algo básicamente procedimental no nos debe hacer olvidar que el aprendizaje debe ser significativo, y que por tanto, además de explicar los procedimientos, hay que explicar los conceptos y principios que sustentan estos procedimientos:

“No es preciso decir que, a pesar de insistir en el carácter básicamente procedimental, hay un conjunto de conceptos y principios que se deben conseguir por poder plantearse un aprendizaje significativo de dichos procedimientos” (DOG n. 2181, pág. 2454).

Sigue con unas consideraciones sobre los contenidos del bachillerato y su relación con los contenidos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria en las que destaca que la principal novedad del currículo de bachillerato es la introducción del análisis infinitesimal y del cálculo vectorial, que se han de tratar de una manera adecuada a la edad y sin olvidar la historia de cada una de las grandes áreas de la matemática. A continuación hace una referencia metodológica en la que insiste en el uso de diferentes lenguajes y en los procesos inductivos:

“En lo concerniente al material de apoyo y a los lenguajes empleados se debe insistir en el uso de todos los recursos al alcance, puesto que la diversificación de lenguajes y apoyos facilita una adaptación a las características diversas de los alumnos. No es preciso recordar que el carácter procedimental, a qué repetidamente se ha hecho referencia, condicionará unas actividades de aprendizaje sobre todo basadas en la acción del alumnado, y que para las actividades de aprendizaje dirigidas básicamente a conceptos y principios se tendrá que tener presente los procesos inductivos y deductivos que facilitaran un tratamiento adecuado de estos contenidos”(DOG. n. 2181, pág. 2455).

Nuestra conclusión de la lectura de las consideraciones de la introducción y de los 11 objetivos generales del DOG, es que estas permiten una lectura del cálculo diferencial menos formalista y más inductiva que la que tradicionalmente se tenía en el Bachillerato anterior. Una visión en la que la traducción entre diferentes formas de representación (lenguajes), los

aspectos históricos y el uso de recursos informáticos, entre otros aspectos, juegan un papel importante.

En relación a los contenidos y objetivos terminales, comenzaremos con los contenidos de hechos, conceptos y sistemas conceptuales. Entre estos contenidos encontramos los contenidos que han estado en el núcleo de nuestra investigación:

“4.4 El estudio local de una función: función continua, función creciente, función decreciente, asíntota horizontal, oblicua y vertical de una función.

4.5 Puntos de corte con los ejes de la gráfica de una función, punto de discontinuidad, extremo absoluto y extremo relativo de una función.

Para interpretar estos contenidos, antes que nada hay que fijarse en todos los contenidos del apartado 4.

“4 Función real

4.1 El estudio global de una función: dominio, recorrido, fórmula, tabla y gráfica de una función real.

4.2 Polinomio con una indeterminada. Grado de un polinomio. Raíz de un polinomio. El Teorema del resto.

4.3 Las funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

4.4 El estudio local de una función: función continua, función creciente, función decreciente, asíntota horizontal, oblicua y vertical de una función.

4.5 Puntos de corte con los ejes de la gráfica de una función, punto de discontinuidad, extremo absoluto y extremo relativo de una función.

4.6 La derivada de una función en un punto. La función derivada.

4.7 La integral de una función en un intervalo. Primitiva de una función. La Regla de Barrow.

4.8 El cálculo infinitesimal y las funciones a lo largo de la historia.” (DOG. n. 2181, pág. 2455).

A continuación, hay que tener en cuenta los contenidos de procedimientos que pueden tener relación con este apartado. Son los siguientes:

3 Reconocimiento, descripción, estudio y representación gráfica de funciones reales.

3.1 Reconocimiento de funciones en situaciones prácticas. Identificación de los elementos que definen una función real, desde una óptica global: dominio, recorrido, fórmula, gráfico y mesa de valores.

3.2 Estudio del signo, continuidad, monotonía de una función en un punto y estudio de su comportamiento al infinito. Cálculo del punto de corte con los ejes de la gráfica de una función.

3.3 Aplicación de la derivada de una función a su estudio local: crecimiento, decrecimiento y extremos absolutos y relativos.

3.4 Cálculo de la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.

3.5 Estudio global y local de las funciones reales, utilizando herramientas informáticas si se tercia.

4 Cálculo con funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

4.1 Operaciones con polinomios. El binomio de Newton. Factorización de polinomios.

4.2 Operaciones con funciones. Comportamiento de las funciones respecto de las operaciones.

4.3 Cálculo de la derivada de una función en un punto. Cálculo de la función derivada de una función.

4.4 Cálculo de la integral de una función en un intervalo. Cálculo de primitivas.

8 Resolución de problemas

8.1 Selección de los conceptos, sistemas conceptuales y procedimientos a emplear en la resolución de problemas de topografía básica (resolución de triángulos), de optimización funcional, de geometría analítica (afín y métrica) y de medida de recintos planos.

8.2 Discusión de la existencia de posibles soluciones.

8.3 Planteamiento del problema y obtención de las posibles soluciones al problema.

8.4 Comprobación, análisis de la validez e interpretación práctica de las soluciones obtenidas a partir de las condiciones iniciales del problema.” (DOG n. 2181, pág. 2456).

Por último, conviene tener en cuenta los contenidos de valores, normas y actitudes y, sobre todo, los objetivos terminales 9- 22:

“9 Entender y aplicar con soltura los conceptos relacionados con las funciones y determinar el correspondiente dominio y recorrido.

10 Componer y descomponer funciones empleando las operaciones básicas, en especial con la composición de funciones. En particular, dominar el uso de la calculadora y utilizar programas de representación gráfica para cálculos con funciones compuestas.

11 Interpretar y reconocer en la práctica el concepto de función continua en un punto. Reconocer y calcular los tipos de discontinuidad más usuales. Calcular asíntotas verticales. Justificar de manera intuitiva y aplicar algún procedimiento de cálculo aproximado de raíces de funciones.

12 Interpretar y reconocer en la práctica el concepto de función creciente y función decreciente en un punto. Calcular el crecimiento o decrecimiento de una función en un punto, los intervalos de crecimiento o decrecimiento, e interpretar y establecer la existencia de extremos absolutos y relativos de una función.

13 Interpretar el concepto de asíntota oblicua y horizontal y calcularlas por las funciones elementales y las funciones compuestas sencillas.

14 Comprender el concepto y calcular la derivada de una función en un punto. Relacionarla con la tangente a la curva en el punto correspondiente y emplearla por al cálculo de rectas tangentes a curvas en puntos determinados.

15 Comprender el concepto y calcular funciones derivadas. Calcular las derivadas sucesivas de una función y relacionar su signo en un punto con el crecimiento, decrecimiento y existencia de extremo relativo de la función en este punto.

16 Generar el gráfico de una función a partir del estudio analítico del dominio, continuidad, raíces, asíntotas, derivabilidad y extremos relativos de la función.

17 Matematizar y resolver situaciones prácticas de optimización, empleando los procedimientos básicos del análisis funcional.

18 Reconocer y aplicar a situaciones prácticas las funciones polinómicas y racionales. Tener soltura con el cálculo con polinomios y fracciones algebraicas elementales y aplicar todos los procedimientos de estudio de las funciones a los modelos polinómicas y racional.

19 Reconocer y aplicar las funciones trigonométricas al estudio de diversos fenómenos científicos o tecnológicos. Tener soltura en el cálculo con funciones trigonométricas directas y aplicar todos los procedimientos de estudio de las funciones a las funciones trigonométricas elementales.

20 Reconocer y aplicar la función exponencial al estudio de fenómenos científicos o tecnológicos, en particular en los procesos de crecimiento compuesto y continuo. Aplicar todos los procedimientos de estudio de las funciones a la función exponencial.

21 Reconocer y aplicar la función logarítmica al estudio de fenómenos científicos o tecnológicos. Interpretar la función logarítmica como la función recíproca de la función exponencial, deducir las propiedades correspondientes, conocer su comportamiento con respecto a las operaciones y aplicar todos los procedimientos de estudio de las funciones a la función logarítmica.

22 Reconocer las situaciones que precisan del cálculo integral por su matematización. Conocer y aplicar con soltura la relación entre la integral de una función y el cálculo de áreas planas, aproximando áreas con la hoja de cálculo si procede.”(DOG. n. 2181, págs. 2456-7).

A partir de la lectura del DOG, podemos hacer la distribución del análisis infinitesimal (cálculo diferencia e integral) del bachillerato en cinco bloques:

- 1 Funciones y familias de funciones.
- 2 Continuidad y límites.
- 3 Derivadas.
- 4 Aplicaciones de las derivadas (optimización y representación gráfica)
- 5 Integrales.

### *Segundo nivel de concreción*

La mayoría de los centros escolares que han participado en esta investigación, han diseñado un Proyecto de Centro en el cual los contenidos de análisis infinitesimal del primer nivel de concreción se han secuenciado de la siguiente forma entre los dos cursos de Bachillerato:

Primero de bachillerato:

- 1 Funciones y familias de funciones.
- 2 Continuidad y límites.
- 3 Introducción a la Derivadas.

Segundo de Bachillerato:

- 3 Derivadas.
- 4 Aplicaciones de las derivadas (optimización y representación gráfica)
- 5 Integrales.

### *El tercer nivel de concreción*

Los libros de texto y el material de aula concretan el llamado tercer nivel de concreción del currículum. Los profesores que han participado, en algunos casos no utilizaban libro de texto, y cuando lo hacían, los libros utilizados (tanto para la modalidad de ciencias y tecnología, como para la modalidad de ciencias sociales) eran los dos más vendidos en la comunidad autónoma de Catalunya, nos referimos a los siguientes libros:

- Besora, J. et al. (1997). *Matemàtiques 2*. Mc graw: Barcelona
- Jané A. et al. (1997). *Matemàtiques Aplicades a les ciències socials 2*. Mc graw: Barcelona

- Bujosa, J.M. et al. (1998). *Matemàtiques 2*. Castellnou: Barcelona
- Bujosa, J.M. et al. (1998). *Matemàtiques Aplicades a les ciències socials 2*. Castellnou: Barcelona.

A modo de ejemplo, en el anexo 1 se hallan algunas páginas del siguiente libro de texto: Bujosa, J.M. et al. (1998). *Matemàtiques Aplicades a les ciències socials 2*. Castellnou: Barcelona, utilizado por el profesor A en la clase que fue grabada y transcrita para esta investigación.

### 1.4.3 Contexto de la investigación. Características de los profesores y de los alumnos.

#### *Características de los profesores*

A continuación describimos algunas de las características de los profesores participantes: institución escolar, régimen horario, número de habitantes de la población, categoría profesional y antigüedad:

| Profesor | Institución         | Población                 | Categoría                          | Licenciatura        | Años de servicio | Régimen horario |
|----------|---------------------|---------------------------|------------------------------------|---------------------|------------------|-----------------|
| A        | IES Baix Penedès    | El Vendrell               | Profesor agregado de secundaria    | Lic. en Matemáticas | 15 años          | Nocturno        |
| B        | IES XXV Olimpiada   | Barcelona                 | Profesor catedrático de secundaria | Lic. en Física      | 30               | Diurno          |
| C        | IES Vilatzara       | Vilatzara                 | Profesor catedrático de secundaria | Lic. en Física      | 25               | Diurno          |
| D        | IES Les Corts       | Barcelona                 | Profesor catedrático de secundaria | Lic. en Matemáticas | 30               | Diurno          |
| E        | IES Margarida Xirgu | L'Hospitalet de Llobregat | Profesor en prácticas del CAP      | Lic. en Matemáticas | Sin experiencia  | Diurno          |
| F        | IES Margarida Xirgu | L'Hospitalet de Llobregat | Profesor no Numerario              | Lic. en Matemáticas | 7                | Diurno          |
| W*       | IES Margarida Xirgu | L'Hospitalet de Llobregat | Profesor catedrático de secundaria | Lic. en Matemáticas | 26               | Diurno          |

Tabla 1. Características profesionales de los profesores que han participado en la investigación

\* El profesor *W* no permitió ser filmado durante sus clases pero, en cambio, su ayuda fue muy importante para poder filmar al profesor *E*, el cual estaba realizando su periodo de prácticas del Curso de Adaptación Pedagógica (CAP) con dicho profesor y también a tres de sus alumnos (que lo eran de ambos)

Tal como se ha dicho en el apartado de metodología, la elección de los profesores que fueron grabados en vídeo no se realizó bajo ningún criterio estadístico, simplemente se tuvo en cuenta su disponibilidad a colaborar y a ser grabados. Se procuró también, dentro de lo posible, que sus características fuesen diferentes, es decir, (1) que impartiesen las clases en diferentes tipos de poblaciones, las cuales van desde una gran ciudad como Barcelona a un pueblo muy pequeño como Vilatzara, (2) diferente antigüedad, ésta varía desde el profesor *F* que no tiene ninguna experiencia, hasta los 30 años de antigüedad de los profesores *B* y *D*, (3) diferente dedicación horaria, hay un profesor cuyas clases se impartían en régimen horario de nocturno, (4) Diferente categoría laboral: catedráticos, agregados, no numerarios y en fase de prácticas y (5) diferente titulación, si bien la mayoría son licenciados en matemáticas, hay dos profesores que lo son en física.

#### *Características de los alumnos*

Los alumnos que aceptaron ser grabados fueron los siguientes:

| <b>Alumno</b> | <b>Institución</b>  | <b>Profesor</b> |
|---------------|---------------------|-----------------|
| <i>G</i>      | IES Les Cors        | <i>D</i>        |
| <i>H</i>      | IES Les Cors        | <i>D</i>        |
| <i>I</i>      | IES Margarida Xirgu | <i>W y E</i>    |
| <i>J</i>      | IES Margarida Xirgu | <i>W y E</i>    |
| <i>K</i>      | IES Margarida Xirgu | <i>W y E</i>    |

Tabla 2. Características de los alumnos que han participado en la investigación

Los alumnos *G* y *H* eran alumnos del IES Les Corts, un instituto de secundaria situado en la zona de Les Corts de Barcelona, una ciudad de 4.000.000 habitantes. En el momento de la entrevista dichos alumnos cursaban segundo curso de bachillerato en la modalidad de ciencias



sociales (*G*) y en la modalidad de ciencias y tecnología (*H*) y eran alumnos del profesor *D*.

Los alumnos *I*, *J* y *K* eran alumnos del IES Margarida Xirgu. Un instituto de secundaria situado en la zona de Hospitalet de Llobregat, una ciudad de 300.000 habitantes la periferia de Barcelona. En el momento de la entrevista dichos alumnos cursaban segundo curso de bachillerato en la modalidad de ciencias sociales y eran alumnos del profesor *W* y también del profesor *E*.

Además de estos alumnos, que fueron grabados en video, se consultó el cuaderno de clase y los exámenes de los alumnos de todos los profesores. También se diseñó un cuestionario específico para los alumnos del profesor *C*.

## **1.5 ESTRUCTURA DE LA MEMORIA DE INVESTIGACIÓN**

Esta memoria de investigación sigue la siguiente estructura. En el Capítulo 1, se justifica la relevancia del problema de investigación (apartado 1). En el apartado 2 se presentan los objetivos y las preguntas de la investigación. En el apartado 3 se comenta la metodología usada, en el apartado 4 se explica el contexto de la investigación, así como las características de los sujetos investigados y, por último, en el apartado 5 se comenta la estructura de la memoria de la investigación.

En el capítulo 2 se comienza con una breve revisión de la investigación didáctica sobre el discurso escolar en matemáticas. A continuación se hace un resumen del primer marco teórico utilizado en esta investigación: la teoría sobre “qué son las matemáticas”, propuesta por Lakoff y Núñez (2000). Este capítulo también tiene como objetivo presentar el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. Dicho enfoque también se ha tomado como uno de los principales referentes teóricos de la investigación que se presenta.

En el capítulo 3 se responde a la primera pregunta de investigación: ¿Cuáles son las diferentes metáforas que se han utilizado históricamente para organizar el conocimiento sobre las gráficas de las funciones? En el primer apartado se expone, de manera muy sintética, la evolución histórica del objeto función. En el segundo apartado se analizan con detalle las cuatro metáforas que, según Font (2000a) han estructurado el conocimiento de las gráficas de las funciones. Con relación a la metáfora conjuntista se explica, a partir de las funciones semióticas y de las fusiones conceptuales, el tipo de comprensión que permite esta metáfora. A su vez, las metáforas que consideran “ la gráfica de una función como la traza que deja un punto

que se mueve sujeto a determinadas condiciones”, o bien como “ la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica (entendida como un camino)”, se explican a partir de la metáfora del camino. Para finalizar, se argumenta que la comprensión de las gráficas de funciones es el resultado de la fusión de la visión dinámica con la estática.

En el capítulo 4, a partir del análisis de los datos responderemos a las preguntas de investigación 2- 5. Para ello, se utilizan fragmentos de las entrevistas y de las clases impartidas por los profesores que han participado en la investigación, producciones de alumnos y fragmentos de las entrevistas a algunos de los alumnos entrevistados. En el primer apartado se responde la segunda pregunta de investigación: ¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el bachillerato? Como unidad primaria de análisis didáctico se propone un constructo del EOS: la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos. Dentro de cada configuración didáctica se enfoca el análisis a los fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor y en el de los alumnos.

En el segundo apartado, se responde a la tercera pregunta de investigación ¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas? Para ello, se analizan (1) las grabaciones realizadas a los profesores mientras explicaban la representación gráfica de funciones y (2) las transcripciones de las entrevistas semiestructuradas que se les realizó posteriormente.

En el tercer apartado, se responde a la cuarta pregunta de investigación ¿Qué efecto producen en la comprensión del alumno las metáforas utilizadas por el profesor en su discurso? Para ello, primero se estudia, mediante las respuestas a un cuestionario específicamente diseñado para el caso, los efectos que produce el discurso metafórico de un determinado profesor en la comprensión de sus alumnos. El siguiente paso es investigar qué pasa cuando las producciones escritas estudiadas son las habituales de clase (como por ejemplo los exámenes). A continuación, se estudia el grupo de alumnos que no manifiestan metáforas en sus respuestas escritas, los cuales son entrevistados para estudiar si el uso de metáforas se manifiesta en su discurso oral.

En el cuarto apartado, se responde a la quinta pregunta de investigación ¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados? Para ello se analizan tres episodios en los que la metáfora juega un papel completamente diferente. En los dos primeros episodios se analiza como el uso de metáforas juega un papel fundamental para llegar a una negociación

del significado que el profesor considera apropiada para conseguir la comprensión de sus alumnos. En cambio, en el tercer episodio se analiza el papel que juega la metáfora en la negociación de significados entre alumnos.

En el capítulo 5 se aborda una reflexión teórica compleja cuyo objetivo es, por una parte, situar la metáfora con relación a las cinco facetas duales contempladas en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática y con las configuraciones epistémicos/cognitivas. En este capítulo respondemos a las preguntas de investigación 6 y 7.

Por último, en el capítulo 6, exponemos las conclusiones relacionadas con las respuestas a las preguntas de investigación y también sugerimos algunas líneas de desarrollo de futuras investigaciones.

La memoria de investigación termina con un capítulo es el que se recogen las referencias utilizadas y con 7 anexos en los que se incluyen parte del material de campo utilizado para confeccionar esta memoria de investigación.