

UNIVERSITAT  
JAUME·I

Departament de Matemàtiques

# Teorías de primer y segundo orden sobre el potencial de ciertas figuras de equilibrio de cuerpos celestes

Autor: Manuel Forner Gumbau

Director: Dr. José A. López Ortí

TESIS DOCTORAL

Castellón, Septiembre de 2010



Don José Antonio López Ortí, profesor titular de universidad de matemática aplicada del departamento de matemáticas de la Universidad Jaume I de Castellón,

CERTIFICA que:

Don Manuel Forner Gumbau, licenciado en ciencias matemáticas, ha realizado bajo mi dirección el trabajo que se recoge en esta memoria para optar al grado de doctor.

Así mismo, autorizo la presentación del trabajo ante la Universidad Jaume I de Castellón para que cumpla los trámites correspondientes.

Y para que así conste a los efectos legales, presento dicha tesis, firmando este certificado en Castellón a dieciseis de septiembre de dos mil diez.

Prof. Dr. José Antonio López Ortí



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Figuras de equilibrio de una masa fluida en rotación</b>	<b>17</b>
2.1. Introducción . . . . .	17
2.1.1. Problema fundamental . . . . .	18
2.1.2. Observaciones sobre suposiciones básicas . . . . .	21
2.1.3. Distribución de la densidad . . . . .	24
2.2. Figuras de equilibrio. Método inverso . . . . .	26
2.2.1. Ecuación fundamental . . . . .	26
2.2.2. Los elipsoides de <i>MacLaurin</i> y <i>Jacobi</i> . . . . .	27
2.2.3. Figuras no homogéneas . . . . .	34
2.2.4. Ecuación de <i>Clairaut</i> . . . . .	37
2.2.5. El elipsoide de <i>Dirichlet</i> . . . . .	39
2.3. Método de <i>Poincaré</i> . . . . .	41
2.3.1. Funciones fundamentales . . . . .	41
2.3.2. Figuras de equilibrio que difieren poco de los elipsoides	47
2.3.3. Estabilidad de las figuras de equilibrio . . . . .	54
2.4. Método de <i>Liapounov</i> . . . . .	55
2.4.1. Potencial de un cuerpo en el que la estratificación di-	
fiere poco de un elipsoide . . . . .	55
2.4.2. Ecuación integral de <i>Liapounov</i> . . . . .	61
2.4.3. Transformación de la ecuación fundamental . . . . .	64
2.5. Método de <i>Kopal</i> . . . . .	73
2.5.1. Superficies equipotenciales . . . . .	73
2.5.2. Perturbación debida a la rotación . . . . .	79
<b>3. Desarrollos en serie de los productos de algunas funciones   especiales</b>	<b>91</b>
3.1. Introducción . . . . .	91
3.1.1. Coordenadas esféricas . . . . .	94
3.1.2. Derivada de orden $n + m$ de un producto . . . . .	95

---

3.1.3.	Polinomios de <i>Legendre</i> . . . . .	97
3.1.4.	Sistemas de funciones ortogonales . . . . .	98
3.1.5.	Funciones asociadas de <i>Legendre</i> . . . . .	99
3.1.6.	Armónicos esféricos . . . . .	100
3.2.	Desarrollos en serie del producto de polinomios de <i>Legendre</i> como combinación lineal de polinomios de <i>Legendre</i> . . . . .	101
3.2.1.	Desarrollo en serie de potencias de los polinomios de <i>Legendre</i> . . . . .	101
3.2.2.	Desarrollo en serie de potencias del producto de dos polinomios de <i>Legendre</i> . . . . .	102
3.2.3.	Cálculo de las integrales $\int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt$ . . . . .	103
3.2.4.	Integral del producto de tres polinomios de <i>Legendre</i> .	104
3.2.5.	Desarrollo del producto de dos polinomios de <i>Legendre</i> como combinación lineal de polinomios de <i>Legendre</i> . .	105
3.3.	Desarrollos en serie del producto de funciones asociadas de <i>Legendre</i> como combinación lineal de funciones asociadas de <i>Legendre</i> . . . . .	105
3.3.1.	Desarrollo en serie de potencias de las funciones aso- ciadas de <i>Legendre</i> . . . . .	105
3.3.2.	Desarrollo en serie de potencias del producto de tres funciones asociadas de <i>Legendre</i> . . . . .	106
3.3.3.	Integral del producto de tres funciones asociadas de <i>Legendre</i> . . . . .	109
3.3.4.	Desarrollo del producto de dos funciones asociadas de <i>Legendre</i> como combinación lineal de funciones asocia- das de <i>Legendre</i> . . . . .	111
3.4.	Desarrollos en serie del producto de armónicos esféricos como combinación lineal de armónicos esféricos . . . . .	122
3.4.1.	Forma real . . . . .	122
3.4.2.	Forma compleja . . . . .	131
<b>4.</b>	<b>Configuraciones de equilibrio de los cuerpos celestes</b>	<b>135</b>
4.1.	Introducción . . . . .	135
4.2.	Desarrollo del potencial autogravitatorio en coordenadas de <i>Clairaut</i> . . . . .	136
4.3.	Teorías de primer y segundo orden sobre las figuras de equi- librio de los cuerpos celestes . . . . .	141
4.3.1.	Teoría de primer orden . . . . .	141
4.3.2.	Teoría de segundo orden . . . . .	149

---

<b>5. Sistemas binarios próximos</b>	<b>179</b>
5.1. Introducción . . . . .	179
5.2. Desarrollo del potencial en coordenadas de <i>Clairaut</i> . . . . .	185
5.3. Desarrollo del potencial autogravitatorio . . . . .	186
5.3.1. Introducción . . . . .	186
5.3.2. Método clásico . . . . .	187
5.3.3. Método analítico en primer orden . . . . .	190
5.4. Desarrollo del potencial centrífugo . . . . .	200
5.5. Desarrollo del potencial de marea . . . . .	203
5.6. Desarrollo del potencial total . . . . .	211
5.6.1. Desarrollos de los potenciales en primer orden . . . . .	212
5.6.2. Desarrollos de los potenciales en segundo orden . . . . .	217
<b>6. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>231</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	231
6.2. Perspectivas . . . . .	235
<b>. Bibliografía</b>	<b>237</b>





# Agradecimientos

El presente trabajo no hubiese sido posible realizarlo sin la inestimable colaboración y el apoyo de diversas personas a las que quiero manifestar mi más sentido agradecimiento.

En primer lugar, agradecer a mi director de tesis, el profesor Dr. D. *José Antonio López Ortí*, sus aportaciones, sus comentarios, sus críticas y sus desvelos para que este trabajo pudiera salir a la luz.

En segundo lugar, dar las gracias a los profesores Dr. D. *Miguel Sevilla* y Dr. D. *Álvaro López* por la revisión y crítica del trabajo. Así como, por sus observaciones, sus comentarios y sus indicaciones para la mejora de la presentación del mismo.

En tercer lugar, reconocer a los miembros del *Departament de Matemàtiques* de la *Universitat Jaume I* su labor de revisión y crítica a este trabajo.

En cuarto lugar, agradecer a mis padres, *Manuel* y *Josefina*; a mis hermanos y esposas, *Josep*, *Lola*, *Òscar* y *Mónica*; a mis sobrinos y sobrinas, *Josep*, *Jaume*, *Laura*, *Salva* y *Aitana*; a mis hijos, *Priscila* y *Òscar*, junto con sus respectivas parejas, *Adrián* y *Maite*; y a mi compañera *Xelo* toda su comprensión y apoyo en esta aventura.



# Capítulo 1

## Introducción

Uno de los problemas que aborda la Mecánica Celeste es la determinación de las figuras de equilibrio de los cuerpos celestes. Para investigar su solución mediante métodos directos, se precisa evaluar el potencial generado por su autogravitación, el generado por su fuerza centrífuga y el generado por la fuerza de atracción entre los cuerpos.

Los métodos clásicos que afrontan estos problemas, para determinar el potencial autogravitatorio en las configuraciones de equilibrio, emplean desarrollos en serie de los potenciales interior y exterior del potencial autogravitatorio. Estos métodos incurren en el error de suponer la convergencia en capas donde resulta cuestionable dicha convergencia para estos desarrollos en serie. Además, estos métodos, para la determinación del potencial de marea no incluyen las amplitudes de la componente secundaria del sistema.

Por otra parte, para la manipulación de estos desarrollos en serie se requiere que se expresen, tanto el producto de polinomios de *Legendre* como el producto de armónicos esféricos, como combinación lineal de polinomios de *Legendre* y como combinación lineal de armónicos esféricos, respectivamente. Los métodos existentes para obtener la transformación del producto de armónicos esféricos como combinación lineal de armónicos esféricos son laboriosos, complicados de implementar y no engloban toda la casuística.

A raíz de todo lo expuesto, los objetivos de esta memoria son los de abordar:

- La elaboración, el manejo y la implementación, en el programa *Matematica*, de algoritmos eficientes que engloben toda la casuística y que

posibiliten una eficaz manipulación en la conversión del producto de armónicos esféricos como combinación lineal de armónicos esféricos.

- El estudio analítico del potencial autogravitatorio de las configuraciones de equilibrio de los cuerpos celestes (figuras aisladas) mediante desarrollos en serie, manejando para ello métodos de primer y segundo orden en las amplitudes.

En este estudio se pretende conseguir desarrollos de los potenciales interior y exterior del potencial autogravitatorio que, hasta los órdenes prefijados, sean convergentes en cualquier capa.

- El estudio analítico del potencial autogravitatorio de los sistemas binarios próximos mediante desarrollos en serie, manejando para ello métodos de primer orden en las amplitudes.

En este estudio se pretende conseguir desarrollos de los potenciales interior y exterior del potencial autogravitatorio que, hasta el orden prefijado, sean convergentes en cualquier capa.

- La exposición de un método analítico para la determinación del potencial de marea en un sistema binario próximo mediante desarrollos en serie, manejando para ello métodos de primer orden en las amplitudes, en el cual se manifieste la forma de la componente secundaria del sistema. Puntualizando de que es en el desarrollo de segundo orden donde se manifiesta la forma de la componente secundaria.

Con todo ello se pretende concluir que:

- Se han elaborado unos algoritmos e implementado en el programa *Mathematica* unos códigos que contemplan toda la casuística y que permiten una manipulación eficiente del producto de polinomios de *Legendre*, del producto de funciones asociadas de *Legendre* y del producto de armónicos esféricos como combinación lineal de ellos mismos.
- Se han obtenido, para primer y segundo orden en las amplitudes, los desarrollos correctos para los potenciales interior y exterior del potencial autogravitatorio para configuraciones de equilibrio aisladas. Constatando que, a pesar de las discrepancias existentes entre los desarrollos clásicos y los obtenidos en este trabajo para los potenciales anteriormente mencionados, el desarrollo del potencial autogravitatorio total obtenido por ambos métodos es coincidente.

- Además de emplear un método similar al utilizado por los métodos clásicos para obtener los desarrollos del punto anterior, se ha confeccionado un método analítico alternativo que ha corroborado los desarrollos citados en el punto anterior.
- El método analítico nombrado en el punto anterior se ha utilizado también para obtener, en primer orden de amplitudes, los desarrollos correctos de los potenciales interior y exterior del potencial autogravitatorio en sistemas binarios próximos. Constatando, aquí también, que a pesar de las discrepancias existentes entre los desarrollos clásicos y los obtenidos en este trabajo para los potenciales anteriormente mencionados, el desarrollo del potencial autogravitatorio total obtenido por ambos métodos es coincidente.
- Se han confeccionado dos métodos, uno analítico y otro iterativo basado en el algoritmo de *Kovalevsky*, para la determinación del inverso de la distancia en la obtención del desarrollo del potencial de marea entre las dos componentes de un sistema binario próximo.
- Se ha elaborado un método analítico, en primer orden respecto a las amplitudes, para la determinación del potencial de marea en sistemas binarios próximos en el cual se manifiesta la forma de la componente secundaria del sistema.

En forma esquemática, el contenido de esta memoria puede resumirse en los puntos siguientes:

- En el capítulo primero (Figuras de equilibrio de una masa fluida en rotación) se consideran modelos basados en una masa fluida en rotación y se estudian detalladamente los diversos métodos usados para abordar la solución al problema de la determinación de la figura de los cuerpos celestes:
  - *MacLaurin* demostró (1742) que el elipsoide de revolución (elipsoide de *MacLaurin*) podía ser una figura de equilibrio de una masa fluida homogénea en rotación.
  - *Clairaut*, en su obra *Figure de la Terre* (1743), extiende el estudio al caso de una masa formada por capas homogéneas concéntricas.
  - *Laplace* (1776) y *Legendre* (1789) perfeccionan la teoría de *Clairaut* introduciendo nuevos métodos de cálculo. *Laplace* encuentra además una nueva figura de equilibrio: un núcleo central rodeado por un anillo (caso de Saturno).

- En 1834, *Jacobi* demuestra que pueden existir formas de equilibrio que no sean de revolución: el elipsoide de tres ejes (elipsoide de *Jacobi*) pasa a enriquecer la gama de las figuras posibles.
  - *Liouville* (1834), hizo un estudio general del problema, y la discusión completa de las distintas formas y su variación con la velocidad de rotación.
  - Más tarde, *Poincaré* (1885) demuestra que no son éstas las únicas figuras de equilibrio posibles. Antes de llegar a la ruptura que, al aumentar la velocidad de rotación habían predicho *Thomson* y *Tait* (1883), existen las llamadas figuras piriformes; las cuales, al continuar el crecimiento de la velocidad, llegan a romperse por una estrangulación.
  - *Liapounov* (1930), *Kholshevnikov* (2002, 2003 y 2004), *Elkin* (2002) y *Kurdubov* (2004) han insistido en el estudio de estas figuras y en el de las condiciones de equilibrio.
  - *Kopal* (1974, 1978 y 1983), estudia los sistemas binarios próximos mediante los desarrollos del potencial en coordenadas de *Clairaut* y mediante el modelo de *Roche*.
- En el capítulo segundo (Desarrollos en serie de los productos de algunas funciones especiales) se elaboran unos algoritmos que permiten obtener el producto de dos cualesquiera polinomios de *Legendre*, el producto de dos cualesquiera funciones asociadas de *Legendre* o el producto de dos cualesquiera armónicos esféricos (forma real y forma compleja) como combinación lineal de polinomios de *Legendre*, de funciones asociadas de *Legendre* o de armónicos esféricos, respectivamente.

Para la implementación de dichos algoritmos se ha utilizado el programa *Mathematica* con lo que se han obtenido unos códigos eficientes que consiguen coeficientes exactos en la determinación de las combinaciones lineales.

Con todo ello se favorece la manipulación de los desarrollos en serie que se manejan en los capítulos posteriores.

- En el capítulo tercero (Configuraciones de equilibrio de los cuerpos celestes) se presentan los principales resultados de este trabajo, pues en el se obtienen, para primer y segundo orden respecto de las amplitudes, los desarrollos del potencial interior y del potencial exterior correspondientes al potencial autogravitatorio para las superficies equipotenciales

de una masa deformable aislada con rotación uniforme.

En la obtención de estos desarrollos se hace imprescindible el uso de los algoritmos elaborados e implementados con la ayuda del programa *Mathematica* que se describen en el capítulo segundo.

Con ello se demuestra que los métodos clásicos incurren en el error de aceptar la convergencia de estos desarrollos en capas donde resulta cuestionable esa convergencia. Además, también se demuestra que, aunque los desarrollos del potencial interior y del potencial exterior obtenidos en el presente trabajo no coincidan con los de los desarrollos clásicos, el desarrollo del potencial autogravitatorio de este estudio coincide con el del desarrollo clásico.

Para ello, partiendo del desarrollo del potencial autogravitatorio en coordenadas de *Clairaut*, se estudian las capas donde no convergen las series que determinan el inverso de la distancia entre dos elementos de masa de la componente. A continuación, se obtienen dos métodos, uno mediante cuadratura numérica y otro de forma analítica, tanto para primer orden como para segundo orden respecto de las amplitudes, mediante los que se van a obtener los resultados descritos anteriormente.

- En el capítulo cuarto (Sistemas binarios próximos) se extiende el método analítico nombrado en el capítulo anterior para obtener, en primer orden respecto de las amplitudes, los desarrollos del potencial interior y del potencial exterior correspondientes al potencial autogravitatorio para las superficies equipotenciales de un sistema binario próximo.

En la obtención de estos desarrollos se hace imprescindible el uso de los algoritmos elaborados e implementados con la ayuda del programa *Mathematica* que se describen en el capítulo segundo.

Con ello se demuestra que los métodos clásicos incurren en el error de aceptar la convergencia de estos desarrollos en capas donde resulta cuestionable esa convergencia. Además, también se demuestra que, aunque los desarrollos del potencial interior y del potencial exterior obtenidos en el presente trabajo no coincidan con los de los desarrollos clásicos, el desarrollo del potencial autogravitatorio de este estudio coincide con el del desarrollo clásico.

Por otra parte, una vez alcanzada la circularización de sus órbitas y

la sincronización de su rotación, para obtener el desarrollo del potencial de marea en un sistema binario próximo es necesario el cálculo del inverso de la distancia entre las dos componentes del sistema. En este trabajo el inverso de la distancia se ha obtenido por dos métodos: uno analítico y el otro basado en el algoritmo iterativo de *Kovalevsky*.

También se ha desarrollado un método para la determinación del potencial de marea en un sistema binario próximo en el cual se manifiesta la forma de la componente secundaria del sistema. Aunque hay que precisar que la forma de la componente secundaria del sistema se manifiesta en el desarrollo en segundo orden respecto de las amplitudes, ya que, en primer orden respecto de las amplitudes sólo aparecen términos de la componente primaria del sistema.

- En el capítulo quinto (Conclusiones y perspectivas) se exponen las conclusiones más importantes alcanzadas en el presente trabajo y las perspectivas que se derivan de esas conclusiones.
- En la Bibliografía que se presenta al final se ha incluido, además de las obras citadas en el texto, otras cuya consulta puede ser de gran utilidad.



# Capítulo 2

## Figuras de equilibrio de una masa fluida en rotación

### 2.1. Introducción

Uno de los principales retos a los que se enfrenta la Mecánica Celeste es la determinación de la figura de los cuerpos celestes.

Evidentemente, uno de los primeros cuerpos celestes a los que se ha intentado determinar su figura es la Tierra:

- suponiendo que la Tierra es esférica, *Eratóstenes* (250 a.C.), calculó la longitud del radio.
- esta idea sobre la forma de la Tierra se modificó por *Huygens* y, a partir del enunciado de la ley de la gravitación universal, por *Newton* en 1687. Una de las conclusiones a que llegó *Newton* sobre la forma de nuestro planeta era que la Tierra es un elipsoide de revolución achatado en el sentido del eje de rotación, cuyo eje ecuatorial debía exceder al eje polar en  $\frac{1}{230}$  de su valor.

Como se acaba de indicar, una de las conclusiones teóricas de la Gravitación Universal enunciada por *Newton* fue que la Tierra era un elipsoide de revolución achatado en el sentido de su eje de rotación. Este problema ha sido estudiado posteriormente por diversos matemáticos con un carácter más general, que tiene aplicación no sólo al estudio de la figura de la Tierra, sino igualmente a los astros de nuestro sistema solar, y en general de cualquier cuerpo celeste. Este estudio constituye lo que se ha llamado “teoría de las

figuras de equilibrio”, que podría definirse como la teoría que trata de determinar la figura de equilibrio de una masa fluida incompresible, en rotación y sometida a las acciones creadas por la gravitación universal.

Sobre los intentos de solución del problema de determinar la figura de los cuerpos celestes existen numerosos y valiosos estudios. Entre estos estudios cabe destacar los de los siguientes autores: *MacLaurin*, *Jacobi*, *Clairaut*, *Dirichlet*, *Poincaré*, *Liapounov* y *Kopal*. En este capítulo se expone un resumen de estas investigaciones.

Las investigaciones, llevadas a cabo por los citados autores, se han realizado sobre todo para el caso de una masa fluida aislada en rotación uniforme. Aunque existen estudios en los que se toman en consideración las variaciones en las figuras y la estratificación de los cuerpos celestes que resultan de movimientos internos.

En este trabajo se abordará el caso en el que los cuerpos celestes puedan ser modelados como una masa fluida sujeta a su propio potencial de atracción y, en su caso, sometida a perturbaciones debidas a la rotación. Además, como el caso de rotación rígida corresponde a un mínimo del potencial, esto implica una configuración de equilibrio estable. Por lo que, en este estudio, sólo se considerará esta situación.

### **2.1.1. Problema fundamental**

El problema fundamental a considerar en este estudio es el de determinar la figura de una masa fluida en rotación rígida. Esta situación lleva implícito el equilibrio hidrostático.

Sea una masa fluida rotando en el espacio como un cuerpo rígido. Suponemos que está aislada de otros cuerpos y que sus partículas están sujetas a atracciones mútuas de acuerdo con la ley de gravitación de *Newton*.

La solución general del problema anterior requiere del conocimiento de la ecuación de estado del fluido. No obstante, se pueden hacer una serie de consideraciones preliminares importantes independientes de la forma particular que tome la ecuación de estado.

Estas consideraciones preliminares son las siguientes:

Las componentes de la aceleración normal a  $M$  vienen determinadas por el vector  $(-\omega^2 x, -\omega^2 y, 0)$ . Sea  $\Omega$  el potencial autogravitatorio,  $G$  la constante de gravitación universal,  $\rho$  la densidad y  $P$  la presión del fluido.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, podemos escribir las ecuaciones del movimiento de la masa de un fluido en forma vectorial [50], [51], [60]

$$\frac{d^2 r_{\perp}^{\vec{}}}{dt^2} = \nabla \Omega - \frac{1}{\rho} \nabla P \quad (2.1)$$

o en forma escalar

$$\begin{aligned} -\omega^2 x &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ -\omega^2 y &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para el estudio de esta ecuación de estado se han utilizado modelos con politropos (Por ejemplo: [18] y [31]) o modelos más complejos que involucran la generación y transporte de la energía (según mecanismos convectivos y radiativos), estado termodinámico, ... (Por ejemplo: [53], [54] y [48]).

Si consideramos que  $\vec{\omega}$  es constante, de (2.2)

$$\frac{d\Omega}{ds} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{ds} \quad (2.3)$$

con  $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$

Si  $\rho = \text{constante}$  o  $\rho = f(P)$ , podemos expresar la ecuación anterior en su forma integral

$$\Omega + \frac{\omega^2 r_{\perp}^2}{2} = \int \frac{1}{\rho} \frac{dP}{ds} \quad (2.4)$$

donde  $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$  es la distancia de una partícula al eje de rotación.

Para el potencial newtoniano en un punto, tenemos

$$\Omega = G \int_V \frac{\rho' dV'}{\Delta} \quad (2.5)$$

donde  $\Delta$  es la distancia de la partícula a  $M$  desde un elemento  $dV'$ .

Si consideramos una masa fluida aislada en el espacio, la presión en la frontera de su superficie desaparece:

$$P = 0 \quad (2.6)$$

De este modo, la superficie que limita la figura pertenece al grupo de las isobáricas. La condición general para este grupo se obtiene inmediatamente haciendo  $P = constante$  en (2.4)

$$\int_V \frac{\rho' dV'}{\Delta} + \frac{\omega^2 r_{\perp}^2}{2G} = Cte \quad (2.7)$$

En el caso  $\rho = f(P)$ , las superficies  $P = Cte$  (baritropos) coinciden con las superficies isopícnicas.

En general, el volumen  $V$  de la masa fluida en la ecuación (2.7) es desconocido y la forma de esta masa se ha de escoger de manera que se satisfaga esta ecuación. Así, el problema que hemos escrito en la forma más sencilla, nos lleva a la solución de una ecuación funcional (2.7), en la que los límites de integración del primer término son desconocidos.

Se obtiene un caso particular del problema si consideramos figuras de equilibrio de una masa fluida en reposo. Entonces estas figuras se tienen que determinar por las soluciones de la ecuación

$$\int_V \frac{\rho' dV'}{\Delta} = Cte \quad (2.8)$$

Se debe tener en cuenta que, para obtener la integral (2.4) se ha considerado que los fluidos tienen la propiedad que:

- o bien  $\rho = Cte$ , por ejemplo, fluidos homogéneos e incompresibles,
- o bien  $\rho = f(P)$ , por ejemplo, fluidos compresibles que son homogéneos por composición pero pueden tener una densidad variable con la presión.

Es evidente, no obstante, que las ecuaciones (2.2) no cumplen estas restricciones. Se puede investigar también las figuras de equilibrio de una masa fluida que está compuesta por un número finito, o incluso infinito, de fluidos incompresibles que tienen densidades diferentes o figuras de una masa compresible y no homogénea (figuras toroidales, ...) [48]. Sin embargo, las figuras que se van a considerar en este estudio son las simplemente conexas.

### 2.1.2. Observaciones sobre suposiciones básicas

Para resolver un problema en la teoría de figuras de equilibrio o, en general, para determinar las figuras de una masa fluida en rotación, se hacen algunas suposiciones básicas respecto a las propiedades físicas del fluido, el carácter del movimiento, la distribución de la masa y otros. A continuación, se discuten algunas de estas suposiciones.

Para el movimiento de un fluido la condición de continuidad se puede escribir en cualquiera de las formas siguientes:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \vec{v} = 0 \quad (2.9)$$

o teniendo en cuenta  $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho$  (derivada lagrangiana respecto del tiempo)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho + \rho \nabla \vec{v} = 0 \quad (2.10)$$

En el caso de un movimiento estacionario, se tiene que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , es decir, la densidad  $\rho$  no depende explícitamente del tiempo. Si la densidad,  $\rho$ , de una partícula no varía a lo largo de su recorrido, se tendrá que  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ .

De (2.9) y (2.10) se obtiene  $\nabla \vec{v} = 0$  y

$$\vec{v} \nabla \rho = 0 \quad (2.11)$$

Como el vector gradiente es normal a la superficie de igual densidad  $\rho = Cte$ , la velocidad  $\vec{v}$  tiene que estar en el plano tangente que pasa a través de la partícula dada o punto en el fluido.

Si el movimiento de una masa fluida tiene las características que se acaban de mencionar, la ecuación de continuidad tiene la forma

$$\nabla \vec{v} = 0 \quad (2.12)$$

tanto para un fluido incompresible como para uno compresible. Es fácil ver que, si la velocidad  $\vec{v}$  viene dada por la expresión  $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge r_{\perp}$ , la ecuación (2.12) se satisfará tanto para  $\vec{\omega} = Cte$  como para  $\vec{\omega} = F(x^2 + y^2, z)$ . Es decir,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge r_{\perp} = (\omega \vec{k}) \wedge (x \vec{i} + y \vec{j}) = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$$

$$\nabla \vec{v} = -\frac{\partial(\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} = 0$$

en los dos casos. Así, la suposición de una figura de rotación en equilibrio es compatible con la condición (2.12).

La segunda suposición respecto del carácter del movimiento tiene relación con el eje de rotación. *Appell* [5] probó que una condición necesaria para la existencia de una figura de equilibrio de una masa fluida es que la rotación tenga lugar respecto de un eje que tenga una dirección invariable en el espacio y que ésta coincida con uno de los ejes principales de inercia de la masa. *Jardetzky* [40] demostró que esta condición se mantiene también en tipos de rotaciones más generales como, por ejemplo, sistemas con rotación zonal y también para sistemas mixtos, como los cuerpos formados por partes sólidas y fluidas.

Respecto a la simetría de las figuras de equilibrio no es necesario suponer que poseen simetría axial respecto del eje de rotación, ya que, existen elipsoides triaxiales como figuras de equilibrio.

Por otra parte, *Lichtenstein* [59] probó que una figura de equilibrio debe tener un plano de simetría perpendicular al eje de rotación.

Respecto a las suposiciones que se asumen sobre las propiedades físicas del fluido, comentar que normalmente se supone una ecuación de estado  $\rho = \rho(P)$ . Aunque, como en el caso de las estrellas, se pueden introducir modelos más complejos [29].

En el caso más simple, una masa fluida se considera incompresible y homogénea en el sentido de que la densidad tiene los mismos valores en cualquier punto y que esos valores no varían aunque varíe la presión. Así, la ecuación (2.7) toma la forma

$$\int_V \frac{dV'}{\Delta} + \frac{\omega^2 r_{\perp}^2}{2G\rho} = Cte \quad (2.13)$$

El primer miembro de esta ecuación es una función desconocida de coordenadas determinadas por la forma de la superficie que limita la figura ( $S$ ) de volumen  $V$ . Si el valor de la constante del segundo miembro corresponde con  $P = 0$ , el problema de determinar las figuras de equilibrio consiste en encontrar dentro de la familia de superficies de equilibrio dadas por (2.13) aquella correspondiente a  $P = 0$ .

El segundo problema en la teoría de figuras de equilibrio tiene que ver con el caso en el que la densidad dependa sólo de la presión  $\rho = f(P)$  (baritropos). En Hidrodinámica clásica estos fluidos se conocen, habitualmente, como no homogéneos. Para resolver el problema en este caso, se tiene que hacer uso, bien de la ecuación (2.7) o mejor de la (2.4), ya que la última ecuación determina las superficies equipotenciales. Teniendo en cuenta esta suposición respecto de las propiedades físicas del fluido, las superficies  $P = Cte$ ,  $\rho = Cte$  y las superficies de nivel (superficies de igual potencial gravitatorio en el caso de la Tierra) coincidirán si se satisface (2.4). En esta ecuación, la densidad  $\rho$  es la variable que determinará la estratificación. La capa exterior del fluido corresponde a  $\rho = f(0)$ .

En cuanto a la ecuación de estado  $\rho = f(P)$ , puede que determine una función continua o puede considerarse un sistema formado por un número finito de fluidos, que difieren en sus propiedades físicas, superpuestos unos a otros. Para cada capa, entonces, se tendrá en cuenta una ecuación de estado particular. También se puede considerar para un fluido que no se haga ninguna suposición como  $\rho = Cte$  o  $\rho = f(P)$ . Entonces se postula una estratificación continua con una densidad expresada en términos de coordenadas. Para esos fluidos las condiciones (2.3) y (2.4) no se mantienen siempre y, por lo tanto, la discusión debe comenzar con las ecuaciones (2.2).

En los problemas referentes a las figuras de equilibrio mencionados anteriormente, la estratificación de un fluido no homogéneo no es conocida con antelación por lo que se debe determinar a posteriori. Para obtener dicha figura también puede procederse a la utilización de métodos inversos. Es decir, se parte de la suposición de una cierta forma de su superficie exterior y de su estratificación para luego verificar que las suposiciones hechas satisfacen las condiciones necesarias.

*Volterra* [92] probó que, en caso de equilibrio, las capas de la misma densidad no pueden tener todas ellas la forma de una superficie de segundo grado. Además generalizó esta prueba para una rotación zonal. Sin embargo, cuando se considera una solución aproximada, por ejemplo, el caso de una rotación lenta, para la que se sabe que las superficies de la misma densidad diferirán poco de una forma esférica, una estratificación elipsoidal ofrece un buen grado de aproximación.

Normalmente se supone que, en una figura de equilibrio, la densidad aumenta hacia el centro.

Una suposición más, a tener en cuenta, es que en el caso de un fluido no homogéneo las superficies de nivel de la misma densidad forman un conjunto de superficies cerradas que incluyen a la precedente.

### 2.1.3. Distribución de la densidad

En las investigaciones referentes a las figuras de equilibrio se supone, habitualmente, que la densidad es una función creciente de la distancia desde la superficie al centro del cuerpo. Este hecho puede ser probado, al menos, en un caso. *Liapounov* [58] demostró que una esfera es la única figura de equilibrio de una masa aislada en reposo y que su densidad aumentará desde la superficie hacia el centro a causa de las condiciones de equilibrio. El método seguido fue el siguiente:

Sea  $R$  el radio de una esfera que es la superficie límite de una masa fluida en reposo y  $\rho$  su densidad. Es obvio que, si la masa de un fluido no homogéneo está en equilibrio, debe de estar compuesto de capas esféricas concéntricas. En general, la densidad puede ser una función de un parámetro  $\alpha$ . No obstante, si el fluido es compresible y  $\rho = f(P)$ , se puede demostrar que  $\rho = \chi(\alpha)$  no puede ser una función arbitraria. En una superficie de nivel se puede poner

$$\int_V \frac{\rho' dV'}{\Delta} = Cte = \alpha \quad (2.14)$$

Por lo que de (2.14),  $\omega = 0$  y

$$G \int_V \frac{\rho' dV'}{\Delta} + \frac{\omega^2 r_{\perp}^2}{2} = \int_0^P \frac{dP}{\rho} + Cte$$

se deduce que

$$\frac{1}{G} \int_0^P \frac{dP}{f(P)} = \alpha - \alpha_0 \quad (2.15)$$

donde  $\alpha_0$  corresponde a  $P = 0$ , es decir, a la superficie libre del fluido. Así, se obtiene de esta ecuación que  $P = P(\alpha)$  y, sustituyendo esta función en la ecuación de estado, queda  $\rho = \chi(\alpha)$ .

Sea  $U_M$  el potencial en un punto  $M(x, y, z)$  a una distancia  $r$  del centro  $O$  de la masa fluida y el elemento  $\rho' dV'$  tomado en un punto  $M'(x', y', z')$  a una distancia  $r'$ . Tomando el eje polar  $OM$ , suponiendo que el ángulo  $\theta$



corresponde a la colatitud y  $\lambda$  a la longitud. Sea  $\theta'$  el ángulo entre  $r$  y  $r'$ ,  $d\sigma'$  el elemento de la esfera con radio la unidad. Entonces

$$\begin{aligned} x' &= \sin \theta' \cos \lambda' & 0 \leq \lambda' \leq 2\pi \\ y' &= \sin \theta' \sin \lambda' & 0 \leq \theta' \leq \pi \\ z' &= \cos \theta' & |J| = \sin \theta' \end{aligned}$$

$$d\sigma' = \sin \theta' d\theta' d\lambda' \quad \Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}$$

por lo que

$$U_M = \int_V \frac{\rho' dV'}{\Delta} = \int_0^R \rho' r'^2 dr' \int_{\sigma'} \frac{d\sigma'}{\Delta} \quad (2.16)$$

Por otra parte

$$\int_{\sigma'} \frac{d\sigma'}{\Delta} = \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \frac{\sin \theta' d\theta' d\lambda'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} = \frac{2\pi}{rr'} (r + r' - |r - r'|)$$

$$\int_{\sigma'} \frac{d\sigma'}{\Delta} = \begin{cases} \frac{4\pi}{r} & \text{si } r' \leq r \\ \frac{4\pi}{r'} & \text{si } r' \geq r \end{cases}$$

Para cada punto  $M$  interior del fluido, la ecuación (2.16) toma la forma

$$\int_V \frac{\rho' dV'}{\Delta} = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho' r'^2 dr' + 4\pi \int_r^R \rho' r' dr'$$

Para cada punto de la esfera  $r = a$ , (2.16) toma la forma

$$\int_V \frac{\rho' dV'}{\Delta} = \frac{4\pi}{a} \int_0^a \rho a^2 da + 4\pi \int_a^R \rho a da$$

donde  $\rho$  está expresada en términos de  $a$ .

Por lo tanto

$$\frac{d}{da} \int_V \frac{\rho' dV'}{\Delta} = -\frac{4\pi}{a^2} \int_0^a \rho a^2 da \quad (2.17)$$

Dado que  $\rho > 0$ , la integral con respecto a la variable  $a$  es positiva. Ya que

$$\frac{d}{da} \int_0^P \frac{dP}{\rho} = \frac{d}{dP} \int_0^P \frac{dP}{f(P)} \cdot \frac{dP}{da} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{da}$$

Además como

$$G \int_V \frac{\rho' dV'}{\Delta} = \int_0^P \frac{dP}{\rho} + Cte \Rightarrow \frac{d}{da} \int_V \frac{\rho' dV'}{\Delta} = \frac{1}{G} \frac{d}{da} \int_0^P \frac{dP}{\rho}$$

se obtiene de (2.17)

$$-\frac{4\pi}{a^2} \int_0^a \rho a^2 da = \frac{1}{G} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{da}$$

$$\frac{dP}{da} = -G \rho \frac{4\pi}{a^2} \int_0^a \rho a^2 da < 0 \quad (2.18)$$

Así, la presión, en una figura esférica de equilibrio, es creciente hacia el centro. Además, si la densidad de un fluido es una función creciente respecto de la presión, la densidad, en una figura de equilibrio, también tendrá que ser creciente desde la superficie libre hasta el centro.

En el caso de un fluido heterogéneo e incompresible, normalmente se supone que la densidad es una función creciente de la profundidad y que, en caso contrario, el equilibrio sería inestable.

## 2.2. Figuras de equilibrio. Método inverso

### 2.2.1. Ecuación fundamental

En este apartado se hará una breve relación de las investigaciones clásicas relativas a las figuras de cuerpos celestes. Si suponemos que un cuerpo celeste está cambiando su forma, el problema de su movimiento deviene, en general, demasiado complicado, ya que en la ecuación del movimiento, la superficie libre del cuerpo en cuestión es desconocida. Es más, en el caso de un cuerpo no homogéneo, incluso la estratificación completa es desconocida. Así, el movimiento se produce por fuerzas variables que dependerán de una estratificación variable. Incluso en el caso más simple, representado por el equilibrio de una masa fluida por la que las figuras de muchos cuerpos celestes pueden ser explicados, el problema se ha reducido a la solución de una ecuación funcional (2.4). Para resolver este tipo de ecuación se requieren, en general, métodos muy complejos. Por ello, se puede ver fácilmente por qué las primeras soluciones fueron obtenidas por el método inverso.

El llamado método inverso es un procedimiento alternativo para la búsqueda de soluciones al problema de las configuraciones de equilibrio. El método consiste en investigar si determinadas figuras pueden ser o no ser soluciones del problema. El caso más simple corresponde a la figura de equilibrio de una masa en reposo (2.8).

En la ecuación funcional (2.4) son desconocidos los límites de  $V$  y la densidad  $\rho$ , si el fluido es no homogéneo. Sin embargo, se puede ver fácilmente que, suponiendo que la figura de una masa homogénea es una esfera o que la estratificación se representa por un conjunto de esferas concéntricas tales que la densidad sea radial, también se satisfacen la condición de equilibrio.

Para las figuras de equilibrio de una masa fluida en rotación tenemos la ecuación (2.7), lo que para el caso homogéneo implica que

$$\int_V \frac{dV'}{\Delta} + \frac{\omega^2 r_{\perp}^2}{2G\rho} = Cte$$

En este caso ninguna esfera satisface esta condición.

En el caso de una masa fluida homogénea, entre las posibles figuras de equilibrio, se encuentran los elipsoides.

Los métodos inversos presentan el inconveniente de no proporcionar de una manera fácil el conjunto completo de soluciones. En el caso estático, *Liapounov* [58] y *Carleman* [14] demostraron que la única solución posible es la esfera. En el caso de rotación se conocen varias soluciones: elipsoides, figuras toroidales y figuras próximas a elipsoides; aunque todavía no ha llegado a probarse que dicha lista esté completa.

### 2.2.2. Los elipsoides de *MacLaurin* y *Jacobi*

Los primeros estudios modernos acerca de la figura de los cuerpos celestes se deben a *Newton*, el cual a partir de la ley de gravitación explicó las figuras de los cuerpos celestes y llegó a la conclusión de que la figura de la Tierra es un elipsoide. *MacLaurin* fue el primero en dar, en 1742, una rigurosa prueba matemática del hecho que el elipsoide de rotación podía ser una figura de equilibrio de una masa fluida homogénea aislada en rotación.

El caso más simple, en la teoría de las figuras de equilibrio, es obviamente el de un fluido homogéneo ( $\rho = Cte$ ). El potencial newtoniano de un elipsoide homogéneo  $E$  en un punto  $M(x, y, z)$  de su interior se puede escribir de la forma siguiente [41], [71], [87]

$$\Omega = Cte - L_x \frac{x^2}{2} - L_y \frac{y^2}{2} - L_z \frac{z^2}{2} \quad (2.19)$$

donde

$$L_x = 2\pi G\rho abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \quad (2.20)$$

$$L_y = 2\pi G\rho abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \quad (2.21)$$

$$L_z = 2\pi G\rho abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \quad (2.22)$$

siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  los semiejes del elipsoide;  $\varrho$ ,  $\theta$  y  $\gamma$  las coordenadas esféricas del punto  $M$  de manera que  $x = \varrho \cos \theta$ ,  $y = \varrho \sin \theta \cos \gamma$ ,  $z = \varrho \sin \theta \sin \gamma$ ;  $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{\lambda + a^2}}$ ; para  $\rho = Cte$ .

De (2.5), (2.7) y  $r_\perp^2 = x^2 + y^2$  se obtiene

$$\Omega = Cte - \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2}$$

De esta última ecuación y de (2.19) se obtiene

$$x^2(L_x - \omega^2) + y^2(L_y - \omega^2) + z^2 L_z = Cte \quad (2.23)$$

Esta condición es válida para todos los puntos de la superficie (2.19) donde cada valor particular de la constante determina la superficie del elipsoide  $E$ .

Además, si la superficie de un elipsoide de revolución

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.24)$$

se identifica con la superficie exterior de un fluido, la ecuación (2.23) tomará la forma

$$(L - \omega^2)(x^2 + y^2) + L_z z^2 = Cte \quad (2.25)$$

donde

$$L = L_x = L_y = 2\pi G\rho a^2 c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.26)$$

$$L_z = 2\pi G\rho a^2 c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.27)$$

para  $\rho = Cte$ .

De (2.24) y de (2.25)

$$(L - \omega^2)a^2 = L_z c^2 = Cte \quad (2.28)$$

De (2.28) se obtiene

$$a^2 L - c^2 L_z = a^2 \omega^2 > 0 \quad (2.29)$$

Si un elipsoide es una figura de equilibrio, de (2.26), (2.27) y (2.29)

$$a^2 L - c^2 L_z = 2\pi G\rho a^2 c (a^2 - c^2) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^2 (c^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}} > 0 \quad (2.30)$$

Como es evidente que esta integral es positiva, se deduce que

$$a^2 - c^2 > 0 \Rightarrow a > c$$

Es decir, el elipsoide está achatado por los polos.

Llegado a este punto, es conveniente introducir una nueva variable  $l$  determinada por la ecuación

$$a^2 = c^2(1 + l^2) \quad (2.31)$$

Si se introduce una nueva variable,  $t$ , de forma que  $\lambda = c^2 t$ ,  $L$  y  $L_z$  se pueden expresar en términos de funciones elementales [41]

$$L = 2\pi G\rho \frac{1 + l^2}{l^3} \left( \arctan l - \frac{l}{1 + l^2} \right) \quad (2.32)$$

$$L_z = 4\pi G\rho \frac{1 + l^2}{l^3} (l - \arctan l) \quad (2.33)$$

La masa del elipsoide es, además, una función de la variable  $l$

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho a^2 c = \frac{4}{3} \pi \rho c^3 (1 + l^2) = \frac{4\pi \rho a^3}{3\sqrt{1 + l^2}} \quad (2.34)$$

Con lo que, si se conocen los valores de  $m$ ,  $\rho$  y  $l$ , de esta última ecuación se puede determinar  $a$ ; y de (2.31) el otro eje del elipsoide.

Por otra parte, de (2.29), (2.32) y (2.33) se obtiene la condición que debe satisfacer  $\omega$

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = \frac{(3 + l^2) \arctan l - 3l}{l^3} \equiv h(l) \quad (2.35)$$

y de (2.28) se obtiene el valor de la *Cte*, con lo que queda determinado el potencial de la superficie exterior.

Sea

$$\arctan l = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{l^{2n+1}}{2n+1} & \text{si } |l| \leq 1 \\ \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)l^{2n+1}} & \text{si } |l| > 1 \end{cases} \quad (2.36)$$

De (2.35) y (2.36)

$$h(l) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4n}{(2n+1)(2n+3)} l^{2n} & \text{si } |l| \leq 1 \\ \frac{(3 + l^2) \left( \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)l^{2n+1}} \right) - 3l}{l^3} & \text{si } |l| > 1 \end{cases} \quad (2.37)$$

La función  $h(l)$  alcanza un máximo en  $l = 2'52931 \dots$  donde su valor correspondiente es  $h(2'52931 \dots) = 0'2246657 \dots$

La discusión de la ecuación (2.35) muestra que hay un cierto valor límite de  $\omega$  y que, en general, se pueden considerar dos casos que corresponden a las condiciones

$$h = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} < 0'2246657 \dots \quad \text{y} \quad h = \frac{\omega^2}{2\pi G\rho} \geq 0'2246657 \dots$$

En el primer caso hay tres elipsoides de *MacLaurin* que corresponden al mismo valor de  $\omega$ . En el segundo caso sólo es posible un elipsoide. Finalmente, cuando  $\omega > \omega_0$ , donde  $\omega_0$  es el valor límite antes nombrado, ningún elipsoide de revolución puede ser figura de equilibrio de una masa fluida en rotación.

En 1834, *Jacobi* demostró que un elipsoide con tres ejes diferentes también podía ser una figura de equilibrio si esos ejes satisfacían determinadas condiciones. Sea la ecuación del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.38)$$

donde  $c < b < a$ .

Teniendo en cuenta estas condiciones, la ecuación (2.23) toma la forma

$$a^2(L_x - \omega^2) = b^2(L_y - \omega^2) = c^2 L_z \quad (2.39)$$

donde  $L_x$ ,  $L_y$  y  $L_z$  vienen determinadas por (2.20), (2.21) y (2.22), respectivamente, para  $\rho = Cte$ .

Despejando de (2.39)  $\omega^2$  se obtiene

$$\omega^2 = \frac{a^2 L_x - b^2 L_y}{a^2 - b^2} \quad (2.40)$$

Por otro lado

$$\left. \begin{array}{l} a^2(L_x - \omega^2) = c^2 L_z \\ \omega^2 = \frac{a^2 L_x - b^2 L_y}{a^2 - b^2} \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 b^2 (L_x - L_y) + c^2 (a^2 - b^2) L_z = 0 \quad (2.41)$$

De (2.20), (2.21), (2.22) y (2.40)

$$\frac{\omega^2}{2\pi G \rho} = abc \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} \quad (2.42)$$

De (2.20), (2.21), (2.22) y (2.41)

$$(b^2 - a^2) \int_0^\infty \left( \frac{a^2 b^2}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} - \frac{c^2}{c^2 + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} = 0 \quad (2.43)$$

Es evidente que, tanto (2.42) como (2.43), se cumplen para  $a = b$ . Por lo tanto supongamos que  $a \neq b$ .

Se definen unas nuevas variables dadas por

$$s = \frac{c^2}{a^2} \quad , \quad t = \frac{c^2}{b^2} \quad , \quad \lambda = c^2\tau \quad (2.44)$$

De (2.42) y (2.44)

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = st \int_0^\infty \frac{\tau d\tau}{(1+s\tau)(1+t\tau)\sqrt{(1+s\tau)(1+t\tau)(1+\tau)}} \equiv h(s, t) \quad (2.45)$$

De (2.43) y (2.44)

$$0 = (1-t-s) \int_0^\infty \frac{\tau d\tau}{((1+s\tau)(1+t\tau)(1+\tau))^{\frac{3}{2}}} - st \int_0^\infty \frac{\tau^2 d\tau}{((1+s\tau)(1+t\tau)(1+\tau))^{\frac{3}{2}}} \equiv g(s, t) \quad (2.46)$$

Las variables  $s$  y  $t$  son positivas por definición. Es evidente que las dos integrales de (2.46) también son positivas. Entonces, si el elipsoide dado es una figura de equilibrio, de (2.46) se obtiene que  $s + t < 1$ .

La masa del elipsoide se puede expresar en términos de los parámetros  $s$  y  $t$ .

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho abc = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{c^3}{\sqrt{st}} = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{b^3 t}{\sqrt{s}} = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{a^3 s}{\sqrt{t}}$$

Si son conocidas la masa, la densidad y los valores de los parámetros  $s$  y  $t$ , de (2.45) y de (2.46), se pueden calcular todos los ejes y su correspondiente velocidad angular.

Las ecuaciones (2.45) y (2.46) representan una curva en el espacio de variables  $s$ ,  $t$  y  $h$ , donde la ecuación  $g(s, t) = 0$  es la proyección de esa curva en el plano  $st$ .



Estudiando la monotonía de la función  $h(s, t)$  se obtiene que en  $s = t$  se alcanza un máximo. Para determinarlo, en primer lugar, de (2.46) se obtiene

$$g(t, t) = (1 - 2t) \int_0^\infty \frac{\tau d\tau}{(1 + t\tau)^3(1 + \tau)^{\frac{3}{2}}} - t^2 \int_0^\infty \frac{\tau^2 d\tau}{(1 + t\tau)^3(1 + \tau)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

de donde evaluando las dos integrales queda

$$g(t, t) = \frac{10t - 13}{4(1 - t)^2} + \frac{8t(1 - t) + 3}{4\sqrt{t}(1 - t)^{\frac{5}{2}}} \arctan \sqrt{\frac{1 - t}{t}} = 0 \quad (2.47)$$

Ahora, mediante el método de *Newton*, de esta ecuación se obtiene  $t = 0'33956745$ . Por lo tanto,  $h(t, t)$  alcanza un máximo en  $s = t = 0'33956745 \dots$

En segundo lugar, se va a determinar, a partir de (2.45), cuál es el valor que alcanza  $h(t, t)$  para ese máximo.

$$h(t, t) = t^2 \int_0^\infty \frac{\tau d\tau}{(1 + t\tau)^3 \sqrt{1 + \tau}}$$

Para ello, análogamente al caso anterior, se evalúa la integral anterior y se obtiene

$$h(t, t) = \frac{2t^2 + t + (1 - 4t) \sqrt{\frac{t}{1-t}} \arctan \sqrt{\frac{1-t}{t}}}{4(1 - t)^2} \quad (2.48)$$

Con lo que  $h(0'33956745 \dots, 0'33956745 \dots) \approx 0'18711483 \dots$ .

En consecuencia, la función  $h(t, t)$ , alcanza un máximo en  $h_0 = 0'18711483 \dots$  para  $s = t = t_0 = 0'33956745 \dots$  y el elipsoide correspondiente pertenece a la serie de elipsoides de *MacLaurin*. Este máximo  $h_0$  es el valor límite que determina el punto de intersección de dos curvas que representan los conjuntos de elipsoides de *Jacobi* y los de *MacLaurin*. Todo ello determina un nuevo valor límite para la velocidad angular. Este valor  $\omega = \omega_1$  se da por la condición  $h = 0'18711483 \dots$ . Cuando  $h < 0'18711483 \dots$  sólo hay un elipsoide de *Jacobi* posible que corresponde a un determinado valor de  $\omega$  y que representa una figura de equilibrio. Para el valor límite  $\omega_1$  de la velocidad angular, el elipsoide de *Jacobi* se transforma en un elipsoide de revolución (una información más detallada sobre los trabajos de *MacLaurin* y de *Jacobi* se puede encontrar en [5] y en [87]).

### 2.2.3. Figuras no homogéneas

Durante mucho tiempo, la única base de las teorías de figuras no homogéneas en equilibrio, fue la ecuación de *Clairaut* que representa la conexión entre la densidad media de una capa y su excentricidad. Para obtener estos resultados se suponen unas ciertas condiciones referentes a la estratificación de una masa. Siguiendo la deducción dada por *Wavre* en [93], si se escriben las ecuaciones (2.2) en la forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = X + \omega^2 x \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = Y + \omega^2 y \quad , \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = Z \quad (2.49)$$

donde

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad , \quad Y = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad , \quad Z = \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

muestran que la fuerza de la gravedad, es decir, la resultante de la atracción y de la fuerza centrífuga, tiene la dirección de la normal a la superficie de la misma presión  $P(x, y, z) = Cte$ . En el caso  $\rho = f(P)$ , coinciden tres grupos de superficies:  $P = Cte$ ,  $\rho = Cte$  y las superficies de nivel.

Considerando este caso y denotando el potencial gravitatorio por

$$W = \int \frac{dP}{\rho} + Cte = W(\rho) \quad (2.50)$$

la estratificación que normalmente se toma como la que corresponde a una distribución de densidad como  $\rho$ , se puede expresar en términos de un parámetro que se denominará  $\hat{a}$  (en la sección 1.2.4 se define este parámetro).

Entonces, tanto el potencial gravitatorio como la gravedad  $g$ , son funciones de este parámetro  $W(\hat{a})$  y  $\vec{g}(\hat{a})$ , respectivamente. Las coordenadas del vector  $\vec{g}$  vienen dadas por los segundos miembros de (2.49) o por las ecuaciones

$$g_x = g\alpha = \frac{\partial W}{\partial x} \quad , \quad g_y = g\beta = \frac{\partial W}{\partial y} \quad , \quad g_z = g\gamma = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (2.51)$$

siendo  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  los coeficientes angulares de la normal interior a la superficie  $W = Cte$ . Si  $d\vec{n}$  es el elemento de esta normal, se tiene que

$$\frac{dg}{d\vec{n}} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{d\vec{n}} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{d\vec{n}} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{d\vec{n}} = \vec{n} \cdot \nabla g \quad (2.52)$$

y, derivando (2.51), se obtiene

$$\nabla^2 W = \frac{dg}{d\vec{n}} + g \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right) \quad (2.53)$$

La expresión entre paréntesis representa la divergencia de  $\vec{n}$  si  $\vec{n}$  es un vector unitario en la dirección de la normal.

$$\nabla^2 W = \nabla g \cdot \vec{n} + g \cdot \nabla \vec{n} \quad (2.54)$$

Consideremos ahora un punto  $P$  sobre una superficie de nivel  $S$ . Tomemos un sistema local de coordenadas  $xyz$  con origen en  $P$ , cuyo eje  $z$  es vertical, esto es, normal a la superficie  $S$ .

La curvatura media  $\bar{\kappa}$  de una superficie en un punto  $P$  se define como la media aritmética de las curvaturas de las curvas en las que dos planos mutuamente ortogonales que contiene a la normal cortan a la superficie [35] [38]. Por lo tanto, se obtiene

$$\bar{\kappa} = -\frac{1}{2g} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (2.55)$$

Teniendo en cuenta las consideraciones hechas

$$\frac{\partial W}{\partial z} = -g \quad , \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -\frac{\partial g}{\partial z} \quad (2.56)$$

$$\nabla g \cdot \vec{n} = -\frac{\partial g}{\partial z} \quad (2.57)$$

De (2.54), (2.56) y (2.57)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = g \cdot \nabla \vec{n} \quad (2.58)$$

con lo que despejando  $\nabla \vec{n}$

$$\nabla \vec{n} = -\kappa \quad (2.59)$$

donde  $\kappa$  es el doble de la curvatura media de la superficie  $W = Cte$ . Por lo que

$$\nabla^2 W = \frac{dg}{d\vec{n}} - \kappa g \quad (2.60)$$

Por otra parte, de (2.4), se obtiene

$$\nabla^2 W = \nabla^2 \Omega + \nabla^2 \left( \frac{\omega^2 r_{\perp}^2}{2} \right)$$

Como el potencial  $\Omega$  satisface la ecuación de *Poisson*, se obtiene la ecuación de *Brunns*[12]

$$\frac{dg}{d\vec{n}} - \kappa g = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \quad (2.61)$$

Esta es una ecuación exacta en la cual se determina el valor de una de las cantidades relacionadas si las restantes son conocidas. A partir de las ecuaciones (2.51)-(2.61) es fácil ver que la relación (2.61) no depende de ninguna hipótesis respecto de la conexión entre grupos de superficies a las que se ha hecho referencia anteriormente.

Se pueden extraer otras conclusiones de (2.61). Por ejemplo, supóngase que  $d\vec{n}$  y  $d\hat{a}$  son positivos al mismo tiempo, es decir, ahora se cambia el sentido de  $d\vec{n}$  que era positivo hacia el interior y se pone  $\frac{d\vec{n}}{d\hat{a}} = \vec{N}$ . Entonces se tiene que

$$-\vec{g}\vec{N} = W' = \frac{dW}{d\hat{a}} \quad (2.62)$$

siendo  $g$  la derivada de  $W$  a lo largo de la normal.

A lo largo de una superficie  $W = Cte$  la expresión (2.62) no cambia y, por lo tanto, se puede escribir

$$(\vec{g}\vec{N})_1 = (\vec{g}\vec{N})_2 \quad (2.63)$$

Esto, evidentemente, se mantiene cuando los puntos  $M_1$  y  $M_2$  se desplazan a lo largo de las líneas de fuerza  $l_1$  y  $l_2$ . Derivando (2.63) se obtiene

$$\left( \frac{d\vec{g}}{d\hat{a}}\vec{N} + \vec{g}\frac{d\vec{N}}{d\hat{a}} \right)_1 = \left( \frac{d\vec{g}}{d\hat{a}}\vec{N} + \vec{g}\frac{d\vec{N}}{d\hat{a}} \right)_2 \quad (2.64)$$

y de (2.61) y (2.62)

$$\frac{d\vec{g}}{d\hat{a}} = -\kappa W' + (-4\pi G\rho + \omega^2)\vec{N} \quad (2.65)$$

Si ahora se sustituye (2.65) en (2.64) se obtiene

$$(4\pi G\rho - 2\omega^2)(N_2^2 - N_1^2) = W' \left[ \left( \kappa\vec{N} + \frac{1}{\vec{N}} \frac{d\vec{N}}{d\hat{a}} \right)_1 - \left( \kappa\vec{N} + \frac{1}{\vec{N}} \frac{d\vec{N}}{d\hat{a}} \right)_2 \right] \quad (2.66)$$

Como probaron *Volterra*[92] en 1903 para un número infinito de capas de superficies de la misma densidad y *Hamy* en 1887 para un número finito de esas capas, esas superficies no pueden coincidir con un grupo de elipsoides homotéticos. La afirmación de *Volterra* se mantiene cuando la densidad es una función integrable. No obstante, es posible utilizar en ciertos casos los elipsoides como superficies aproximadas cuando existe estratificación.

### 2.2.4. Ecuación de *Clairaut*

Supongamos que:

1.  $W = Cte$  son superficies cerradas en las que cada una de ellas incluye a la precedente.
2. Todas ellas tienen un centro común.
3. Son superficies de revolución.

La ecuación (2.66) puede aplicarse a una superficie  $W_r = Cte$ . Los radios polar y ecuatorial de esta superficie son:  $c_r(\hat{a}) =$  radio polar y  $a_r(\hat{a}) =$  radio ecuatorial. La curvatura media en el polo es  $\kappa_p(\hat{a})$  y en el ecuador  $\kappa_E(\hat{a})$ . Sea  $\vec{g}_p(\hat{a})$  la gravedad en el polo  $P_r$ . Entonces se puede escribir (2.66) en la forma

$$\begin{aligned} & (4\pi G\rho - 2\omega^2) \left[ \left( \frac{da_r}{d\hat{a}} \right)^2 - \left( \frac{dc_r}{d\hat{a}} \right)^2 \right] = \\ & = -g_p \frac{dc_r}{d\hat{a}} \left[ \kappa_p \frac{dc_r}{d\hat{a}} + \left( \frac{d\hat{a}}{dc_r} \right) \frac{d^2c_r}{d\hat{a}^2} - \kappa_E \frac{da_r}{d\hat{a}} - \left( \frac{d\hat{a}}{da_r} \right) \frac{d^2a_r}{d\hat{a}^2} \right] \end{aligned} \quad (2.67)$$

De acuerdo con la suposición de *Clairaut*, la estratificación viene determinada por el conjunto de elipsoides concéntricos y el parámetro  $\hat{a}$  representa sus semiejes polares. Entonces, las curvaturas son, aproximadamente

$$\kappa_E = \frac{2}{\hat{a}} \quad , \quad \kappa_p = \frac{2}{\hat{a}} \left( 1 - 2\frac{\delta}{\hat{a}} \right)$$

donde  $\delta = a_r - c_r$  es pequeño para los elipsoides que difieren poco de una esfera. No teniendo en cuenta los términos de orden  $\delta^2$ , la ecuación (2.67) toma la forma

$$\frac{4\pi G\rho - 2\omega^2}{g_p} \delta' = \frac{\delta'}{\hat{a}} + \frac{2}{\hat{a}^2} \delta - \frac{\delta''}{2} \quad (2.68)$$

Además, si  $\omega^2$  es pequeña,  $\delta$ ,  $\delta'$  y  $\delta''$  también lo son y, en consecuencia, el producto  $\omega^2\delta'$  es despreciable. La densidad media  $\rho_a$  en el interior de  $W_r = Cte$  y la gravedad pueden calcularse, aproximadamente, suponiendo una distribución de masas esférica. Así, se tiene

$$m_r = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_r \quad , \quad r = c_r$$

De esta ecuación se obtiene que

$$3c_r^2 \rho_r + c_r^3 \rho_r' = 3c_r^2 \rho$$

y

$$\frac{3}{c_r} + \frac{\rho_r'}{\rho_r} = \frac{4\pi G \rho}{g_p} \quad (2.69)$$

ya que el denominador del segundo miembro,  $\frac{4}{3}\pi G c_r \rho_r$ , representa la gravedad en la superficie de la esfera. Así, como  $c_r = \hat{a}$ , de (2.68) y (2.69) se obtiene

$$\frac{2}{\hat{a}} + \frac{\rho_r'}{\rho} = \frac{2}{\hat{a}^2} \frac{\delta}{\delta'} - \frac{1}{2} \frac{\delta''}{\delta'} \quad (2.70)$$

Se puede introducir la excentricidad  $e = \frac{\delta}{\hat{a}}$  como una nueva variable y, entonces, la ecuación de *Clairaut* (2.70) toma la forma

$$e'' \rho_r + \frac{6}{\hat{a}} e' \rho_r + 2e' \rho_r' + \frac{2}{\hat{a}} e \rho_r' = 0 \quad (2.71)$$

En el trabajo *Théorie de la figure de la Terre (1743)* se planteó por primera vez el teorema de *Clairaut*, según el cual se conecta la gravedad en los puntos superficiales de un elipsoide en rotación con la compresión y la fuerza centrífuga en el ecuador.

Es conocido que se puede probar el teorema de *Clairaut* para la gravedad en el polo [41]. Se expresa por las condiciones

$$\frac{4}{5} e \leq \frac{\omega^2 \hat{a}}{g} \leq 2e \quad , \quad \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \hat{a}}{g} \leq e \leq \frac{5}{4} \frac{\omega^2 \hat{a}}{g} \quad (2.72)$$

También se pueden probar dos relaciones más:

$$e + \frac{g_{ecua} - g_{polo}}{g} = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 \hat{a}}{g} \quad (2.73)$$

$$C - A = \frac{2}{3} \frac{g}{G} \hat{a}^4 \left( e - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \hat{a}}{g} \right) \quad (2.74)$$

donde  $g$  es la gravedad en una latitud determinada de la superficie del planeta,  $A$  y  $C$  son los momentos de inercia de un planeta respecto a los diámetros ecuatorial y polar, respectivamente.

Cuando el problema de una figura de un planeta no homogéneo se reduce a la forma dada por *Clairaut*, se supone que las superficies de nivel son elipsoides concéntricos y que se conoce la distribución de densidades. Entonces el problema es determinar la variación de elipticidad desde la superficie libre hasta el centro.

### 2.2.5. El elipsoide de *Dirichlet*

Supongamos que, en un instante inicial, una masa homogénea líquida tiene forma de elipsoide

$$\frac{\hat{x}^2}{a^2} + \frac{\hat{y}^2}{b^2} + \frac{\hat{z}^2}{c^2} = 1 \quad (2.75)$$

*Dirichlet* considera un movimiento determinado por la condición de que las coordenadas de un elemento  $(x, y, z)$  son funciones lineales de  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ .

$$x = l \hat{x} + m \hat{y} + n \hat{z} \quad , \quad y = \dots \quad , \quad z = \dots \quad (2.76)$$

donde  $l$ ,  $m$ , y  $n$  son función del tiempo. Como es normal, las partículas están sujetas a su atracción mútua. La presión en la superficie del líquido puede ser, en general, una función del tiempo  $P(t)$ . Sustituyendo las expresiones (2.76) en la ecuación (2.75) se puede ver que la superficie exterior del líquido es un elipsoide variable concéntrico a (2.75) y se satisfacen las ecuaciones del movimiento si la presión viene dada por

$$P = P(t) + \sigma(t) \left[ 1 - \frac{\hat{x}^2}{a^2} - \frac{\hat{y}^2}{b^2} - \frac{\hat{z}^2}{c^2} \right] \quad (2.77)$$

Este movimiento del líquido puede ser dividido en dos partes:

- una rotación rígida respecto de un eje que pasa por el centro

- el movimiento de partículas respecto a los ejes de rotación de referencia  $O\xi\eta\zeta$

las velocidades relativas tienen que ser proporcionales a las nuevas coordenadas  $\xi, \eta, \zeta$

$$v_\xi = \lambda_1 \xi \quad , \quad v_\eta = \lambda_2 \eta \quad , \quad v_\zeta = \lambda_3 \zeta \quad (2.78)$$

Para el caso particular de que no exista rotación, *Dirichlet*, obtuvo oscilaciones isocrónicas en las que la forma del líquido varía desde un elipsoide alargado hasta uno aplanado, tomando en algún instante intermedio la forma esférica. Si la velocidad inicial no es cero y no satisface alguna condición especial, el elipsoide correspondiente se vuelve indefinidamente aplastado o estirado.

Si la velocidad inicial está por debajo de un cierto límite, la velocidad angular del líquido en rotación puede variar entre dos límites. No obstante, para un valor mayor de la velocidad angular de un elipsoide alargado, es necesario aplicar más presión.

*Dirichlet* probó, como un caso especial de su teoría, la existencia de elipsoides de *MacLaurin* y de *Jacobi*. Por otro lado, *Dedekind*, dedujo un resultado muy interesante de la investigación de *Dirichlet*: Cada elipsoide de *Jacobi* preservará su forma y posición si el movimiento interno de las partículas viene dado por las ecuaciones

$$x = \hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \frac{a}{b} \sin \omega t \quad , \quad y = -\hat{x} \frac{b}{a} \sin \omega t + \hat{y} \cos \omega t \quad , \quad z = \hat{z} \quad (2.79)$$

Entonces la constante  $\omega$  es la velocidad angular del correspondiente elipsoide de *Jacobi*. Cada partícula, por lo tanto, describe una elipse cuya ecuación paramétrica viene dada en forma paramétrica por (2.79).

*Riemann* mejoró la investigación inacabada de *Dirichlet* y modificó el problema. Estudió los cambios característicos de los ejes del elipsoide y el movimiento relativo del líquido respecto a ellos, eliminando el momento inicial de las ecuaciones del movimiento. Así, puede probarse, que hay sólo cuatro casos particulares conocidos de investigaciones previas en los que los principales ejes de los elipsoides no cambian. En lo concerniente a pequeñas oscilaciones, hay dos tipos de cambios que difieren en estabilidad. De acuerdo con *Riemann*, si la superficie afectada del elipsoide de *MacLaurin* continua siendo un elipsoide de revolución, el equilibrio es estable.



En el caso de que el ecuador circular se convierta en una elipse y los ejes polares no cambien, habrá inestabilidad si la excentricidad excede de ciertos límites.

## 2.3. Método de *Poincaré*

### 2.3.1. Funciones fundamentales

En su famosa memoria [74], *Poincaré* sugirió un método para resolver el problema de las figuras de equilibrio de una masa fluida en rotación. Este método proporciona también soluciones a un nuevo tipo de figuras llamadas “figuras de *Poincaré*”.

En las series de los elipsoides de *MacLaurin* hay uno que corresponde al así llamado punto de bifurcación desde el que comienzan las series de los elipsoides de *Jacobi*. La pregunta que surge ahora es si hay otros puntos de bifurcación de un tipo similar. La respuesta dada por *Poincaré* [74] en 1885 fue afirmativa. Hay que resaltar que *Liapounov* descubrió las mismas figuras de equilibrio un año antes que *Poincaré*, pero decidió no incidir en su existencia en su primer artículo. Aún así, parece más apropiado llamar a estas figuras “figuras de equilibrio de *Liapounov-Poincaré*”, teniendo también en cuenta que el último investigador, más tarde, aplicó métodos más exactos para resolver algunos problemas relativos a éstas y otras figuras de equilibrio [56], [57], [58].

Las “funciones fundamentales” asociadas a una cierta superficie cerrada  $S$  juegan un importante papel en el método de *Poincaré*. Para ver las condiciones que han de satisfacer las funciones fundamentales se tendrán que utilizar las propiedades de un potencial de superficie debido a la gravitación de *Newton* o a las fuerzas eléctricas de *Coulomb*. Este potencial es continuo en la superficie  $S$ , pero su derivada normal es discontinua.

Sea  $U_k$  un conjunto de funciones con las siguientes propiedades:

1. El valor  $U_k^{(i)}$  en el espacio  $\tau_i$  limitado por  $S$  es una función armónica

$$\Delta U_k^{(i)} = 0 \quad (2.80)$$

2. El valor  $U_k^{(e)}$  de la función  $U_k$  en el espacio  $\tau_e$ , exterior a  $S$ , también satisface la ecuación de *Laplace*

$$\Delta U_k^{(e)} = 0 \quad (2.81)$$

y es regular en el infinito, es decir, del orden de  $O\left(\frac{1}{r}\right)$

3. En la superficie  $S$

$$U_k^{(i)} = U_k^{(e)} \quad (2.82)$$

y, si  $\vec{n}$  es el vector unitario normal

$$\left(\nabla U_k^{(i)} + h_k U_k^{(e)}\right) \cdot \vec{n} = \frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial \vec{n}} + h_k \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (2.83)$$

donde  $h_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , es un conjunto de números positivos.

Para determinarlos se suponen estas dos condiciones:

1.

$$J^{(i)} = \int_{\tau_i} (\nabla U^{(i)})^2 d\tau \text{ es un mínimo} \quad (2.84)$$

2.

$$J^{(e)} = \int_{\tau_e} (\nabla U^{(e)})^2 d\tau = 1 \quad (2.85)$$

Entonces, por las ecuaciones (2.82), (2.85) y el teorema de *Green*, se obtiene

1.

$$J^{(i)} = \int_S U^{(i)} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \vec{n}} dS$$

2.

$$J^{(e)} = - \int_S U^{(e)} \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \vec{n}} dS = - \int_S U^{(i)} \frac{\partial U^{(e)}}{\partial \vec{n}} dS = 1$$

Si  $U_0^{(i)} = Cte$ , de (2.84)  $J_0^{(i)} = 0$ . Por lo que hay un mínimo, ya que  $J^{(i)} \geq 0$ . Se supone que  $h_0 = 0$ .

En general, de (2.83)

$$\int_S U_k^{(i)} \left( \frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial \vec{n}} + h_k \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial \vec{n}} \right) dS = J_k^{(i)} + h_k (-J_k^{(e)}) = 0$$

por lo que

$$J_k^{(i)} = h_k \quad (2.86)$$

Las funciones  $U_k$  que satisfacen todas las condiciones que se acaban de dar se llaman funciones fundamentales. Las condiciones (2.85) y (2.86) también se pueden escribir de la forma

$$\int_S U_k^{(i)} \frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial \vec{n}} dS = h_k \quad , \quad \int_S U_k^{(i)} \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial \vec{n}} dS = -1 \quad (2.87)$$

Condiciones similares representan conexiones entre funciones que tienen diferentes subíndices

$$\int_S U_k^{(i)} \frac{\partial U_m^{(i)}}{\partial \vec{n}} dS = 0 \quad , \quad \int_S U_k^{(i)} \frac{\partial U_m^{(e)}}{\partial \vec{n}} dS = 0 \quad \text{para } k \neq m \quad (2.88)$$

Los armónicos esféricos dan esas funciones para el caso de una esfera y las funciones de *Lamé* para el caso de un elipsoide.

*Poincaré* [74] también probó (veáanse también las investigaciones de *Stekloff* [81], [82]) que, en general, si una función  $\Phi$  está determinada por una superficie  $S$  puede ser representada, bajo unas ciertas condiciones, por una serie de funciones fundamentales

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} A_k U_k^{(i)} \quad (2.89)$$

Para encontrar un coeficiente  $A_k$  se multiplica esta ecuación por  $\frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial \vec{n}} dS$  y se integra sobre la superficie  $S$ , obteniéndose de (2.87) y (2.88)

$$A_k = - \int_S \Phi \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial \vec{n}} dS \quad (2.90)$$

Este resultado general se ha aplicado a la teoría de las figuras de equilibrio que difieren poco de los elipsoides y, por lo tanto, ahora se tendrán en cuenta algunas propiedades de las funciones de *Lamé*.

Sean  $\varrho$ ,  $\mu$  y  $\nu$  coordenadas elípticas y  $R(\varrho^2)$ ,  $S(\varrho^2)$ ,  $M(\mu^2)$  y  $N(\nu^2)$  las funciones de *Lamé*. Como es sabido, las coordenadas elípticas corresponden a tres superficies confocales que pasan por un punto dado  $P(x, y, z)$ .

La ecuación de la superficie de segundo orden ( $c < b < a$ )

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0 \quad (2.91)$$

representa elipsoides si  $\lambda^2 = \varrho^2$  y  $\lambda^2 - a^2 > 0$ ; hiperboloides confocales de una hoja si  $\lambda^2 = \mu^2$ ,  $\lambda^2 - a^2 < 0$  y  $\lambda^2 - b^2 > 0$ ; e hiperboloides confocales de dos hojas si  $b^2 > \lambda^2 = \nu^2 > c^2$ .

Hay ocho puntos en el espacio correspondientes a los tres valores dados de  $\varrho$ ,  $\mu$  y  $\nu$ . Sea  $f(\varrho^2)$  un polinomio de grado  $n = 2k$ . Hay cuatro clases de funciones de *Lamé* [76]:

1.

$$R = f(\varrho^2) \quad (2.92)$$

2.

$$R = \left( \sqrt{\varrho^2 - a^2} f(\varrho^2), \sqrt{\varrho^2 - b^2} f(\varrho^2), \sqrt{\varrho^2 - c^2} f(\varrho^2) \right) \quad (2.93)$$

3.

$$R = \left( \sqrt{(\varrho^2 - a^2)(\varrho^2 - b^2)} f(\varrho^2), \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)} f(\varrho^2), \sqrt{(\varrho^2 - a^2)(\varrho^2 - c^2)} f(\varrho^2) \right) \quad (2.94)$$

4.

$$R = \sqrt{(\varrho^2 - a^2)(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)} f(\varrho^2) \quad (2.95)$$

Las funciones  $M$  y  $N$  se representan por expresiones similares en las que  $\mu^2$  o  $\nu^2$  son sustituidas por  $\varrho^2$ , por ejemplo, de (2.92)  $M = f(\mu^2)$  y  $N = f(\nu^2)$ .

Expresiones como  $MN$  o  $RMN$  se llaman productos de *Lamé* y son soluciones de la ecuación de *Laplace*.

Una función de *Lamé* de segunda especie  $S$  se define como la segunda solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 R}{du^2} = [n(n+1)\wp u + h] R \quad (2.96)$$

en la que  $\wp u$  es la función de *Weierstrass*. La constante  $h$  en (2.96) viene determinada por la condición de que las soluciones sean del tipo considerado anteriormente. La función  $S$  también debe satisfacer la condición

$$R \frac{dS}{du} - S \frac{dR}{du} = 2n + 1 \quad , \quad S = R \int_0^u \frac{2n+1}{R^2} du \quad (2.97)$$

Para más detalles respecto de las funciones de *Lamé*, se pueden consultar [5], [27], [76], [77]. Aquí se muestran unas pocas soluciones particulares y valores de los productos de *Lamé*. Estas soluciones particulares son

- $n = 0$ ,  $R_0 = 1$
- $n = 1$ ,  $R_1 = \sqrt{\varrho^2 - a^2}$ ,  $R_2 = \sqrt{\varrho^2 - b^2}$ ,  $R_3 = \sqrt{\varrho^2 - c^2}$
- $n = 2$ ,  $R_4 = R_2 R_3$ ,  $R_5 = R_3 R_1$ ,  $R_6 = R_1 R_2$ ,  $R_7 = \varrho^2 - [g + \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}]$ ,  
 $R_8 = \varrho^2 - [g - \frac{1}{6}\sqrt{3g_2}]$

Escribiendo la ecuación de *Weierstrass* en la forma

$$\wp u = s \quad , \quad \int_{\infty}^s \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = u$$

y poniendo

$$3g_2 = h^2 \quad Kg + H = h \quad , \quad K = n(n+1) \quad , \quad \varrho^2 = \wp u + g$$

donde  $H$  es constante, se obtiene la ecuación (2.96) transformada. Usando la variable  $\varrho$  esta ecuación toma la forma

$$\frac{A}{R} \frac{d}{d\varrho} \left( A \frac{dR}{d\varrho} \right) = K\varrho^2 + H$$

donde

$$A^2 = \frac{(\varrho^2 - a^2)(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{\varrho^2}$$

Para  $n = 1$  hay tres funciones de *Lamé* y tres productos que son, denotando por  $C$  a una constante arbitraria,

$$RMN = (C_x, C_y, C_z) \quad (2.98)$$

Para  $n = 2$ , hay cinco funciones  $R$  y, por lo tanto, cinco productos de *Lamé*. Tres de ellos son

$$RMN = (C_{xy}, C_{yz}, C_{zx}) \quad (2.99)$$

Para  $n = 3$  hay siete productos de *Lamé*. De (2.95) una de estas expresiones es

$$RMN = C_{xyz} \quad (2.100)$$

Sea la nueva variable  $l$  definida como la derivada de la variable  $u$ , introducida en (2.96), a lo largo de la normal exterior

$$\frac{du}{d\vec{n}_e} = -l \quad , \quad l^2 = \frac{1}{(\mu^2 - \varrho^2)(\nu^2 - \varrho^2)} \quad (2.101)$$

Supongamos ahora que un cierto elipsoide  $E_0$  viene determinado por  $\varrho = \varrho_0$  y que  $U_0$  es una función armónica de este elipsoide. De acuerdo con *Poincaré* se puede escribir

$$U_0 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k M_k N_k \quad (2.102)$$

Indicando con el superíndice 0 el valor de una función para  $\varrho = \varrho_0$ , se tiene

$$A_k = \alpha_k R_k^{(0)} S_k^{(0)} \quad (2.103)$$

Entonces, la función

$$U_i = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k S_k^{(0)} M_k N_k \quad (2.104)$$

será la función armónica en el interior de  $E_0$ , que toma en este elipsoide el valor  $U_0$ . Por otra parte

$$U_e = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k^{(0)} S_k M_k N_k \quad (2.105)$$

es una función armónica en el espacio exterior a  $E_0$  y  $U_e = U_0$  en  $E_0$ .

Supongamos que

$$U_k^{(i)} = \alpha_k S_k^{(0)} R_k M_k N_k \quad , \quad U_k^{(e)} = \alpha_k R_k^{(0)} S_k M_k N_k \quad (2.106)$$

Es obvio que estas funciones satisfacen la condición  $U_k^{(i)} = U_k^{(e)}$  en  $E_0$ . También se da que

$$\frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial \vec{n}} + h_k \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (2.107)$$

si se pone

$$h_k = - \frac{S_k^{(0)} \left( \frac{\partial R_k}{\partial \varrho} \right)_0}{R_k^{(0)} \left( \frac{\partial R_k}{\partial \varrho} \right)_0} \quad (2.108)$$

Con lo que  $U_k$  son las funciones fundamentales para  $E_0$ .

### 2.3.2. Figuras de equilibrio que difieren poco de los elipsoides

Ahora se va a calcular el potencial de una capa de un elipsoide homogéneo en términos de las funciones de *Lamé*. Se supone que su espesor variable es  $\zeta$  y su densidad constante  $\rho = 1$ . El elemento de masa  $\zeta d\sigma$  puede ser interpretado como un producto de  $d\sigma$  por la densidad de superficie  $\zeta$ . Entonces se tiene la condición para la discontinuidad de la fuerza en la capa simple

$$\frac{\partial U_i}{\partial \vec{n}_i} + \frac{\partial U_e}{\partial \vec{n}_e} = -4\pi\zeta \quad (2.109)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (2.104), (2.105) para las funciones  $U_i$  y  $U_e$ , se pueden escribir sus derivadas normales en la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial \vec{n}_i} &= \frac{\partial U_i}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k S_k^{(0)} \frac{dR_k}{du} M_k N_k \frac{du}{d\vec{n}_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_0 l_0 S_k^{(0)} \frac{dR_k}{du} M_k N_k \\ \frac{\partial U_e}{\partial \vec{n}_e} &= \frac{\partial U_e}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}_e} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k^{(0)} \frac{dS_k}{du} M_k N_k \frac{du}{d\vec{n}_e} = - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_0 l_0 R_k^{(0)} \frac{dS_k}{du} M_k N_k \end{aligned}$$

donde  $l_0$  es el valor de  $l$  en  $\varrho = \varrho_0$  y  $u$  el parámetro que se introduce en la ecuación diferencial de *Lamé* (2.96).

Así, de (2.109), se obtiene de las expresiones para las derivadas normales de  $U_i$  y  $U_e$  que

$$-4\pi\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k l_0 M_k N_k \left[ S_k \frac{dR_k}{du} - R_k \frac{dS_k}{du} \right]_{\rho=\rho_0} \quad (2.110)$$

De (2.97) se obtiene

$$\zeta = l_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \alpha_k M_k N_k = l_0 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k M_k N_k \quad (2.111)$$

donde

$$\beta_k = \frac{2n+1}{4\pi} \alpha_k \quad (2.112)$$

Si

$$\hat{U} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k^{(0)} S_k^{(0)} M_k N_k \quad (2.113)$$

es una función dada, los coeficientes  $\alpha_k$  son conocidos. Entonces, también lo son los  $\beta_k$  y se pueden calcular productos de los coeficientes de *Lamé* en (2.111) y viceversa.

Si los coeficientes  $C$  de (2.98) están determinados, se puede dar una relación entre coordenadas cartesianas y elípticas de la forma

$$x = h_1 R_1 M_1 N_1 \quad , \quad y = h_2 R_2 M_2 N_2 \quad , \quad z = h_3 R_3 M_3 N_3 \quad (2.114)$$

donde

$$h_1^2 = \frac{1}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \quad , \quad h_2^2 = \frac{1}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} \quad , \quad h_3^2 = \frac{1}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \quad (2.115)$$

El volumen de un elipsoide también puede darse en términos de funciones  $R_i$ . Es decir,

$$V = \frac{4\pi}{3} R_1 R_2 R_3 = \frac{4\pi}{3} R_1 R_4 = \frac{4\pi}{3} R_2 R_5 = \frac{4\pi}{3} R_3 R_6 \quad (2.116)$$

Por otro lado, la dirección de la normal a un elipsoide  $E$  viene determinada por

$$\cos(nx) = h_1 l M_1 N_1 R_4 \quad , \quad \cos(ny) = h_2 l M_2 N_2 R_5 \quad , \quad \cos(nz) = h_3 l M_3 N_3 R_6 \quad (2.117)$$

Si  $U_E$  es el potencial de un elipsoide dado  $E$  y  $U'$  el de la capa en este elipsoide que tiene de espesor  $\zeta$ , la suma  $U_E + U'$  representará el potencial del elipsoide deformado. Para un fluido incompresible, el espesor de esta capa estará sujeto a la condición

$$\int_S \zeta d\sigma = 0 \quad (2.118)$$

Para expresar el potencial de un elipsoide en términos de funciones de *Lamé*, *Poincaré* dedujo primero la siguiente fórmula para el caso de que un elipsoide fuera desplazado en la dirección  $x$  (y de una forma similar en las otras direcciones). De (2.117)

$$\zeta = \varepsilon \cos(nx) = \varepsilon h_1 l_0 R_4^0 M_1 N_1$$



Si el espesor de la capa se reduce a un término en (2.111), su potencial también viene representado por un único término ( $n = 1$ )

$$\frac{4\pi}{3} \varepsilon h_1 R_1^0 S_1^0 R_4^0 M_1 N_1 = U' \quad (2.119)$$

Ahora, el cambio en el potencial del elipsoide a causa del desplazamiento es

$$U_{E_2} - U_{E_1} = U' = -\varepsilon \frac{\partial U_E}{\partial x} \quad (2.120)$$

ya que en la segunda posición la misma partícula tiene la coordenada  $x - \varepsilon$  respecto al punto  $P$  donde se considera el valor del potencial.

De (2.114), (2.119) y (2.120)

$$\frac{\partial U_E}{\partial x} = -\frac{4\pi}{3} R_4^{(0)} S_1^{(0)} x = -V \frac{S_1^{(0)}}{R_1^{(0)}} x \quad (2.121)$$

y análogamente

$$\frac{\partial U_E}{\partial y} = -V \frac{S_2^{(0)}}{R_2^{(0)}} y, \quad \frac{\partial U_E}{\partial z} = -V \frac{S_3^{(0)}}{R_3^{(0)}} z \quad (2.122)$$

Entonces, en un punto interior del elipsoide, el potencial es

$$U_{E_i} = -\frac{V}{2} \left( \frac{S_1^{(0)}}{R_1^{(0)}} x^2 + \frac{S_2^{(0)}}{R_2^{(0)}} y^2 + \frac{S_3^{(0)}}{R_3^{(0)}} z^2 \right) \quad (2.123)$$

Para los puntos exteriores se puede probar que

$$\frac{\partial U_E}{\partial x} = -V \frac{S_1}{R_1} x, \quad \frac{\partial U_E}{\partial y} = -V \frac{S_2}{R_2} y, \quad \frac{\partial U_E}{\partial z} = -V \frac{S_3}{R_3} z \quad (2.124)$$

Debido a las notaciones usadas en esta sección, el eje  $x$  corresponde al eje menor del elipsoide y, por lo tanto, en la ecuación (2.7) los ejes  $x$  y  $z$  se han de intercambiar. Se puede escribir  $s^2 = y^2 + z^2$  y sustituir en esta ecuación la expresión (2.123) para el potencial. Entonces, tomando  $G = 1$ , se obtiene

$$-V \frac{S_1^{(0)}}{R_1^{(0)}} x^2 + \left( \omega^2 - V \frac{S_2^{(0)}}{R_2^{(0)}} \right) y^2 + \left( \omega^2 - V \frac{S_3^{(0)}}{R_3^{(0)}} \right) z^2 - Cte = 0 \quad (2.125)$$

La ecuación del elipsoide  $E_0(\varrho = \varrho_0)$  también se puede escribir en la forma

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{R_1^{(0)2}} + \frac{y^2}{R_2^{(0)2}} + \frac{z^2}{R_3^{(0)2}} - 1 = 0 \quad (2.126)$$

Si este elipsoide es una figura de equilibrio, las ecuaciones (2.125) y (2.126) representan la misma superficie y se obtienen las condiciones (omitiendo el superíndice)

$$\frac{\omega^2}{V} = \frac{S_2 R_2 - S_1 R_1}{R_2^2} \quad (2.127)$$

y

$$\frac{S_2 R_2 - S_1 R_1}{R_2^2} = \frac{S_3 R_3 - S_1 R_1}{R_3^2} \quad (2.128)$$

Si son conocidos el volumen  $V$  y la velocidad angular  $\omega$ , estas dos condiciones, junto con (2.116) determinarán la longitud de los ejes del elipsoide, ya que  $R$  y  $S$  son funciones de los semiejes. En el caso del elipsoide de *MacLaurin* se da  $R_2 = R_3$  y se tienen sólo dos ecuaciones: (2.116) y (2.127). De la ecuación (2.128) que se tiene que utilizar para los elipsoides de *Jacobi*, se puede obtener la condición

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_4 S_4}{5} \quad (2.129)$$

Se puede probar que esta condición es equivalente a la dada por (2.98) [74].

Ahora se pasará a discutir la existencia de otras figuras de equilibrio que no sean estos elipsoides. Suponiendo que las nuevas figuras de equilibrio difieran poco de un elipsoide de *MacLaurin* o de *Jacobi*, se puede representar tal figura ( $E$ ), como se mencionó anteriormente, como un elipsoide  $E$  recubierto por una capa de espesor variable  $\zeta$ . Obviamente, éste puede tener valores positivos y negativos. La condición  $U_0 + \frac{1}{2}\omega^2(y_0^2 + z_0^2) = Cte = \Pi_0$  se mantiene para cada punto  $P$  de  $E$ , si este elipsoide es una figura de equilibrio. Por lo tanto, en un punto  $P'$ , en un entorno de  $P$ , se puede escribir

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{n}} \zeta \quad (2.130)$$

y, poniendo

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{n}} = -\vec{g} \quad (2.131)$$

llamando  $\vec{g}$  a la aceleración de la gravedad, se tiene

$$\Pi = \Pi_0 - \vec{g}\zeta$$

Ahora,  $U'$  es el potencial de una capa elipsoidal y si  $E'$  es una figura de equilibrio, se tiene la condición

$$\Pi + U' = \Pi_0 - \vec{g}\zeta + U' = Cte$$

en esta superficie, o

$$U' = -\vec{g}\zeta = Cte \quad (2.132)$$

El espesor  $\zeta$  que determinará la deformación o la desviación de la nueva figura respecto del elipsoide, puede ser representado por el desarrollo en serie

$$\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} l_0 \beta_k M_k N_k \quad (2.133)$$

Sustituyendo estas series en la ecuación (2.120) se obtiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \int_S l_0 M_k N_k d\sigma = 0$$

Debido a las propiedades de las funciones de *Lamé* (véase, por ejemplo, [5], IV, p. 159), todas estas integrales son iguales a cero para  $k > 0$ . Así, el coeficiente  $\beta_0$  también debe anularse y se obtiene

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} l_0 \beta_k M_k N_k \quad (2.134)$$

De (2.111), (2.112) y (2.113) se obtiene

$$U'^{(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k S_k^{(0)} R_k^{(0)} M_k N_k \quad , \quad \alpha_k = \frac{4\pi}{2n+1} \beta_k \quad (2.135)$$

El valor de la aceleración de la gravedad  $\vec{g}$  en el polo ( $y = 0, z = 0$ ) es, de (2.123), (2.126) y (2.131)

$$\vec{g} = V \frac{S_1^{(0)}}{R_1^{(0)}} x = V S_1^{(0)} \quad (2.136)$$

y

$$l_0 \vec{g} = \frac{V S_1^{(0)}}{R_2^{(0)} R_3^{(0)}} = \frac{4\pi}{3} R_1^{(0)} S_1^{(0)} \quad (2.137)$$

Sustituyendo (2.134), (2.135) y (2.137) en (2.132), esta condición toma la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4\pi\beta_k \left( \frac{S_k R_k}{2n+1} - \frac{S_1 R_1}{3} \right) M_k N_k = Cte \quad (2.138)$$

En esta aproximación se considera  $\vec{g}$  constante. En la ecuación (2.138), los productos  $M_k N_k$  son variables, pero la ecuación se satisface en cada punto, es decir, para cada par de coordenadas  $\mu$  y  $\nu$ . Por lo tanto, tiene que ser

$$\beta_k \left( \frac{S_k R_k}{2n+1} - \frac{S_1 R_1}{3} \right) = 0 \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad , \quad Cte = 0 \quad (2.139)$$

Estas condiciones son básicas en la teoría de *Poincaré*. Éstas también se dieron sin los factores  $\beta_k$  en el primer artículo de *Liapounov*.

Los factores  $\beta_k$  son coeficientes en las series que representan la función  $\zeta$  (2.134). Pueden diferir de cero, de (2.139), sólo si el segundo factor se anula. Considerando este factor se tiene:

1. Si  $n = 1$  y  $k = 1$  el coeficiente  $\beta_1$  puede diferir de cero, ya que el segundo factor de (2.139) se anula. Este caso no presenta ningún interés, debido a que  $\beta_1$  da el desplazamiento del elipsoide completo en la dirección  $x$ .
2. En los casos,  $n = 1$  y  $k = 2$  o  $k = 3$  los coeficientes  $\beta_k$  pueden anularse a causa de (2.127) y (2.128).
3. Si  $n = 2$  y  $k = 4$ ,  $\beta_4$  puede ser diferente de cero, ya que la condición (2.129) se mantiene para los elipsoides de *Jacobi*. Pero este caso tampoco es importante porque el valor de  $\beta_4$  sólo da una rotación pura del elipsoide.

Así, cabe esperar nuevas figuras para  $k = 5$  o para valores superiores. Para responder a la cuestión de que si habrá nuevas figuras de equilibrio, *Poincaré* investigó la expresión más general

$$F = \frac{R_k S_k}{2n+1} - \frac{R_i S_i}{2p+1} \quad (2.140)$$

en la que  $i \neq k$  y  $p$  puede ser igual a  $n$ , y la función

$$F_1 = \frac{F}{R_k^2} = \frac{1}{2n+1} \frac{S_k}{R_k} - \frac{1}{2p+1} \frac{S_i}{R_i} \left( \frac{R_i}{R_k} \right)^2 \quad (2.141)$$

Esta función depende del parámetro  $\varrho^2$  con variación en el intervalo  $(\infty, a^2)$  y el problema se reduce a la existencia de ceros de  $F_1$ . Un detallado estudio de la función (2.141) muestra que, para  $m = 2$  y  $k = 5$ ,  $k = 6$  o  $k = 7$ ,  $i = p = 1$  no hay ceros y, por lo tanto, no hay nuevas figuras de equilibrio. En el caso  $k = 8$  se tiene el punto de bifurcación para los elipsoides de *MacLaurin* y *Jacobi*.

Las primeras nuevas figuras de equilibrio se obtienen para  $n = 3$  y  $n = 4$ . En general, para encontrar nuevas figuras de este tipo, los coeficientes  $\beta_k$  que no se anulan y, por lo tanto,  $\zeta \neq 0$ , se tienen que utilizar las funciones de *Lamé* de un nuevo tipo. Estas funciones se pueden escribir en la forma

$$f(\varrho^2) \quad , \quad \sqrt{\varrho^2 - b^2}f(\varrho^2) \quad , \quad \sqrt{\varrho^2 - c^2}f(\varrho^2) \quad , \quad \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}f(\varrho^2) \quad (2.142)$$

donde  $f(\varrho^2)$  es una función polinómica de grado  $k$ . Sus ceros se encuentran entre  $c^2$  y  $a^2$ . Sea  $\alpha$  la raíz mayor. Entonces, se puede poner

$$f(\varrho^2) = (\varrho^2 - \alpha)(\varrho^2 - \alpha_1) \cdots (\varrho^2 - \alpha_{k-1}) \quad (2.143)$$

El número  $n$  puede ser igual a  $2k$  o a  $2k + 1$ .

Tan sólo se escribirán las ecuaciones para dos figuras de mínimo orden:

1. Si  $n = 3$

$$\frac{\zeta}{l_0} = \varepsilon' z \left( \frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1 \right) \quad , \quad \text{donde } \varepsilon' = \text{Cte} \quad (2.144)$$

Esta es la llamada figura ovoidea o en forma de pera.

2. Si  $n = 4$

$$\frac{\zeta}{l_0} = \varepsilon' \left( \frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_1 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_1 - c^2} - 1 \right) \left( \frac{x^2}{\alpha_2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_2 - c^2} - 1 \right) \quad (2.145)$$

La constante  $\varepsilon'$  puede ser tanto positiva como negativa y, por lo tanto, se pueden determinar dos nuevas figuras de equilibrio a partir de esta ecuación.

Estos ejemplos y el análisis general muestran que, en general, en la expresión de  $\zeta$  hay tantos factores de la forma

$$E_i = \frac{x^2}{\alpha_i - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_i - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_i - c^2} - 1$$

como ceros tiene la función  $R_k$ . Así, en general, es

$$\zeta = \begin{cases} l_0 \varepsilon' E_1 E_2 \cdots E_k & \text{si } n = 2k \\ l_0 \varepsilon' z E_1 E_2 \cdots E_k & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (2.146)$$

Las condiciones que se han expuesto aquí también se mantienen para los elipsoides de *Jacobi*. Las condiciones de la existencia de nuevas figuras de equilibrio que difieran poco de los elipsoides de *MacLaurin* toman una forma diferente. Sean  $n$  y  $k$  dos números pares o impares a la vez. Entonces, haciendo

$$\frac{z}{y} = \tan \psi \quad , \quad \sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{a^2 - c^2}} = \cos \theta = \bar{\mu} \quad (2.147)$$

se puede hacer uso del hecho de que, los productos de *Lamé*, en el caso de elipsoides de revolución, determinan los armónicos esféricos. Por lo que

$$\zeta = l_0 (\beta_k P_{n,k}(\bar{\mu}) \cos k\psi + \beta_{k'} P_{n,k}(\bar{\mu}) \sin k\psi) \quad (2.148)$$

Poniendo  $\beta_{k'} = \beta_k \tan \bar{\omega}$ , esta ecuación toma la forma siguiente

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{\beta_k}{\cos \bar{\omega}} P_{n,k}(\bar{\mu}) \cos(k\psi - \bar{\omega}) \quad (2.149)$$

Se puede apreciar que los ejes de coordenadas pueden rotar para que el ángulo  $\bar{\omega}$  sea igual a cero. Entonces, (2.139) toma la forma

$$\zeta = l_0 \beta_k P_{n,k}(\bar{\mu}) \cos k\psi \quad (2.150)$$

y para  $0 < k < n$  determinará un nuevo grupo de figuras de equilibrio que diferirán poco de los elipsoides de *MacLaurin*.

### 2.3.3. Estabilidad de las figuras de equilibrio

Atendiendo a la discusión general sobre el equilibrio dada por [85], se tienen que considerar fuerzas de tres tipos:

1. Hay fuerzas que se tienen en cuenta normalmente, como la gravitación universal, que dependen sólo de las coordenadas de las partículas. Representan un sistema de fuerzas conservativas.
2. Si una masa fluida está en equilibrio, sus ecuaciones correspondientes son las mismas para un líquido ideal o para uno viscoso. No obstante, si suponemos que una masa viscosa se deforma, el nuevo estado diferirá, incluso poco, de un equilibrio. Estas fuerzas dependen de velocidades. Este caso representa un sistema disipativo.

3. Para la mayor parte de las figuras consideradas, el equilibrio se define respecto a un conjunto de ejes móviles. Este tipo de fuerzas se representan por la fuerza centrífuga y la de *Coriolis*. Para estas fuerzas *Thomson* y *Tait* [85] utilizaron el nombre de fuerzas giroscópicas.

Las afirmaciones básicas referentes a la influencia de la introducción, en condiciones de equilibrio, de un nuevo tipo de fuerzas, son las que se indican a continuación:

- Un equilibrio inestable producido por fuerzas conservativas únicamente puede ser transformado, bajo ciertas condiciones, en un equilibrio estable si también se introducen las fuerzas giroscópicas.
- El tipo de equilibrio que existe bajo la acción de fuerzas conservativas únicamente se mantendrá si son introducidas fuerzas de los otros dos tipos.
- Si el equilibrio es estable cuando actúan los tres tipos de fuerzas, la eliminación de las fuerzas disipativas y las giroscópicas no afecta al tipo de equilibrio.

## 2.4. Método de *Liapounov*

### 2.4.1. Potencial de un cuerpo en el que la estratificación difiere poco de un elipsoide

La solución de un problema relativo a las figuras de equilibrio de una masa fluida depende de las series del desarrollo del potencial de esta masa. Como ya se ha mencionado anteriormente, la teoría de *Clairaut* no puede extenderse más allá de la primera aproximación. A pesar de que los métodos de *Laplace* y *Legendre* dieron alguna aproximación deseable de manera formal, la convergencia de las series utilizadas dejaba una cuestión abierta. Ni *Poisson* ni *Callandreaux* pudieron hacer progresos importantes con sus investigaciones. Incluso el grado de precisión que se podía obtener con el método de *Poincaré* no era lo suficientemente satisfactorio, tal y como indicó *Liapounov*.

No obstante, *Liapounov*, desarrolló un nuevo método de aproximación al problema. Después de más de treinta años de investigación en este campo dió la forma final del método en su último trabajo [58]. Se debe hacer notar que las conclusiones no están restringidas por la suposición que las desviaciones de la estructura elipsoidal que se tendrán en cuenta sean infinitamente

pequeñas. Pueden tener infinitos valores y, también en este sentido, el método de *Liapounov* es superior a otros métodos.

Actualmente, se utilizan las notaciones de *Liapounov* para escribir la expresión del potencial de un cuerpo cuya estratificación difiere poco del que se da para un grupo de superficies de elipsoides.

Sea  $E(\sqrt{\tau+1}, \sqrt{\tau+q}, \sqrt{\tau})$  o bien al conjunto de elipsoides de *MacLaurin* ( $q=1$ ) o bien al conjunto de elipsoides de *Jacobi* ( $q < 1$ ). Entonces,

$$E_a(a\sqrt{\tau+1}, a\sqrt{\tau+q}, a\sqrt{\tau})$$

representa un conjunto de elipsoides similares y concéntricos a  $E$ . Supongamos que en un cuerpo dado  $B$  las superficies de la misma densidad difieren poco de los elipsoides  $E_a$  y que la densidad disminuye del centro del cuerpo hacia la superficie libre. Se supone que la variación de la densidad es pequeña y que la ley de las densidades viene dada por

$$\rho = 1 + \delta \varphi(a) \quad (2.151)$$

en la que  $\varphi$  es una función dada del parámetro  $a$ . Este parámetro determinará las superficies de la misma densidad ( $\rho = Cte$ );  $\delta$  es un segundo parámetro que toma valores pequeños. Para el caso de un cuerpo homogéneo basta con tomar  $\delta = 0$  y  $\rho = Cte$ . Obviamente, al parámetro  $a$  se le pueden dar diferentes interpretaciones. Aquí se supondrá que  $a$  viene determinado por la condición de que el volumen del espacio encerrado por la superficie de nivel  $a = a_k$  es igual a la del elipsoide  $E_{a_k}$ . En el centro del cuerpo  $a = 0$  y en la superficie libre  $F$  de  $B$   $a = 1$ .

Si  $\varphi(0) = 0$ , la densidad al centro es  $\rho_0 = 1$ . La forma (2.151) la escogió *Liapounov* para hacer más fácil la aplicación del desarrollo de las series obtenidas para un elipsoide homogéneo en el problema relativo a una masa heterogénea.

En general, no obstante, se puede suponer que

$$\rho = \varphi(a, \delta)$$

y, desarrollando esta función en serie de potencias, respecto del parámetro  $\delta$ , se obtiene

$$\rho = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \varphi_k(a)$$



Los resultados de las investigaciones de *Liapounov* pueden ser fácilmente generalizables por su ley de densidades añadiendo términos correspondientes a la suma  $\sum_{k=2}^{\infty} \delta^k \varphi_k$ .

Ahora, de acuerdo con *Liapounov*, las superficies de nivel  $F_a$  se pueden representar por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= a(1 + \zeta)\sqrt{\tau + 1} \sin \theta \cos \lambda \\ y &= a(1 + \zeta)\sqrt{\tau + q} \sin \theta \sin \lambda \\ z &= a(1 + \zeta)\sqrt{\tau} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.152)$$

donde  $\theta$  y  $\lambda$  son coordenadas esféricas. La función  $\zeta$  debe tener valores pequeños de acuerdo con las suposiciones que se acaban de hacer. En general, la fórmula (2.152) determinará la posición de cada punto en el espacio si  $0 \leq a \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ . A cada función  $\zeta(a, \theta, \lambda)$  le corresponde un conjunto de superficies  $F_a$ . En la superficie libre  $F$  es

$$\zeta(1, \theta, \lambda) = \bar{\zeta}(\theta, \lambda) = \bar{\zeta} \quad (2.153)$$

Si suponemos que para cada par de valores de los ángulos  $\theta$  y  $\lambda$  corresponde un único valor de  $\zeta$  y el coeficiente diferencial  $\frac{\partial \zeta}{\partial a}$  existe, las ecuaciones (2.152) determinan, para un elemento de volumen,

$$dV = a^2 \sqrt{\tau(\tau + q)(\tau + 1)} (1 + \zeta)^2 \left( 1 + \frac{\partial(a\zeta)}{\partial a} \right) \sin \theta da d\theta d\lambda \quad (2.154)$$

Poniendo ahora

$$D = \sqrt{\tau(\tau + q)(\tau + 1)} \quad , \quad d\sigma = \sin \theta d\theta d\lambda \quad (2.155)$$

Como, por la definición del parámetro  $a$  los volúmenes  $E_a$  y  $F_a$  tienen que ser iguales, se tiene que

$$D \int_0^a a^2 da \int_{\sigma} (1 + \zeta)^2 \left( 1 + \frac{\partial(a\zeta)}{\partial a} \right) d\sigma = \frac{D}{3} a^3 \int_{\sigma} (1 + \zeta)^3 d\sigma = \frac{4\pi a^3}{3} \sqrt{\tau(\tau + q)(\tau + 1)}$$

De (2.155) se deriva que  $\int_{\sigma} (1 + \zeta)^3 d\sigma = 4\pi$  y, por lo tanto, se obtiene la primera condición para la función  $\zeta$  en la forma

$$\int_{\sigma} \zeta d\sigma = - \int_{\sigma} \zeta^2 d\sigma - \frac{1}{3} \int_{\sigma} \zeta^3 d\sigma \quad (2.156)$$

Sea  $\Omega$  el potencial en el punto  $M(x, y, z)$ . En  $M'(x', y', z')$  se tiene

$$\Omega = G \int_{V'} \frac{\rho' dV'}{\Delta}$$

donde  $\Delta = MM'$ . Sustituyendo (2.154) y (2.155) se obtiene

$$\Omega = GD \int_0^1 \rho' a'^2 da' \int_{\sigma'} \frac{(1 + \zeta')^2 \left(1 + \frac{\partial(a'\zeta')}{\partial a'}\right) d\sigma'}{\Delta} \quad (2.157)$$

Para resolver el problema será necesario desarrollar en serie este potencial. Entonces, la función  $\zeta$  tiene que estar sujeta a unas determinadas condiciones. *Liapounov* supone primero que esta función puede desarrollarse en serie de potencias respecto del parámetro  $\delta$ .

Sean  $l(\delta)$  y  $g(\delta)$  dos números variables que no dependen de  $a, a', \theta, \theta', \lambda, \lambda'$  y se anulan para  $\delta = 0$ . Sea

$$(\Delta)_{\zeta=\zeta'=0} = \Delta_0 \quad (2.158)$$

Entonces, las otras dos condiciones introducidas por *Liapounov* para  $\zeta$  son

$$|\zeta| < l \quad , \quad \frac{\sqrt{\tau+1}(a+a')}{2} \frac{|\zeta' - \zeta|}{\Delta_0} < g \quad (2.159)$$

Como  $\zeta$  no es una función dada, la existencia de esos dos números tendría que ser probada y eso es lo que hizo *Liapounov* después de una evaluación formal de  $\zeta$ .

Es conveniente introducir una nueva variable  $\xi$  en lugar de  $\zeta'$  utilizando la definición

$$\xi = \frac{\zeta' - \zeta}{1 + \zeta} \quad (2.160)$$

De aquí

$$\frac{1 + \zeta'}{1 + \zeta} = 1 + \xi \quad , \quad (1 + \zeta)^{-1} \left(1 + \frac{\partial(a'\zeta')}{\partial a'}\right) = 1 + \frac{\partial(a'\xi)}{\partial a'} \quad (2.161)$$

De (2.152) se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{(x-x')^2 + \dots} \\ &= \sqrt{(\tau+1)[a(1+\zeta)\sin\theta\cos\lambda - a'(1+\zeta')\sin\theta'\cos\lambda']^2 + \dots} \\ &= (1+\zeta)\sqrt{(\tau+1)[a\sin\theta\cos\lambda - a'(1+\xi)\sin\theta'\cos\lambda']^2 + (\tau+q)[\dots]^2 + \tau[\dots]^2} \end{aligned} \quad (2.162)$$

Poniendo  $a'(1 + \xi) = b$  y  $\Delta(a, b)$  para el segundo factor de (2.162) y, utilizando las nuevas notaciones, se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta &= (1 + \zeta)\Delta(a, b) = \Delta(a + a\zeta, a' + a'\zeta') = \Delta(\zeta, \zeta') \\ \Delta(a, a') &= \Delta[0, 0] = \Delta_0\end{aligned}$$

Ahora, el potencial  $\Omega$  expresado en términos de la nueva variable  $\xi$  queda

$$\begin{aligned}\Omega &= GD(1 + \zeta)^2 \int_0^1 \rho' da' \int_{\sigma'} \frac{a'^2(1 + \xi)^2 \left(1 + \frac{\partial(a'\xi)}{\partial a'}\right) d\sigma'}{\Delta(a, b)} \\ &= GD(1 + \zeta)^2 \int_0^1 \rho' da' \int_{\sigma'} \left(1 + \frac{\partial(a'\xi)}{\partial a'}\right) \frac{b^2 d\sigma'}{\Delta(a, b)}\end{aligned}\tag{2.163}$$

Para desarrollar en serie de potencias la integral de superficie relacionada aquí, se tendrá en cuenta que [58]

$$\int_{\sigma'} \frac{b^2 d\sigma'}{\Delta(a, b)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'^n}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial b^n} \int_{\sigma'} \frac{b^2 \xi^n d\sigma'}{\Delta(a, b)} \right\}_{b=a'}$$

ya que  $b = a' + a'\xi$ , y que

$$\int_{\sigma'} \frac{b^2 \frac{\partial(a'\xi)}{\partial a'}}{\Delta(a, b)} d\sigma' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'^2}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial b^n} \int_{\sigma'} \frac{b^2 \xi^n \frac{\partial(a'\xi)}{\partial a'}}{\Delta(a, b)} d\sigma' \right\}_{b=a'}$$

Es

$$\frac{a'^n \xi^n}{n!} \frac{\partial(a'\xi)}{\partial a'} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial(a'\xi)^{n+1}}{\partial a'}$$

y, por lo tanto, la superficie integral en (2.163) es

$$J = \int_{\sigma'} \frac{a'^2 d\sigma'}{\Delta(a, a')} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}} \int_{\sigma'} \frac{a'^n \xi^n b^2 d\sigma'}{\Delta(a, b)} \right\}_{b=a'}$$

Sustituyendo la variable  $\zeta'$  otra vez, esta expresión toma la forma

$$\begin{aligned}J &= \int_{\sigma'} \frac{a'^2 d\sigma'}{\Delta(a, a')} + \frac{1}{1 + \zeta} \int_{\sigma'} \frac{a'^3 (\zeta' - \zeta) d\sigma'}{\Delta(a, a')} + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1 + \zeta)^n} \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}} \int_{\sigma'} \frac{a'^n (\zeta' - \zeta)^n b^2 d\sigma'}{\Delta(a, b)} \right\}_{b=a'}\end{aligned}$$

Así, (2.163) se transforma en la ecuación

$$\begin{aligned}
\Omega = & GD(1 + \zeta)^2 \int_0^1 \rho' da' \int_{\sigma'} \frac{a'^2 d\sigma'}{\Delta(a, a')} + \\
& + GD(1 + \zeta) \int_0^1 \rho' da' \frac{\partial}{\partial a'} \int_{\sigma'} \frac{a'^3 (\zeta' - \zeta) d\sigma'}{\Delta(a, a')} + \\
& + GD \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + \zeta)^{2-n}}{n!} \int_0^1 \rho' da' \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}} \int_{\sigma'} \frac{a'^n (\zeta' - \zeta)^n b^2 d\sigma'}{\Delta(a, b)} \right\}_{b=a'}
\end{aligned} \tag{2.164}$$

y poniendo

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 + \dots \tag{2.165}$$

los términos de esta serie vienen dados por las expresiones

$$\begin{aligned}
\Omega_0 = & GD \int_0^1 a'^2 \rho' da' \int_{\sigma'} \frac{d\sigma'}{\Delta(a, a')} \\
\Omega_1 = & 2\zeta\Omega_0 + GD \int_0^1 \rho' da' \frac{\partial}{\partial a'} \int_{\sigma'} \frac{a'^3 (\zeta' - \zeta) d\sigma'}{\Delta(a, a')} \\
\Omega_2 = & \zeta^2\Omega_0 + \zeta GD \int_0^1 \rho' da' \frac{\partial}{\partial a'} \int_{\sigma'} \frac{a'^3 (\zeta' - \zeta) d\sigma'}{\Delta(a, a')} + \\
& + \frac{GD}{2} \int_0^1 \rho' da' \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \frac{\partial}{\partial b} \int_{\sigma'} \frac{a'^2 (\zeta' - \zeta)^2 b^2 d\sigma'}{\Delta(a, b)} \right\}_{b=a'}
\end{aligned} \tag{2.166}$$

Los valores de estos términos en el centro del elipsoide ( $a = 0$ ) son

$$\begin{aligned}
\Omega_0 = & GD \int_0^1 \rho' a'^2 da' \int_{\sigma'} \frac{d\sigma'}{\Delta(0, a')} \\
\Omega_1 = & GD \int_0^1 \rho' da' \frac{\partial}{\partial a'} \int_{\sigma'} \frac{a'^3 \zeta' d\sigma'}{\Delta(0, a')}
\end{aligned} \tag{2.167}$$

Para  $n > 2$  es  $\Omega_n(0) = 0$ .

*Liapounov* demostró que (2.165) es una serie absolutamente y uniformemente convergente si se satisfacen las condiciones (2.159) y si

$$l + g < 1 \tag{2.168}$$

El primer término en (2.165),  $\Omega_0$ , es el potencial de un elipsoide  $E$  en el que los elipsoides  $E_a$  son superficies de la misma densidad.

Bajo las condiciones (2.159) y (2.168), la expresión  $\frac{\Omega' - \hat{\Omega}}{\Delta}$ , también se puede desarrollar en una serie de potencias que converja absolutamente y uniformemente. Es importante recalcar que, en todos estos desarrollos, no se tiene por qué suponer que, tanto  $\zeta$  como  $\delta$  sean infinitamente pequeñas.

### 2.4.2. Ecuación integral de *Liapounov*

El desarrollo de la teoría de *Liapounov* está basado en la solución de la ecuación integral

$$\xi - \nu \int_{\Sigma} \frac{\xi' d\sigma'}{\Delta} = \Xi \quad (2.169)$$

donde  $\xi$  es función de dos coordenadas esféricas,  $\theta$  y  $\lambda$ , y  $\Xi$  es una función continua dada de estas variables. Supongamos que  $\Xi$  depende únicamente de  $\theta$  y  $\lambda$ .  $\Delta$  es la distancia entre los puntos  $M(\theta, \lambda)$  y  $M'(\theta', \lambda')$  del elipsoide  $E$  y la integración se efectúa sobre la esfera unidad  $\Sigma$ . Sustituyendo en (2.162)  $\zeta = \zeta' = 0$  y  $a = a' = 1$  se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta^2 = & (\tau + 1)[\sin \theta \cos \lambda - \sin \theta' \cos \lambda']^2 + \\ & + (\tau + q)[\sin \theta \sin \lambda - \sin \theta' \sin \lambda']^2 + \tau[\cos \theta - \cos \theta']^2 \end{aligned} \quad (2.170)$$

Para resolver la ecuación no homogénea lineal-integral (2.169) se tiene que utilizar la ecuación homogénea de *Liouville* [41].

Si la función  $\Xi$  es continua,  $\xi$  también lo será. Ahora, la ecuación (2.169) tendrá solución si la función cumple ciertas condiciones. Para obtener estas condiciones se multiplica (2.169) por  $Y_{n,s} d\sigma$  y se integra el producto sobre la esfera unidad. Entonces, se obtiene

$$\int \xi Y_{n,s} d\sigma - \nu \int Y_{n,s} d\sigma \int \frac{\xi' d\sigma'}{\Delta} = \int \Xi Y_{n,s} d\sigma$$

Cambiando el orden de integración en el segundo término se tiene

$$-\nu \int \xi' d\sigma' \int \frac{Y_{n,s} d\sigma}{\Delta}$$

Como la expresión (2.170) es simétrica respecto de las variables

$$-\nu \int \xi' \frac{Y'_{n,s}}{\nu_{n,s}} d\sigma' = -\frac{\nu}{\nu_{n,s}} \int \xi Y_{n,s} d\sigma$$

con

$$\nu_{n,s} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{1}{RS} \quad (2.171)$$

De ahí que

$$\frac{\nu_{n,s} - \nu}{\nu_{n,s}} \int \xi Y_{n,s} d\sigma = \int \Xi Y_{n,s} d\sigma$$

De (2.171) y

$$\bar{RS} = \frac{\sqrt{\tau}}{\gamma_{n,s}} \int \frac{[P_{n,s}(\bar{\mu}) \cos s\lambda]^2}{\tau + \bar{\mu}^2} d\sigma \quad (2.172)$$

con

$$\gamma_{n,s} = \int [P_{n,s}(\bar{\mu}) \cos s\lambda]^2 d\sigma$$

se obtiene que la expresión

$$T_{n,s} = \frac{\nu_{n,s} - \nu}{\nu_{n,s}} \quad (2.173)$$

depende de  $\tau$ . Entonces, se tiene que

$$T_{n,s} = 0 \quad \text{si} \quad \nu = \nu_{n,s} \quad (2.174)$$

esto es sólo para determinados valores de  $\tau$ . Los elipsoides que corresponden a estos valores son los elipsoides de bifurcación. Para los elipsoides de *MacLaurin* están las condiciones

$$T_{1,0} = 0 \quad , \quad \nu_{1,0} = \nu \quad (2.175)$$

y

$$T_{p,2k} = 0 \quad , \quad T_{p,2k-1} = 0 \quad (2.176)$$

Para los elipsoides de *Jacobi* se requieren otros grupos de condiciones.

Ahora, teniendo en cuenta (2.173) y la ecuación precedente, es fácil ver que la función  $\Xi$  debe satisfacer las condiciones

$$\int \Xi Y_{n,s} d\sigma = 0 \quad (2.177)$$

para todos los valores  $n$  y  $s$  que cumplan las ecuaciones (2.174). Se cumple siempre que

$$\int \Xi Y_{1,0} d\sigma = 0 \quad (2.178)$$

Ahora, se supone que  $\Xi$  se puede desarrollar en series de *Laplace*

$$\Xi = \sum A_{n,s} Y_{n,s} \quad (2.179)$$

que converjan absolutamente y uniformemente. Entonces, es

$$A_{n,s} = \frac{1}{\gamma_{n,s}} \int \Xi Y_{n,s} d\sigma \quad (2.180)$$

con

$$\gamma_{n,s} = \int Y_{n,s}^2 d\sigma \quad (2.181)$$

ya que las funciones  $Y_{n,s}$  son ortogonales. Una solución particular de (2.169) es

$$\xi = \sum \frac{A_{n,s}}{T_{n,s}} Y_{n,s} \quad (2.182)$$

donde el sumatorio se extiende a todos los valores de  $n$  y  $s$ , excepto para aquellos para los que  $T_{n,s} = 0$ . Sustituyendo (2.179) y (2.182) en la ecuación (2.169) se obtiene

$$\sum \left( \frac{A_{n,s}}{T_{n,s}} Y_{n,s} - \frac{\nu A_{n,s}}{T_{n,s}} \int \frac{y'_{n,s} d\sigma'}{\Delta} \right) = \sum A_{n,s} Y_{n,s}$$

o

$$\sum \frac{A_{n,s}}{T_{n,s}} Y_{n,s} \left( 1 - \frac{\nu}{\nu_{n,s}} \right) = \sum A_{n,s} Y_{n,s}$$

Donde esta expresión es una identidad y no una ecuación.

Así, la solución general puede obtenerse sumando los términos que corresponden a las condiciones  $T_{m,r} = 0$  a la solución particular (2.182). Entonces

$$\xi = \sum \frac{A_{n,s}}{T_{n,s}} Y_{n,s} + \sum a_{m,r} Y_{m,r} \quad (2.183)$$

donde  $a_{m,r}$  son constantes arbitrarias, no excediendo de tres. La expresión (2.183) es una solución general. Esto queda probado por el hecho de que una función continua ( $\xi$ ) está completamente determinada si están dados los valores de todas las integrales  $\int \xi Y_{n,s} d\sigma$ . Estas integrales, o bien están determinadas por los coeficientes  $A_{n,s}$  o bien se pueden calcular si suponemos que las constantes  $a_{m,r}$  tienen unos valores definidos. La función (2.182) tiene un valor finito. *Liapounov* también probó que si  $\Xi$  está sujeta a condiciones similares a (2.159) por  $\zeta$ , la función  $\xi$  también satisfará las mismas condiciones.

Representando las coordenadas de un punto de la superficie libre por

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\tau + \zeta + 1} \sin \theta \cos \lambda \\ y &= \sqrt{\tau + \zeta + 1} \sin \theta \sin \lambda \\ z &= \sqrt{\tau + \zeta} \cos \theta \end{aligned}$$

en lugar de (2.152) y suponiendo que  $\zeta$  se puede desarrollar en series  $\sum \zeta_i$ , *Liapounov* obtuvo ecuaciones integrales de la forma (2.169) para las funciones  $\zeta_i$ . La ecuación integral de *Liapounov* (2.169) también ha estado investigada por *Crudeli* [23]. Pudo demostrar que se puede reducir a una ecuación de *Fredholm* de segunda clase teniendo un núcleo finito. *Crudeli* es el único investigador que llamó figuras de equilibrio a las soluciones de esta ecuación de *Liapounov*.

### 2.4.3. Transformación de la ecuación fundamental

Escribiendo las ecuaciones de una superficie de nivel  $F_a$  de forma paramétrica podemos obtener pequeños valores de la función  $\zeta(a, \theta, \lambda)$  si suponemos que la estratificación en una figura de equilibrio difiere poco de la forma elipsoidal. No obstante, en cada caso, la función puede ser expresada en términos de las coordenadas  $x, y, z$ , es decir,

$$\zeta(a, \theta, \lambda) = \zeta^*(x, y, z)$$

Entonces, por (2.152), la ecuación de las superficies de nivel es

$$\frac{x^2}{\tau + 1} + \frac{y^2}{\zeta + q} + \frac{z^2}{\tau} = a^2(1 + \zeta^*)^2 \quad (2.184)$$



y la superficie libre vendrá por

$$\frac{x^2}{\tau + 1} + \frac{y^2}{\zeta + q} + \frac{z^2}{\tau} = (1 + \bar{\zeta}^*)^2 \quad (2.185)$$

donde  $\bar{\zeta}^*$  es el valor de  $\zeta$  en esta superficie y  $a = 1$ .

Como la densidad es una función del parámetro  $a$  y  $\rho = f(P)$ , la presión  $P$  también se puede expresar en términos de este parámetro,  $P = P(a)$ . Por lo tanto, en la ecuación (2.4) el miembro de la derecha es una función de  $a$  y la ecuación de las superficies de nivel que se deriva de las ecuaciones del movimiento del líquido es

$$\Omega + \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2} = \text{funcion}(a) \quad (2.186)$$

El potencial  $\Omega$  se puede desarrollar en series (2.165). Así, el miembro de la izquierda de (2.186) se convierte en una función de  $\zeta$ . Ésta es ahora la ecuación fundamental a partir de la que se puede encontrar la función  $\zeta$ . Dando la ley de densidades en la forma (2.151), una transformación

$$\Omega = \Psi + \delta \Phi \quad (2.187)$$

introducirá dos nuevas expresiones,  $\Psi$  y  $\Phi$ , que pueden ser obtenidas de  $\Omega$ . Para obtener estas funciones, los factores 1 o  $\varphi(a')$ , se han de tomar de (2.157) en lugar de  $\rho'$ . Entonces, si se desarrolla la función  $\Psi$  o  $\Phi$  en series

$$\Psi = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \quad , \quad \Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i \quad (2.188)$$

las funciones  $\Psi$  y  $\Phi$  están determinadas por la fórmula (2.166) donde, obviamente,  $\rho'$  se puede poner igual a 1 o a  $\varphi(a')$ . El primer término  $\Psi_0$ , representa el potencial de un elipsoide homogéneo  $E$ . Ahora, en la segunda ecuación de (2.166), si  $\rho' = 1$  la integración respecto de  $a'$  da

$$\Psi_1 = 2\zeta \Psi_0 + D \int_{\sigma'} \frac{\bar{\zeta}' - \zeta}{\Delta(a, 1)} d\sigma' \quad (2.189)$$

Para un estudio más pormenorizado nos restringiremos a un elipsoide de revolución. Sea  $M(x, y, z)$  un punto del elipsoide  $E_a$

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{\tau + 1} \sin \theta \cos \lambda \quad , \quad y = a\sqrt{\tau + 1} \sin \theta \sin \lambda \\ z &= a\sqrt{\tau} \cos \theta \quad , \quad D = (\tau + 1)\sqrt{\tau} \end{aligned} \quad (2.190)$$

La variable  $l$  en (2.31) puede ser expresada en términos de  $\tau$  si se toman los ejes  $a\sqrt{\tau+1}$  y  $a\sqrt{\tau}$  utilizados en (2.190). Entonces  $l = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$ . Escribiendo ahora la constante en (2.19) de la forma

$$2\pi GD \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right)$$

y utilizando las ecuaciones (2.32), (2.33) y (2.184) la función  $\Psi_0$  viene dada por

$$\begin{aligned} \Psi_0 = & 2\pi D \left[ \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) - \frac{1}{2} a^2 (\tau + 1) \sin^2 \theta \left( \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) - \frac{\sqrt{\tau}}{\tau + 1} \right) - \right. \\ & \left. - a^2 \tau \cos^2 \theta \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} - \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.191)$$

Poniendo ahora

$$C = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}} = \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \quad (2.192)$$

La integral

$$J = \int \frac{d\sigma'}{\Delta(a, 1)}$$

representa el potencial de una capa del elipsoide  $E$  en el punto interior  $M$ . Es igual a su valor en el centro de  $E$  donde  $\Delta(a, 1) = \Delta(0, 1)$ . En el caso de un elipsoide, por la fórmula (2.162), se tiene

$$\Delta(0, 1) = \sqrt{\tau + \sin^2 \theta'}$$

Poniendo  $\cos \theta = \bar{\mu}$  se obtiene

$$\int \frac{d\sigma'}{\Delta(0, 1)} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta' d\theta' d\lambda'}{\sqrt{\tau + \sin^2 \theta'}} = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{d\bar{\mu}'}{\sqrt{\tau + 1 - \bar{\mu}'^2}} = 4\pi \arcsin \left( \frac{1}{\tau + 1} \right)$$

Como

$$\arcsin \left( \frac{1}{\tau + 1} \right) = \arctan \left( \frac{1}{\tau} \right)$$

y de (2.192)  $J = 4\pi C$  es

$$\Psi_1 = (2\Psi_0 - 4\pi CGD) \zeta + GD \int \frac{\bar{\zeta}' d\sigma'}{\Delta(a, 1)} \quad (2.193)$$

A partir de (2.187) y (2.188) podemos escribir la ecuación (2.186) en la forma

$$\Psi_0 + \Psi_1 + \frac{\omega^2(x^2 + y^2)}{2} = G \text{ funcion}(a) - \delta \Phi - \sum_{i=2}^{\infty} \Psi_i \quad (2.194)$$

Como  $E$  es una figura de equilibrio, la condición

$$\Psi_0 + \frac{\omega^2(x_a^2 + y_a^2)}{2} = h_a$$

se tiene que cumplir en cada superficie  $E_a$ , siendo la suma entre paréntesis la raíz de la distancia de un punto en  $E_a$  desde el eje de rotación y  $h_a$  es un número no variable en esta superficie. No obstante, depende de  $a$ . La expresión de  $h_a$  puede determinarse a partir de (2.191) poniendo  $\theta = 0$ .

$$h_a = 2\pi GD \left[ \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) - a^2 \left( \sqrt{\tau} - \tau \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \right) \right]$$

Si

$$R = \sqrt{\tau} - \tau \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \quad (2.195)$$

se obtiene

$$h_a = 2\pi GD(C - a^2 R) \quad (2.196)$$

De (2.190) se obtiene

$$x_a^2 + y_a^2 = a^2(\tau + 1) \sin^2 \theta$$

La condición para la superficie  $E_a$  toma la forma

$$\Psi_0 + \frac{1}{2} \omega^2 a^2(\tau + 1) \sin^2 \theta = 2\pi GD(C - a^2 R) \quad (2.197)$$

La expresión determinada por esta ecuación para  $\Psi_0$  y  $\Psi_1$  de (2.193) se puede sustituir en (2.194) y, reagrupando los términos, queda

$$\begin{aligned} -4\pi GD a^2 R \zeta + GD \int \frac{\bar{\zeta}' d\sigma'}{\Delta(a, 1)} = 2\pi GD(a^2 R - C) - \\ -\frac{1}{2} \omega^2 a^2(\tau + 1) \sin^2 \theta \zeta^2 - \sum_{i=2}^{\infty} \Psi_i - \delta \Phi + G \text{ funcion}(a) \end{aligned} \quad (2.198)$$

Esta ecuación es del tipo

$$GR\zeta - \frac{G}{4\pi a^2} \int \frac{\bar{\zeta}' d\sigma'}{\Delta(a, 1)} = W + GP(a) \quad (2.199)$$

Para  $a \neq 0$  se puede escribir

$$W = \frac{\omega^2}{8\pi D} (\tau + 1) \sin^2 \theta \zeta^2 + \frac{G}{4\pi a^2 D} \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \Psi_i \Psi_2(0) + [\Phi - \Phi(0)] \delta \right\} \quad (2.200)$$

$$P(a) = -\frac{G}{4\pi a^2 D} \left\{ G \text{ funcion}(a) + 2\pi GD(a^2 R - C) - \Psi_2(0) - \Phi(0)\delta \right\} \quad (2.201)$$

Los términos  $\Psi_2(0) = \Psi_2|_{a=0}$  y  $\Phi(0) = \Phi|_{a=0}$  no dependen de  $\theta$  ni de  $\lambda$ . La función  $W$  depende de  $\zeta^2$  y de términos de orden más elevado.

Teniendo en cuenta todas las expresiones para  $W$ ,  $\Psi_i$  y  $\Phi$  se puede ver que la ecuación (2.199) pertenece a la clase de ecuaciones integro-diferenciales. La ecuación fundamental (2.186) se puede escribir de la forma (2.199) para las figuras de equilibrio que satisfagan las condiciones mencionadas más arriba.

La solución de esta ecuación  $\zeta$  es una función de dos variables,  $a$  y  $\theta$ , ya que está escrita para un elipsoide de revolución, y de un parámetro  $\delta$ . *Liapounov* también resolvió el caso general para  $\zeta = \zeta(a, \theta, \lambda)$ . Hay una segunda función desconocida en la ecuación (2.199) denotada por *funcion*( $a$ ). No obstante, es posible determinarla ya que se tiene la segunda condición (2.156).

Ahora es posible resolver el problema, si se supone que la función  $\zeta$  se puede desarrollar en series

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \delta^i \quad (2.202)$$

donde se ha omitido el término  $\delta_0$  para eliminar el caso de un líquido homogéneo.

Si

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \delta^i \quad (2.203)$$

la ecuación mantiene el conjunto de condiciones

$$GR\zeta_i - \frac{G}{4\pi a^2} \int \frac{\bar{\zeta}_1' d\sigma'}{\Delta(a, 1)} = W_i + P_i \quad (2.204)$$

para los coeficientes  $\zeta_i$ .

Además de estas ecuaciones, si se sustituye (2.202) en (2.156) obtenemos las condiciones

$$\begin{aligned} \int \zeta_1 d\sigma &= 0, \quad \int \zeta_2 d\sigma = - \int \zeta_1^2 d\sigma \\ \int \zeta_3 d\sigma &= -2 \int \zeta_1 \zeta_2 d\sigma - \frac{1}{3} \int \zeta_1^3 d\sigma, \quad \dots, \quad \int \zeta_i d\sigma = N_i \end{aligned} \quad (2.205)$$

donde  $N_i$  depende de  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{i-1}$ . Para eliminar las funciones  $P_i$  en (2.204), se multiplica esta función por  $d\sigma$  y se integra sobre la esfera unitaria  $\Sigma$ . Entonces

$$GRN_i - \frac{G}{4\pi a^2} \int \bar{\zeta}'_i d\sigma' \int \frac{d\sigma}{\Delta(a, 1)} = \int W_i d\sigma + 4\pi P_i \quad (2.206)$$

En la superficie integral  $J_1$ , el denominador  $\Delta(a, 1)$  es la distancia de un punto en  $E_a$  a algún punto en  $E$ .

Si,  $\zeta = \zeta' = 0$  en (2.154), (2.155) y (2.157), la última ecuación representará el potencial de una capa homogénea entre las superficies  $E_a$  y  $E_{a+da}$  en un punto de  $E$ . La densidad de esta capa es la unidad y se obtiene la expresión

$$a^2 da D(\tau) \int \frac{d\sigma}{\Delta(a, 1)} = a^2 D(\tau) da J_1$$

Cambiando las notaciones en la expresión para el potencial de un elipsoide homogéneo en el punto exterior  $M(x, y, z)$  se obtiene este potencial en la forma

$$U_e = G\pi D(\tau) \int_{\varepsilon}^{\infty} \left( a^2 - \frac{x^2}{t+1} - \frac{y^2}{t+q} - \frac{z^2}{t} \right) \frac{dt}{D(t)} \quad (2.207)$$

donde  $\varepsilon$  es una raíz positiva de la ecuación

$$\frac{x^2}{t+1} + \frac{y^2}{t+q} + \frac{z^2}{t} = a^2 \quad (2.208)$$

que corresponde al elipsoide confocal  $E_a$  que pasa a través de  $M$ . Ahora el potencial de la capa que se acaba de considerar será

$$\Delta U_e = 2G\pi D(\tau) a da \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{D(t)} - G\pi D(\tau) \left( a^2 - \frac{x^2}{\varepsilon+1} - \frac{y^2}{\varepsilon+q} - \frac{z^2}{\varepsilon} \right) \frac{d\varepsilon}{D(\varepsilon)}$$

ya que  $U_e$  y  $\varepsilon$  son funciones del parámetro  $a$ . La expresión entre paréntesis desaparece a causa de (2.208) y, comparando, se obtienen dos expresiones para el potencial de la capa

$$J_1 = \int \frac{d\sigma}{\Delta(a, 1)} = \frac{2\pi}{a} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{D(t)} \quad (2.209)$$

Para un elipsoide de revolución ( $q = 1$ ), (2.209) puede expresarse en términos de funciones elementales.

$$J_1 = \frac{4\pi}{a} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \quad (2.210)$$

donde  $\varepsilon$  es una raíz positiva de la ecuación

$$\frac{\tau + 1}{t + 1} \sin^2 \theta' + \frac{\tau}{t} \cos^2 \theta' = a^2 \quad (2.211)$$

Eliminando  $P_i$  por (2.204), (2.206) y (2.209) se obtiene

$$GR \zeta_i - \frac{G}{4\pi a^2} \int \bar{\zeta}'_i \left( \frac{1}{\Delta(a, 1)} - \frac{1}{2a} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{D(t)} \right) d\sigma' = W_i - \frac{1}{4\pi} \int W_i d\sigma + \frac{1}{4\pi} GR N_i \quad (2.212)$$

El miembro derecho de esta ecuación depende de las funciones  $\zeta_1, \dots, \zeta_{i-1}$ . Si se determinan estas funciones, la expresión (2.212) se puede utilizar para encontrar la siguiente función  $\zeta_i$ .

Poniendo ahora  $a = 1$  en (2.212) y denotando por una barra el correspondiente valor de la función de este parámetro ( $\bar{\zeta}_i$ ), se tiene

$$GR \bar{\zeta}_i - \frac{G}{4\pi} \int \frac{\bar{\zeta}'_i d\sigma'}{\Delta(1, 1)} = W_i + Cte \quad (2.213)$$

Esta es una ecuación integral del tipo (2.169) y para resolverla se utilizará el método de *Liapounov*. Para los elipsoides de *Jacobi* la expresión  $W_i$  dependerá de los ángulos  $\theta$  y  $\lambda$ , pero aquí se va a considerar sólo un elipsoide de revolución. La fórmula (2.200) muestra que  $W_i$  es función de  $\theta$ . Los últimos dos términos en (2.212) se mantienen constantes. Si ahora una función  $\bar{\zeta}_i$  se determina por (2.213), la correspondiente función  $\zeta_i$  podrá ser calculada directamente por (2.212). Así, la solución de la ecuación integro-diferencial (2.199) se reduce a la solución de un conjunto infinito de ecuaciones integrales (2.213). Los términos de las series (2.202) se pueden calcular sucesivamente a partir de este conjunto. El cálculo efectivo de los primeros términos en caso

de un líquido heterogéneo requirió, no obstante, unos centenares de páginas en la mencionada memoria de *Liapounov*. La importancia de la aportación de este método radica en la posibilidad de utilizar la aproximación deseada. Ya que el análisis de *Poincaré* estaba restringido únicamente a la primera aproximación.

Estas pocas fórmulas muestran la extrema complejidad de la teoría de *Liapounov*. Fue aplicada por *Liapounov* en su memoria para el caso de un líquido homogéneo y, con ello, fue confirmada una vez más la existencia de figuras de equilibrio que difieren poco de un elipsoide.

La última conclusión de la teoría es como sigue (*Liapounov* [57] p. 436): *en todos los casos (determinados por las condiciones indicadas anteriormente) la superficie de una figura de equilibrio viene determinada por la ecuación de la forma*

$$\frac{X^2}{\tau + 1} + \frac{Y^2}{\tau + q} + \frac{Z^2}{\tau} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(X, Y)\alpha^j \quad (2.214)$$

donde  $\Phi_j$  es una función polinómica de  $X$  e  $Y$  de grado  $(m - 2)j + 2$ . Es una función par de  $Z$  y una función par o impar de  $X$  cuando el producto  $m \cdot j$  es par o impar respectivamente. Respecto a  $\alpha$  en esta ecuación, es el parámetro en términos del cual se podría expresar la función  $\zeta$ . En las investigaciones referentes a los fluidos homogéneos, *Liapounov* utilizó la expresión  $\alpha = \sqrt{\int \zeta^2 d\zeta}$  y también el segundo parámetro  $\eta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2G}$

El hecho probado por *Liapounov* respecto a que  $\Phi_j$  son todos pares en  $Z$  conlleva inmediatamente la simetría de cada figura de equilibrio respecto al plano ecuatorial.

La importancia del último resultado de la teoría de *Liapounov* es evidente. La ecuación (2.214) representa la solución más general conocida del problema de las figuras de equilibrio.

Por otra parte, de acuerdo con la teoría clásica de las superficies de figuras de equilibrio, para una masa fluida homogénea aislada con rotación uniforme, las superficies equipotenciales coinciden con las isobáricas y las isopícnicas. Una familia de estas superficies se puede describir mediante la ecuación

$$r = Ra[1 + \zeta(a, \theta, \lambda)] \quad (2.215)$$

donde  $(r, \theta, \lambda)$  son las coordenadas esféricas,  $R$  un factor de escala y  $a$  un parámetro con  $a \in [0, 1]$ .

Según *Liapounov* [56], supongamos que los volúmenes en el interior de la superficie (2.215) y el volumen de la esfera de radio  $r = Ra$  son iguales. Entonces

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \zeta_n(a, \theta, \lambda) \quad (2.216)$$

con

$$q = \frac{\omega^2 R^3}{GM} = \frac{3\omega^2}{4\pi G\rho}$$

siendo  $G$  la constante de gravitación universal,  $M$  la masa del fluido,  $\rho$  la densidad y  $\vec{\omega}$  la velocidad angular.

Teniendo en cuenta estas premisas, *Liapounov* [56] probó la existencia del radio de convergencia universal  $q^*$ :

Para todos los cuerpos con densidad  $\rho(a)$  positiva y decreciente del centro a la superficie, la serie (2.216) converge si  $|q| < q^*$ .

También diseñó un algoritmo para la determinación del valor  $q^*$  [56]. Dicho algoritmo es demasiado complicado para efectuar los cálculos sin la ayuda del ordenador.

*Kholshevnikov* y *Elkin* [45] con la ayuda del ordenador y del cálculo simbólico han obtenido este valor  $q^* = 0'000370916$ .

Además

1. *Kholshevnikov* y *Elkin* [45] han probado que *el radio de convergencia de la serie de Liapounov para figuras homogéneas de equilibrio coincide con  $q_0 = 0'336998559$  y que la serie (2.216) converge absolutamente hasta  $q = q_0$  y representan elipsoides de MacLaurin con excentricidad  $e = e(q) \leq e(q_0) = e_0 = 0'929955685$ .*
2. *Kholshevnikov* ha efectuado una demostración de la convergencia de la serie (2.216) utilizando funciones de variable compleja y el cálculo numérico [45] y otra demostración utilizando funciones de variable real y sin emplear el cálculo numérico [46].



3. *Kholshevnikov y Kurdubov* [47] han demostrado que *el radio de convergencia de la serie de Liapounov para cualquier  $\theta$  es igual a  $\frac{q^*}{a^3}$  y que la serie (2.216) converge absolutamente para  $a = 1$ ,  $q = q^*$  y  $\forall \theta$ .*

## 2.5. Método de *Kopal*

*Finlay* [30] desarrolla una teoría de primer orden en las amplitudes  $f_j(a)$  a partir de  $r = a \left\{ 1 + \sum_{j=0}^{\infty} f_j(a) P_j(\cos \theta) \right\}$ . *Kopal* [50], [51] extiende los desarrollos de *Finlay* hasta órdenes más elevados. El método seguido por *Kopal* se expone a continuación.

### 2.5.1. Superficies equipotenciales

Se toman como punto de partida las ecuaciones generales del movimiento hidrodinámico en su forma *Euleriana*

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \nabla \Psi - \nabla P + \nabla \vec{\Upsilon} \quad (2.217)$$

donde  $\rho$  denota la densidad de un punto interior de la respectiva configuración;  $P$ , la correspondiente presión; y  $\Psi = \Omega + V'$ , el potencial que surge del potencial autogravitatorio ( $\Omega$ ) y del potencial perturbador ( $V'$ ) debido a la rotación o a mareas;  $\vec{v}$  denota el vector velocidad de desplazamiento en el cuerpo fluido en consideración;  $\vec{\Upsilon}$ , el tensor de tensión debido a las fuerzas disipativas de cualquier fuente (viscosidad, radiación, ...), y  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ , la derivada *Lagrangiana* respecto del tiempo.

En configuraciones de equilibrio correspondientes a una rotación rígida del sistema, la velocidad del fluido,  $\vec{v}$ , se anula y también lo hace  $\vec{\Upsilon}$ . Por ello la ecuación (2.217) se reduce a

$$\nabla P = \rho \nabla \Psi$$

o, en su forma escalar

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (2.218)$$

Derivando la primera ecuación de (2.218) respecto de las variables  $y$  y  $z$ , la segunda ecuación de (2.218) respecto de las variables  $x$  y  $z$  y la tercera ecuación de (2.218) respecto de las variables  $x$  e  $y$ ; igualando las derivadas parciales cruzadas y simplificando, se obtiene la ecuación

$$\frac{\frac{\partial \rho}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \rho}{\partial y}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \rho}{\partial z}}{\frac{\partial \Psi}{\partial z}} \quad (2.219)$$

A partir de esta última ecuación se deduce que las superficies equipotenciales coinciden con las superficies de densidad constante. Bajo estas circunstancias, las ecuaciones (2.219) se pueden escribir

$$dP = \rho d\Psi \quad (2.220)$$

con lo que también se deduce que las superficies equipotenciales coinciden con las isobáricas.

Por lo tanto, la presión y la densidad se podrán expresar, únicamente, como funciones de  $\Psi$ :  $P = P(\Psi)$ ;  $\rho = \rho(\Psi)$ .

Para la determinación de las superficies equipotenciales se precisa, además de la ecuación (2.220), la ecuación de *Poisson* y una ecuación de estado que relacione la presión con la densidad,  $P = P(\rho)$ .

Sea  $M$  un punto arbitrario interior a esta configuración de coordenadas

$$x = r \sin \theta \cos \lambda \quad , \quad y = r \sin \theta \sin \lambda \quad , \quad z = r \cos \theta \quad (2.221)$$

que efectúa su atracción a la capa comprendida entre  $r = r_0$  y  $r = r_1$ . Sea  $M'(r', \theta', \lambda')$  un punto arbitrario de esa capa. Entonces, el potencial interior  $U$  en  $M$  será

$$U = G \int_{r_0}^{r_1} \frac{dm'}{\Delta} \quad (2.222)$$

donde  $G$  denota la constante de gravitación universal;  $dm'$ , el elemento de masa  $dm' = \rho dx' dy' dz' = \rho r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\lambda'$ ; y del triángulo formado por  $OMM'$ , aplicando el teorema del coseno, se deduce que

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma \quad (2.223)$$

con

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda') \quad (2.224)$$

Además, el potencial exterior  $V$  tiene la forma

$$V = G \int_0^{r_0} \frac{dm'}{\Delta} \quad (2.225)$$

con lo que el potencial autogravitatorio será  $\Omega = U + V$ .

Para determinar, tanto el potencial interior como el exterior, se desarrolla  $\Delta^{-1}$  en términos de los polinomios de *Legendre*,  $P_n(\cos \gamma)$ ,

$$\frac{1}{\Delta} = \begin{cases} \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma) & \text{si } r' < r \\ \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos \gamma) & \text{si } r' > r \end{cases} \quad (2.226)$$

sustituyendo estos desarrollos en las ecuaciones (2.222) y (2.225), se obtiene

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} r^n U_n \quad (2.227)$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} V_n \quad (2.228)$$

donde

$$U_n = G \int_{r_0}^{r_1} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho r'^{1-n} P_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\lambda' d\theta' dr' \quad (2.229)$$

$$V_n = G \int_0^{r_0} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho r'^{n+2} P_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\lambda' d\theta' dr' \quad (2.230)$$

Sea

$$r' = r(a, \theta', \lambda') \quad (2.231)$$

la ecuación paramétrica de una superficie equipotencial de densidad y presión constantes. Las superficies equipotenciales pueden expresarse como función de un único parámetro  $a$  (p.e. el radio medio de la superficie) y, puesto que estas superficies coinciden con las isobáricas y las isopícnicas, éstas también serán funciones únicamente del parámetro  $a$ :  $P = P(a)$  y  $\rho = \rho(a)$ .

La ecuación (2.231) define las coordenadas de *Clairaut* y, para expresar el potencial en función de éstas, se debe calcular el *Jacobiano* de dicha transformación:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial r'}{\partial a} & \frac{\partial \theta'}{\partial a} & \frac{\partial \lambda'}{\partial a} \\ \frac{\partial r'}{\partial \theta'} & \frac{\partial \theta'}{\partial \theta'} & \frac{\partial \lambda'}{\partial \theta'} \\ \frac{\partial r'}{\partial \lambda'} & \frac{\partial \theta'}{\partial \lambda'} & \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda'} \end{vmatrix} = \frac{\partial r'}{\partial a} \quad (2.232)$$

Por lo tanto, el elemento de masa en coordenadas de *Clairaut* viene expresado por

$$dm' = \rho r'^2 \frac{\partial r'}{\partial a} \sin \theta' da d\theta' d\lambda' \quad (2.233)$$

con lo que los términos de los potenciales interior y exterior se expresarán por las ecuaciones

$$U_n = \frac{G}{2-n} \int_{a_0}^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r'^{2-n} P_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\lambda' d\theta' \right\} da \quad \text{si } n \neq 2 \quad (2.234)$$

$$U_2 = G \int_{a_0}^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \log r' P_2(\cos \gamma) \sin \theta' d\lambda' d\theta' \right\} da \quad (2.235)$$

$$V_n = \frac{G}{n+3} \int_0^{a_0} \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r'^{n+3} P_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\lambda' d\theta' \right\} da \quad \forall n \quad (2.236)$$

donde  $a_1$  es la primera raíz de la ecuación  $\rho(a) = 0$ .

Para  $n = 0$  se tiene:

$$U_0 = 4\pi G \int_{a_0}^{a_1} \rho a da \quad (2.237)$$

$$V_0 = G \int_0^{a_0} dm' = Gm(a_0) \quad (2.238)$$

donde  $m(a_0)$  denota la masa interior a la superficie  $r = r(a_0, \theta', \lambda')$ .

Por otra parte, la superficie equipotencial de parámetro  $a$  se puede expresar mediante el desarrollo en serie

$$r' = a \left\{ 1 + \sum_{j=0}^{\infty} f_j(a) P_j(\cos \theta') \right\} \quad (2.239)$$

donde los  $P_j(\cos \theta')$  son los polinomios de *Legendre*.

Por el teorema de adición de los armónicos esféricos en forma real

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{n,m}(\theta', \lambda')$$

y de la ortonormalidad de los armónicos esféricos en forma real

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda = \delta_{n,r} \delta_{m,s}$$

( $\delta_{i,j}$  = delta de *Kronecker*)

se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n(\cos \gamma) Y_{r,m}(\theta', \lambda') \sin \theta' d\theta' d\lambda' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_{n,m}(\theta, \lambda) \delta_{n,r}$$

y como

$$P_r(\cos \theta') = \sqrt{\frac{4\pi}{2r+1}} Y_{r,0}(\theta', \lambda')$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n(\cos \gamma) P_r(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' d\lambda' = \frac{4\pi}{2n+1} P_n(\cos \theta) \delta_{n,r} \quad (2.240)$$

De (2.227), (2.228), (2.239) y (2.240),  $U$  y  $V$  se pueden reescribir de la forma

$$U = 4\pi G \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_j(a)}{2j+1} r^j P_j(\cos \theta) \quad (2.241)$$

$$V = 4\pi G \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(a)}{2j+1} r^{-j-1} P_j(\cos \theta) \quad (2.242)$$

donde  $E_j(a)$  y  $F_j(a)$  representan funciones únicamente del parámetro  $a$ .

El potencial total,  $\Psi$ , formado por el potencial autogravitatorio ( $\Omega$ ) y por el potencial perturbador ( $V'$ ), satisface la ecuación de *Poisson*

$$\nabla^2 \Psi + 4\pi G \rho = 2\omega^2 \quad (2.243)$$

donde  $\vec{\omega}$  es la velocidad angular del sistema.

En las configuraciones donde no existe rotación, el potencial perturbador ( $V'$ ) representa una solución de la ecuación de *Laplace*  $\nabla^2 V' = 0$ , que tiene la forma siguiente

$$V' = \sum_j \{c_j r^j + d_j r^{-j-1}\} P_j(\cos \theta)$$

siendo  $c_j$  y  $d_j$  constantes arbitrarias. Los valores de las constantes dependen de la naturaleza de las fuerzas perturbadoras.

En el caso de un potencial perturbador debido a la rotación uniforme con velocidad angular constante alrededor del eje  $z$ , cuya dirección en el espacio se ha definido previamente,  $V'$  verifica la ecuación

$$\nabla^2 V' = 2\omega^2 \quad (2.244)$$

y su solución es

$$V' = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{3} \omega^2 r^2 (1 - P_2(\cos \theta)) \quad (2.245)$$

Con lo cual, el potencial total ( $\Psi$ ) debido al potencial autogravitatorio ( $\Omega$ ) y al potencial centrífugo ( $V'$ ) se desarrollará de la forma

$$\begin{aligned} \Psi(r, \theta, \lambda) = & 4\pi G \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j E_j(a) + r^{-j-1} F_j(a)}{2j+1} P_j(\cos \theta) + \\ & + \frac{1}{3} \omega^2 r^2 (1 - P_2(\cos \theta)) \end{aligned} \quad (2.246)$$

válida para cualquier grado de exactitud. Por lo tanto, para una superficie equipotencial determinada por el radiovector  $r'$ ,

$$\begin{aligned} \Psi(r', \theta, \lambda) = & 4\pi G \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r'^j E_j(a) + r'^{-j-1} F_j(a)}{2j+1} P_j(\cos \theta) + \\ & + \frac{1}{3} \omega^2 r'^2 (1 - P_2(\cos \theta)) \end{aligned} \quad (2.247)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (2.239),

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \omega^2 r'^2 (1 - P_2(\cos \theta)) &= \frac{1}{3} \omega^2 a^2 (1 - f_2(a)) - \\ &- \frac{1}{3} \omega^2 \left\{ 1 - 2f_2(a) + \frac{6}{7} f_2^2(a) \right\} r'^2 P_2(\cos \theta) + \\ &+ \frac{\omega^2}{a^2} \left\{ \frac{2}{3} f_4(a) - \frac{18}{35} f_2^2(a) \right\} r'^4 P_4(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (2.248)$$

Las anteriores expresiones, para pequeños valores de  $\omega^2$ , se pueden considerar como cantidades de primer orden. Este desarrollo del potencial centrífugo ( $V'$ ) es correcto hasta términos de tercer orden.

Supongamos ahora que se desarrolla el miembro derecho de la ecuación (2.247) en series de *Neumann* de la forma

$$\Psi(r', \theta, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(a) P_j(\cos \theta) \quad (2.249)$$

con los coeficientes definidos por

$$\alpha_j(a) = \frac{2j+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Psi(r', \theta, \lambda) P_j(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\lambda \quad (2.250)$$

Si ahora, en concordancia con (2.221), el potencial total ( $\Psi$ ) permanece constante en una superficie como la dada por la ecuación (2.239), se sigue que todos los términos del miembro derecho de la ecuación (2.249), factorizados por  $P_j(\cos \theta)$  para  $j > 0$ , se anulan necesariamente, es decir,

$$\alpha_j(a) = 0 \quad \text{si } j > 0 \quad (2.251)$$

### 2.5.2. Perturbación debida a la rotación

El propósito de la presente sección es establecer la forma explícita de las amplitudes  $f_j(a)$  en el desarrollo (2.239) para la forma de una superficie equipotencial de una configuración de rotación perturbada por una fuerza centrífuga. Si esta rotación se efectúa alrededor de un eje  $z$  fijado en el espacio, es evidente (debido a la simetría) que este desarrollo sólo contiene términos de  $P_j(\cos \theta)$  de orden par. Además, si la amplitud  $f_2(a)$ , término principal de la ecuación (2.239), representa una cantidad de primer orden;  $f_4(a)$  es del mismo orden que  $f_2^2(a)$  o de segundo orden;  $f_6(a)$  de tercer orden, ...

Sea

$$r' = a \{1 + f_0 + f_2 P_2(\cos \theta) + f_4 P_4(\cos \theta) + f_6 P_6(\cos \theta) + \dots\} = a \{1 + \Sigma\} \quad (2.252)$$

desarrollada hasta cantidades en tercer orden.

Por otra parte

$$r'^{2-n} = a^{2-n} \left\{ 1 - (n-2)\Sigma + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\Sigma^2 - \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\Sigma^3 + \dots \right\} \quad \text{si } n \neq 2 \quad (2.253)$$

$$\log r' = \log a + \Sigma - \frac{1}{2}\Sigma^2 + \frac{1}{3}\Sigma^3 - \dots \quad \text{si } n = 2 \quad (2.254)$$

$$r'^{n+3} = a^{n+3} \left\{ 1 + (n+3)\Sigma + \frac{1}{2}(n+3)(n+2)\Sigma^2 + \frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1)\Sigma^3 + \dots \right\} \quad \forall n \quad (2.255)$$

Ahora, para desarrollar como combinación lineal de polinomios de *Legendre* las potencias y los productos cruzados de polinomios de *Legendre* que se obtienen de las diferentes potencias de  $\Sigma$  en las ecuaciones (2.253), (2.254) y (2.255), se utilizará la fórmula de *Adams y Newmann* (1878) [60]

$$P_m P_n = \sum_{j=0}^m \frac{A_{m-j} A_j A_{n-j}}{A_{m+n-j}} \frac{2m+2n+1-4j}{2m+2n+1-2j} P_{m+n-2j} \quad \text{si } m \leq n \quad (2.256)$$

donde  $A_0 = 1$  y, para  $j > 0$ ,

$$A_j = \frac{\prod_{k=1}^j (2k-1)}{j!}$$

De la ortogonalidad de los polinomios de *Legendre* se tiene que

$$\int_{-1}^1 P_m P_n d(\cos \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases} \quad (2.257)$$



Sustituyendo las ecuaciones que van desde (2.252) hasta (2.257) en las ecuaciones (2.234), (2.235) y (2.236); y teniendo en cuenta (2.240), se obtienen las expresiones siguientes

$$(2n + 1)U_n = 4\pi G E_n(a) P_n(\cos \theta) \quad (2.258)$$

$$(2n + 1)V_n = 4\pi G F_n(a) P_n(\cos \theta) \quad (2.259)$$

Sea

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r'^3 \sin \theta \, d\theta d\lambda \right\} da = \\ &= \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ a^3 \left[ \frac{1}{3} + (1 + f_0) \left( f_0 + \frac{1}{5} f_2^2 \right) + \frac{2}{105} f_2^3 + \dots \right] \right\} da \end{aligned} \quad (2.260)$$

que representa la masa de esta configuración interior a  $a$ . Como la masa es independiente de la perturbación, entonces

$$(1 + f_0) \left( f_0 + \frac{1}{5} f_2^2 \right) + \frac{2}{105} f_2^3 + \dots = 0 \quad (2.261)$$

con lo que

$$f_0 = -\frac{1}{5} f_2^2 - \frac{2}{105} f_2^3 - \dots \quad (2.262)$$

que es correcta para cantidades de tercer orden.

Con todo esto se pueden escribir explícitamente los coeficientes

$$E_0 = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ a^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{10} f_2^2 - \frac{2}{105} f_2^3 \right] \right\} da \quad (2.263)$$

$$E_2 = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ f_2 - \frac{1}{7} f_2^2 + \frac{12}{35} f_2^3 - \frac{2}{7} f_2 f_4 \right\} da \quad (2.264)$$

$$E_4 = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{a^2} \left[ f_4 - \frac{27}{35} f_2^2 + \frac{216}{385} f_2^3 - \frac{60}{77} f_2 f_4 \right] \right\} da \quad (2.265)$$

$$E_6 = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ \frac{1}{a^4} \left[ f_6 + \frac{90}{77} f_2^3 - \frac{25}{11} f_2 f_4 \right] \right\} da \quad (2.266)$$

$$F_0 = \int_0^a \rho a^2 da \quad (2.267)$$

$$F_2 = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ a^5 \left[ f_2 + \frac{4}{7} f_2^2 + \frac{2}{35} f_2^3 + \frac{8}{7} f_2 f_4 \right] \right\} da \quad (2.268)$$

$$F_4 = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ a^7 \left[ f_4 + \frac{54}{35} f_2^2 + \frac{108}{77} f_2^3 + \frac{120}{77} f_2 f_4 \right] \right\} da \quad (2.269)$$

$$F_6 = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ a^9 \left[ f_6 + \frac{24}{11} f_2^3 + \frac{40}{11} f_2 f_4 \right] \right\} da \quad (2.270)$$

A continuación, se establecerán de forma explícita las ecuaciones (2.251) para  $j = 2, 4, 6$

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 E_2}{5} \left\{ 1 + \frac{4}{7} f_2 + \frac{4}{7} f_4 + \frac{1}{35} f_2^2 \right\} + \frac{8}{63} a^4 f_2 E_4 + \\ & - \frac{F_0}{a} \left\{ f_2 - \frac{2}{7} f_2^2 + \frac{29}{35} f_2^3 - \frac{4}{7} f_2 f_4 \right\} + \end{aligned} \quad (2.271)$$

$$+ \frac{F_2}{5a^3} \left\{ 1 - \frac{6}{7} f_2 - \frac{6}{7} f_4 + \frac{111}{35} f_2^2 \right\} - \frac{10}{63} \frac{f_2}{a^5} F_4 =$$

$$= \frac{\omega^2 a^2}{12\pi G} \left\{ 1 - \frac{10}{7} f_2 - \frac{9}{35} f_2^2 + \frac{4}{7} f_4 \right\}$$

$$\frac{a^2 E_2}{5} \left\{ \frac{36}{35} f_2 + \frac{40}{77} f_4 + \frac{108}{385} f_2^2 \right\} + \frac{a^4 E_4}{9} \left\{ 1 + \frac{80}{77} f_2 \right\} +$$

$$- \frac{F_0}{a} \left\{ f_4 - \frac{18}{35} f_2^2 + \frac{108}{385} f_2^3 - \frac{40}{77} f_2 f_4 \right\} +$$

(2.272)

$$- \frac{F_2}{5a^3} \left\{ \frac{54}{35} f_2 + \frac{60}{77} f_4 - \frac{648}{385} f_2^2 \right\} + \frac{F_4}{9a^5} \left\{ 1 - \frac{100}{77} f_2 \right\} =$$

$$= \frac{\omega^2 a^2}{6\pi G} \left\{ \frac{18}{35} f_2 - \frac{57}{77} f_4 - \frac{9}{77} f_2^2 \right\}$$

$$\frac{a^2 E_2}{5} \left\{ \frac{10}{11} f_4 + \frac{18}{77} f_2^2 \right\} + \frac{20}{99} a^4 f_2 E_4 + \frac{1}{13} a^6 E_6 +$$

$$- \frac{F_0}{a} \left\{ f_6 + \frac{18}{77} f_2^3 - \frac{10}{11} f_2 f_4 \right\} - \frac{3}{11} \frac{F_2}{a^3} \left\{ f_4 - \frac{36}{35} f_2^2 \right\} +$$

(2.273)

$$- \frac{25}{99} \frac{f_2 F_4}{a^5} + \frac{F_6}{13a^7} =$$

$$= \frac{\omega^2 a^2}{6\pi G} \left\{ \frac{5}{11} f_4 + \frac{9}{77} f_2^2 \right\}$$

La ecuación (2.271), en cantidades de primer orden, se reduce a

$$\frac{a^2 E_2}{5} + \frac{F_2}{5a^3} - \frac{f_2 F_0}{a} = \frac{\omega^2 a^2}{12\pi G} \quad (2.274)$$

y las ecuaciones (2.271) y (2.272), en cantidades de segundo orden

$$\frac{a^2 E_2}{5} + \frac{F_2}{5a^3} \left\{ 1 - \frac{10}{7} f_2 \right\} - \frac{f_2 F_0}{a} \left\{ 1 - \frac{6}{7} f_2 \right\} = \frac{\omega^2 a^2}{12\pi G} \{1 - 2f_2\} \quad (2.275)$$

$$\frac{a^4 E_4}{9} + \frac{F_4}{9a^5} - \frac{18}{35} \frac{f_2 F_2}{a^3} - \frac{F_0}{a} \left\{ f_4 - \frac{54}{35} f_2^2 \right\} = 0 \quad (2.276)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.275) y (2.276) en las ecuaciones (2.271), (2.272) y (2.273), estas últimas se pueden reescribir de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \frac{a^2 E_2}{5} + \frac{F_2}{5a^3} - \frac{f_2 F_0}{a} &= -\frac{F_0}{a} \left\{ \frac{6}{7} f_2^2 - \frac{748}{245} f_2^3 + \frac{16}{7} f_2 f_4 \right\} + \\ &+ \frac{F_2}{5a^3} \left\{ \frac{10}{7} f_2 - \frac{338}{49} f_2^2 + \frac{10}{7} f_4 \right\} + \\ &+ \frac{2f_2}{7a^5} F_4 + \frac{a^2}{3} \frac{\omega^2}{4\pi G} \left\{ 1 - 2f_2 + \frac{6}{7} f_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.277)$$

$$\begin{aligned} \frac{a^4 E_4}{9} + \frac{F_4}{9a^5} - \frac{f_4 F_0}{a} &= -\frac{F_0}{a} \left\{ \frac{54}{35} f_2^2 - \frac{1890}{2695} f_2^3 + \frac{160}{77} f_2 f_4 \right\} + \\ &+ \frac{F_2}{5a^3} \left\{ \frac{18}{7} f_2 - \frac{2988}{539} f_2^2 + \frac{100}{77} f_4 \right\} + \\ &+ \frac{20f_2}{77a^5} F_4 - \frac{\omega^2 a^2}{4\pi G} \left\{ \frac{2}{3} f_4 - \frac{18}{35} f_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.278)$$

$$\begin{aligned} \frac{a^6 E_6}{13} + \frac{F_6}{13a^7} - \frac{f_6 F_0}{a} &= \frac{F_0}{a} \left\{ \frac{216}{77} f_2^3 - \frac{40}{11} f_2 f_4 \right\} + \\ &+ \frac{F_2}{a^3} \left\{ \frac{5}{11} f_4 - \frac{90}{77} f_2^2 \right\} + \frac{5f_2}{11a^5} F_4 \end{aligned} \quad (2.279)$$

Las anteriores ecuaciones, de la (2.277) a la (2.279), contienen las amplitudes desconocidas  $f_j$ . Para sacarlas de la integral, se multiplican las ecuaciones (2.277) a (2.279) por  $a^j$  ( $j = 2, 4, 6$ ), respectivamente, con objeto de mantener constantes los coeficientes de  $E_j$  del miembro izquierdo. A continuación se deriva respecto de  $a$ .

Las derivadas de  $E_j$  y  $F_j$  son iguales a los integrandos del miembro derecho de las ecuaciones (2.263) a (2.270); sin embargo, como (a diferencia de  $F_j$ ) la variable independiente  $a$  se da en el límite inferior de las integrales definidas para  $E_j$ , las derivadas de  $E_j$  son iguales a los integrandos en el miembro derecho de (2.262) a (2.266), tomados con signo negativo.

Si, a continuación, se eliminan los términos  $F_n$  para  $n \neq j$  multiplicados por pequeñas cantidades, con ayuda de las ecuaciones (2.274) a (2.276), válidas para los órdenes más bajos, es posible expresar las ecuaciones  $F_j$  para  $j = 2, 4, 6$  de la forma

$$\begin{aligned}
 F_2(a) = & a^2 F_0 \left\{ 3f_2 - af'_2 + \frac{12}{7} f_2^2 - \frac{4}{7} f_2(af'_2) + \frac{2}{7} (af'_2)^2 + \right. \\
 & - \frac{102}{35} f_2^3 - \frac{2}{7} f_2^2(af'_2) - \frac{4}{7} f_2(af'_2)^2 - \frac{8}{35} (af'_2)^3 + \\
 & \left. + \frac{52}{7} f_2 f_4 - \frac{4}{7} a(f_2 f'_4 + f_4 f'_2) + \frac{4}{7} a^2 f'_2 f'_4 \right\} +
 \end{aligned} \tag{2.280}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{3} \frac{\omega^2 a^5}{4\pi G} \left\{ af'_2 + \frac{4}{7} f_2(af'_2) - \frac{2}{7} (af'_2)^2 \right\} \\
 F_4(a) = & a^4 F_0 \left\{ 5f_4 - af'_4 + \frac{108}{35} f_2^2 - \frac{72}{35} f_2(af'_2) + \frac{18}{35} (af'_2)^2 + \right. \\
 & + \frac{972}{385} f_2^3 - \frac{612}{385} f_2^2(af'_2) + \frac{324}{385} f_2(af'_2)^2 - \frac{108}{385} (af'_2)^3 + \\
 & \left. + \frac{520}{77} f_2 f_4 - \frac{80}{77} a(f_2 f'_4 + f_4 f'_2) + \frac{40}{77} a^2 f'_2 f'_4 \right\} + \\
 & + 2 \frac{\omega^2 a^7}{4\pi G} \left\{ -\frac{2}{3} f_4 + \frac{1}{3} af'_4 + \frac{18}{35} f_2^2 + \frac{24}{35} f_2(af'_2)^2 - \frac{6}{35} (af'_2)^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{2.281}$$

$$\begin{aligned}
 F_6 = & a^6 F_0 \left\{ 7f_6 - af'_6 + \frac{270}{77} f_2^3 - \frac{18}{7} f_2^2(af'_2) + \right. \\
 & + \frac{90}{77} f_2(af'_2)^2 - \frac{18}{77} (af'_2)^3 + \frac{130}{11} f_2 f_4 + \\
 & \left. - \frac{30}{11} a(f_2 f'_4 + f_4 f'_2) + \frac{10}{11} a^2 f'_2 f'_4 \right\}
 \end{aligned} \tag{2.282}$$

En las anteriores ecuaciones el símbolo prima indica la derivada primera respecto de  $a$ . Éstas son correctas hasta los términos de tercer orden.

Como último paso del análisis se derivan, una vez más con respecto a  $a$ , las anteriores ecuaciones (2.280) a (2.282) y se sustituyen los valores de  $F'_j(a)$  dados por (2.267) a (2.270). Los resultados muestran que las amplitudes  $f_j(a)$  para  $j = 2, 4, 6$ , deberían satisfacer las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{aligned}
a^2 f_2'' + 6D(af_2' + f_2) - 6f_2 &= \frac{2}{7} \{2\eta_2(\eta_2 + 9) - 9D\eta_2(\eta_2 + 2)\} f_2^2 + \\
&- \frac{4}{35} \{ (7\eta_2^3 + 33\eta_2^2 + 180\eta_2 + 66) + \\
&+ 3D(2\eta_2^3 - 15\eta_2^2 - 27\eta_2 + 5) \} f_2^3 + \\
&+ \frac{4}{7} \{2(\eta_2\eta_4 + 15\eta_2 + 8\eta_4) - \\
&- 3D(3\eta_2\eta_4 + 3\eta_2 + 3\eta_4 - 7)\} f_2 f_4 + \\
&+ \frac{3\omega^2}{\pi G\rho} (1 - D) \left\{ f_2 + af_2' + \frac{6}{7} f_2(af_2') + \frac{3}{7} (af_2')^2 \right\} + \\
&+ \frac{1}{6} \left( \frac{3\omega^2}{\pi G\rho} \right)^2 (1 - D)(\eta_2 + 1)f_2
\end{aligned} \tag{2.283}$$

$$\begin{aligned}
a^2 f_4'' + 6D(af_4' + f_4) - 20f_4 &= \frac{18}{35} \{2\eta_2(\eta_2 + 2) - 3D(3\eta_2^2 + 6\eta_2 + 7)\} f_2^2 + \\
&+ \frac{36}{385} \{2(3 - \eta_2)(1 - 5\eta_2) + \\
&- 3D(3\eta_2^3 + 9\eta_2^2 + 12\eta_2 + 4)\} f_2^3 + \\
&+ \frac{40}{77} \{2\eta_2\eta_4 + 23\eta_2 + 9\eta_4 - 9D(\eta_2\eta_4 + \eta_4)\} f_2 f_4 + \\
&+ \frac{3\omega^2}{\pi G\rho} (1 - D) \left\{ f_4 + af_4' + \frac{9}{35} [7f_2^2 + 6f_2(af_2') + 3(af_2')^2] \right\}
\end{aligned} \tag{2.284}$$

$$\begin{aligned}
a^2 f_6'' + 6D(af_6' + f_6) - 42f_6 &= \\
&= \frac{18}{77} \{4(3 - \eta_2)(\eta_2 + 2) - 3D(\eta_2^3 + 3\eta_2^2 + 15\eta_2 + 5)\} f_2^3 + \\
&+ \frac{10}{11} \{2(\eta_2\eta_4 + 6\eta_2 - \eta_4) - 3D(3\eta_2\eta_4 + 3\eta_2 + 3\eta_4 + 11)\} f_2 f_4
\end{aligned} \tag{2.285}$$

equivalentes a (2.271), (2.272) y (2.273), donde

$$\eta_j = \frac{a}{f_j} \frac{\partial f_j}{\partial a} \quad (2.286)$$

$$\bar{\rho} = \frac{3}{a^3} \int_0^a \rho a^2 da \quad , \quad D = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \quad (2.287)$$

Las condiciones de frontera necesarias para una completa especificación de las soluciones particulares de las ecuaciones anteriores, que representan las amplitudes  $f_j(a)$  del desarrollo (2.252), vienen determinadas en parte respecto al centro y en parte en la frontera de nuestra configuración. Como en el centro todas las  $f_j(a)$  tienen que ser un mínimo, la condición necesaria para que esto sea así es que para  $a = 0$

$$f'_j = 0 \quad , \quad \forall j = 2, 4, 6, \dots \quad (2.288)$$

Por otra parte, en el límite  $a = a_1$  todos los  $E_j(a_1)$  son iguales a cero y, para  $j > 0$ , los  $F_j(a)$  continúan siendo los determinados por las ecuaciones (2.280), (2.281) y (2.282). Además por (2.267), para  $j = 0$ ,  $4\pi F_0(a_1) = m_1$ , donde  $m_1$  representa la masa total de la configuración. Sustituyéndolas en las ecuaciones (2.277), (2.278) y (2.279) se da que, para  $a = a_1$

$$\begin{aligned} 2f_2 + af'_2 + \frac{5}{3} \frac{\omega^2 a_1^3}{Gm_1} &= \frac{2}{3} \frac{\omega^2 a_1^3}{Gm_1} \left\{ (\eta_2 + 5)f_2 - \frac{1}{7}(2\eta_2^2 + 6\eta_2 + 15)f_2^2 \right\} + \\ &+ \frac{2}{35} \left\{ 5(\eta_2^2 + 3\eta_2 + 6)f_2^2 - (4\eta_2^3 + 30\eta_2^2 + 60\eta_2 + 76)f_2^3 + \right. \\ &\left. + 5(2\eta_2\eta_4 + 3\eta_2 + 3\eta_4 + 26)f_2f_4 \right\} \end{aligned} \quad (2.289)$$

$$\begin{aligned} 4f_4 + af'_4 &= \frac{2}{3} \frac{\omega^2 a_1^3}{Gm_1} \left\{ (\eta_4 + 7)f_4 - \frac{9}{35}(2\eta_2^2 + 10\eta_2 + 21)f_2^2 \right\} + \\ &+ \frac{18}{35}(\eta_2^2 + 5\eta_2 + 6)f_2^2 + \\ &- \frac{36}{385}(3\eta_2^3 + 18\eta_2^2 + 44\eta_2 + 54)f_2^3 + \\ &+ \frac{20}{77}(2\eta_2\eta_4 + 5\eta_4 + 26)f_2f_4 \end{aligned} \quad (2.290)$$

$$6f_6 + af'_6 = -\frac{18}{77}(\eta_2 + 2)(\eta_2^2 + 6\eta_2 + 12)f_2^3 + \frac{5}{11}(2\eta_2\eta_4 + 7\eta_4 + 26)f_2f_4 \quad (2.291)$$

Tal y como se explica a continuación mediante sucesivas aproximaciones, se pueden construir las soluciones particulares del sistema de ecuaciones diferenciales (2.283) a (2.285) especificadas por las condiciones límite (2.288) y de (2.289) a (2.291).

Dentro del esquema de una aproximación de primer orden, (2.283) se reduce a

$$a^2 f_2'' + 6D(af_2' + f_2) = 6f_2 \quad (2.292)$$

que para

$$D = 1 - \kappa a^2 \dots \quad \text{con} \quad \kappa = \left| \frac{\rho''(0)}{5\rho(0)} \right| \quad (2.293)$$

admite, en la proximidad del origen

$$f_2 = k_2 \left( 1 + \frac{3}{7} \kappa a^2 + \dots \right) \quad (2.294)$$

donde  $k_2$  es una constante arbitraria. Integrando la ecuación (2.292) desde cero hasta  $a = a_1$

$$2f_2 + af_2' + \frac{5}{3} \frac{\omega^2 a_1^3}{Gm_1} = 0 \quad (2.295)$$

Esta ecuación puede ser usada para especificar el valor de  $\frac{\omega^2 a_1^3}{Gm_1}$ , que corresponde al valor inicialmente adoptado de  $k_2$ .

A partir de la aproximación de primer orden de  $f_2(a)$ , se puede obtener la segunda aproximación, que consiste en encontrar una solución para las ecuaciones

$$\begin{aligned} a^2 f_2'' + 6D(af_2' + f_2) - 6f_2 &= \frac{2}{7} \{2\tau_2(\tau_2 + 9) - 9\tau_2(\tau_2 + 2)\} f_2^2 + \\ &+ \frac{3\omega^2}{\pi G\rho} (1 - D)(\eta_2 + 1) f_2 \end{aligned} \quad (2.296)$$

$$a^2 f_4'' + 6D(af_4' + f_4) - 20f_4 = \frac{18}{35} \{2\eta_2(\eta_2 + 2) - 3D(3\eta_2^2 + 6\eta_2 + 7)\} f_2^2 \quad (2.297)$$

sujetas a las condiciones de frontera que requieren que, en el centro,

$$f_2'(0) = f_4'(0) = 0 \quad (2.298)$$

mientras que en la superficie  $a = a_1$

$$2f_2 + a_1 f_2' + \frac{5}{3} \frac{\omega^2 a_1^3}{Gm_1} = \frac{1}{7}(2\eta_2^2 + 6\eta_2 + 12)f_2^2 + \frac{2}{3} \frac{\omega^2 a_1^3}{Gm_1}(\eta_2 + 5)f_2^2 \quad (2.299)$$

$$4f_4 + a_1 f_4' = \frac{18}{35}(\eta_2^2 + 5\eta_2 + 6)f_2^2 \quad (2.300)$$

Como la ecuación (2.296) es independiente de  $f_4$ , una solución que satisfaga (2.298) puede desarrollarse, cerca del origen, en series de potencias impares de  $a$ . Si, además, se tiene en cuenta que

$$\frac{3\omega^2}{\pi G \rho} = \frac{D}{\frac{\rho}{\rho_c}} \left( \frac{3\omega^2}{\pi G \rho_c} \right) \quad (2.301)$$

donde  $\rho_c = \rho(0)$

$$\frac{\rho}{\rho_c} = 1 - \frac{5}{2} \kappa a^2 + \dots \quad (2.302)$$

se obtiene

$$f_2 = k_2 \left\{ 1 + \frac{3}{7}(1 + \nu)\kappa a^2 + \frac{3}{14} \left( 1 - \frac{11}{5} \nu \right) \kappa^2 a^4 - \frac{4K_2}{147} \kappa^2 a^4 + \dots \right\} \quad (2.303)$$

en la que

$$\nu = \frac{\omega^2}{2\pi G \rho_c} \quad (2.304)$$

denota una constante.

Además, la estructura de la ecuación (2.297) para  $f_4$  permite ver que, cerca del origen

$$f_4 = k_4 a^2 \left\{ 1 + \frac{18}{55} \kappa a^2 + \dots \right\} + \frac{27}{35} k_2^2 \left\{ 1 - \frac{8}{99} k_2 \kappa^2 a^4 + \frac{156}{385} k_2^{-1} (1 + \nu) \kappa^2 a^4 + \dots \right\} \quad (2.305)$$

El primer término de la ecuación anterior, cuyo factor es  $k_4$ , representa la solución particular de la ecuación homogénea dada por el primer miembro de (2.297). Las constantes  $k_4$  y  $k_2$  se determinan a partir de las condiciones dadas por las ecuaciones (2.299) y (2.300).



Con una aproximación de segundo orden de  $f_2(a)$  cerca del origen, como la representada por la ecuación (2.303), se pueden calcular los miembros derechos de las ecuaciones (2.296) y (2.297) con una aproximación de tercer orden o mayor. En general, la estructura de las ecuaciones diferenciales (2.296) y (2.297), que determinan los  $f_j(a)$  hace evidente que, cerca del origen, la solución particular para cada  $f_j$  variará como  $k_j a^{j-2}$ . Si se toma

$$f_2(0) = k_2 \quad (2.306)$$

de (2.283) a (2.285) se deriva que, (para  $\eta_j(0) = 0$ )

$$f_4(0) = \frac{27}{35} f_2^2(0) + \frac{108}{2695} f_2^3(0) + \dots = \frac{27}{35} \left\{ k_2^2 + \frac{4}{77} k_2^3 + \dots \right\} \quad (2.307)$$

$$f_6(0) = \frac{5}{6} f_2(0) f_4(0) - \frac{9}{154} f_2^3(0) + \dots = \frac{45}{77} k_2^3 + \dots \quad (2.308)$$

y así sucesivamente. Las primeras derivadas de  $f_j$  que no se anulan en el origen, vienen dadas por

$$f_2''(0) = \frac{6}{7} k_2 (1 + \nu) \kappa \quad (2.309)$$

y, para  $j > 2$

$$f_j^{(j-2)}(0) = (j-2)! k_j \quad , \quad j = 4, 6, \dots \quad (2.310)$$

Las constantes  $k_2, k_4, k_6, \dots$  constituyen un conjunto de autovalores de este problema rotacional. Sus valores para cualquier valor dado de  $V = \frac{\omega^2}{2\pi G \rho_c}$  se determinan a partir de las condiciones de frontera dadas por (2.289) a (2.291) en  $a = a_1$ . Además, como los miembros derechos de las ecuaciones (2.283) a (2.285) para  $f_j$  son funciones conocidas de  $f_2, f_4, \dots, f_{j-2}$ , su sistema tiende a una solución por aproximaciones sucesivas: primero se resuelve (2.292) para  $f_2$  en primer orden, a continuación (2.296) y (2.297) para  $f_2$  y  $f_4$  en segundo orden y, finalmente, las tres para  $f_2, f_4$  y  $f_6$  en tercer orden.

Los resultados establecidos en esta sección describen la forma explícita de las amplitudes  $f_j(a)$  en el desarrollo (2.252) para la superficie equipotencial de una configuración en rotación en términos de los polinomios de *Legendre* de la forma  $P_j(\cos \theta)$ .



# Capítulo 3

## Desarrollos en serie de los productos de algunas funciones especiales

### 3.1. Introducción

Los diversos tipos de funciones especiales se han convertido en herramientas esenciales para los científicos y los ingenieros. El estudio de las funciones especiales ha apoyado en gran manera el desarrollo de las matemáticas aplicadas, entre estas funciones se tienen [67], [79]: la función hipergeométrica de *Gauss*, los polinomios de *Legendre*, las funciones asociadas de *Legendre*, los armónicos esféricos, la función hipergeométrica generalizada, la función hipergeométrica de *Wright*, las funciones de *Appell*, etcétera.

Las funciones hipergeométricas aparecen en una diversidad de aplicaciones tales como [79], [55]: estadísticas, mecánica cuántica, ecuaciones funcionales, vibración de placas, conducción de calor, elasticidad, radiación, etcétera.

En 1991 *M. Dotsenko* [26] consideró una generalización de la función hipergeométrica de *Gauss* denotada por  ${}_2R_1^r(z)$ , estableciendo además su representación en serie e integral. *Nina Virchenko* en 1999 [89] estableció algunas fórmulas de diferenciación y relaciones de recurrencia para la función  ${}_2R_1^r(z)$ , en 2001 [91], junto con otros investigadores, obtuvieron una generalización para la función Gamma ( $\Gamma$ ) y además estableció una generalización de las funciones asociadas de *Legendre* [90].

En 2003 *Leda Galué* [33] consideró la función  ${}_2R_1^r(z)$  para introducir un conjunto de fórmulas de recurrencia y de diferenciación que permiten simplificar algunos cálculos complicados.

Más recientemente (2006 [15], 2007 [16], 2008 [17]) *Jaime Castillo* ha obtenido algunos resultados que involucran a la función  ${}_2R_1^r(z)$  y a la generalización de la función Gamma ( $\Gamma$ ).

Por otra parte, en posteriores capítulos del presente trabajo se precisa obtener el producto de polinomios de *Legendre* como combinación lineal de polinomios de *Legendre* y el producto de armónicos esféricos como combinación lineal de armónicos esféricos para la determinación del potencial total en la teoría de las figuras de equilibrio y en la teoría de los sistemas binarios próximos, respectivamente.

A continuación se citan los autores que han elaborado los métodos para llevar a cabo estos desarrollos:

1. *Adams* [3] (1878), para el desarrollo del producto de polinomios de *Legendre*.
2. *Bailey* [9], [10] (1933), para el desarrollo del producto de funciones asociadas de *Legendre*.
3. *López* [60] (1987), para el desarrollo del producto de armónicos esféricos en forma real.

Seguidamente se procederá a la descripción de los métodos citados.

1. *Adams* [3] (1878) determinó el producto de polinomios de *Legendre* como combinación lineal de ellos mediante la siguiente expresión:

$$P_m P_n = \sum_{j=0}^m \frac{A_{m-j} A_j A_{n-j}}{A_{m+n-j}} \frac{2m+2n+1-4j}{2m+2n+1-2j} P_{m+n-2j} \quad \text{si } m \leq n$$

donde  $A_0 = 1$  y, para  $j > 0$ ,

$$A_j = \frac{\prod_{k=1}^j (2k-1)}{j!}$$

2. *Bailey* [9], [10] (1933) determinó el producto de funciones asociadas de *Legendre* como combinación lineal de ellas mediante la expresión:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)^{\frac{m}{2}} P_{n,m} P_{q,m} &= \frac{(n+m)!(q+m)!}{2^m(n-m)!(q-m)!} \sum_{r=0}^{q+m} \frac{\left(\frac{1}{2} - m\right)_r \left(\frac{1}{2}\right)_{n-r}}{(n+m-r)!} \\ &\cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{q-r} (n+q-r)!}{(q+m-r)!} \cdot \frac{2n+2q+2m+1-4r}{2n+2q+2m+1-2r} \\ &\cdot P_{n+q+m-2r,m} \end{aligned}$$

donde

$$n \geq q + 2m \quad , \quad q \geq m$$

siendo

$$(x)_r = x(x-1)\cdots(x-r+1)$$

Como se observa, este trabajo no permite la obtención del producto de dos funciones asociadas de *Legendre* cualesquiera como combinación lineal de funciones asociadas de *Legendre*.

3. *López* [60] (1987) determinó, en primer lugar, el producto de dos funciones asociadas de *Legendre* cualesquiera,  $P_{n,m}$  y  $P_{j,l}$ , como combinación lineal de  $P_{s,m+l}$  y de  $P_{s,|m-l|}$ ; para después obtener el producto de dos armónicos esféricos,  $Y_{n,m}(\theta, \lambda)$  y  $Y_{l,k}(\theta, \lambda)$  ( $0 \leq k \leq m$ ), como combinación lineal de  $Y_{s,m+k}(\theta, \lambda)$  y de  $Y_{r,m-k}(\theta, \lambda)$ .

Sean  $n \geq 0$ ,  $l \geq 0$ ,  $0 \leq m \leq n$  y  $0 \leq k \leq l$

$$P_{n,m}(x)P_{l,k}(x) = \sum_{s=m+k}^{n+l} a_s P_{s,m+k}(x)$$

$$P_{n,m}(x)P_{l,k}(x) = \sum_{r=|m-k|}^{n+l} b_r P_{r,|m-k|}(x)$$

Si  $k < m$

$$P_{n,m}(x)P_{l,k}(x) = (1-x^2)^{\frac{m-k}{2}} \sum_{r=m-k}^{n+l} b_r \frac{d^{m-k} P_r(x)}{dx^{m-k}}$$

$$\begin{aligned}
Y_{n,m}(\theta, \lambda)Y_{l,k}(\theta, \lambda) &= \sum_{s=m+k}^{n+l} R_s^{n,m,l,k} Y_{s,m+k}(\theta, \lambda) + \\
&+ \sum_{r=m-k}^{n+l} T_r^{n,m,l,k} Y_{r,m-k}(\theta, \lambda)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
R_s^{n,m,l,k} &= \frac{1}{2} \frac{C_{n,m} C_{l,k}}{C_{s,m+k}} a_s^{n,m,l,k} \\
T_r^{n,m,l,k} &= \frac{1}{2} \frac{C_{n,m} C_{l,k}}{C_{r,m-k}} b_r^{n,m,l,k}
\end{aligned}$$

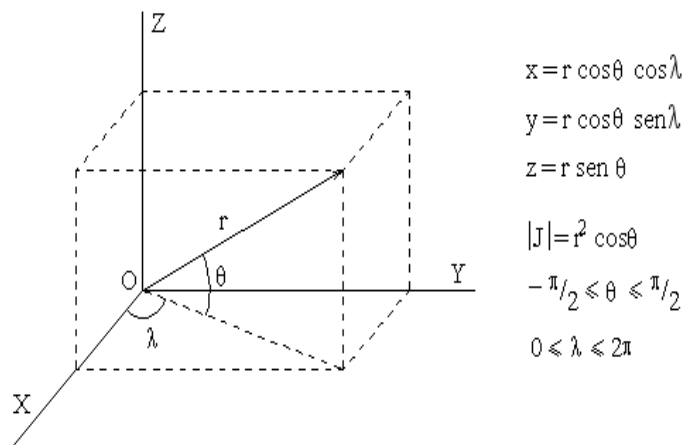
Como se puede observar, *López* [60], en este trabajo sólo utiliza armónicos esféricos,  $Y_{n,m}(\theta, \lambda)$ , para los que  $m > 0$ . Sin embargo, la técnica utilizada para obtener los desarrollos es fácilmente generalizable.

Una alternativa al método utilizado por *López* [60] hubiese sido el valerse de los *Wigner 3j-symbol*, que están relacionados con los coeficientes de *Clebsch-Gordan* (El nombre de coeficientes de *Clebsch-Gordan* deriva de los matemáticos alemanes *Alfred Clebsch* (1833-1872) y *Paul Gordan* (1837-1912)), para confeccionar un código que obtuviera los desarrollos requeridos. No obstante, se desechó la idea por considerarla una tarea demasiado laboriosa.

Aunque los métodos aquí expuestos son de gran interés, no satisfacen los objetivos de obtener unos desarrollos de los productos como combinaciones lineales de los factores para cualquier subíndice. Con la elaboración de un método alternativo a los anteriormente citados, se ha obtenido un procedimiento cuya aplicación permite obtener dichos desarrollos para cualquier subíndice y para cualquier función especial (polinomios de *Legendre*, funciones asociadas de *Legendre* o armónicos esféricos). Para llevar a cabo esto, se procederá, en primer lugar, a sentar las bases sobre las cuales se diseñará el método.

### 3.1.1. Coordenadas esféricas

El sistema de coordenadas esféricas utilizado en el presente trabajo viene definido mediante las siguientes relaciones con el sistema de coordenadas rectangulares



donde  $|J|$  indica el valor absoluto del jacobiano de la transformación.

### 3.1.2. Derivada de orden $n + m$ de un producto

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$ , dos funciones reales de variable real, derivables  $l$ -veces [8]

$$\frac{d^l}{dx^l} (f(x) \cdot g(x)) = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} f^{(l-j)}(x) \cdot g^{(j)}(x) \quad (3.1)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} x^h = \frac{h!}{(h-n)!} x^{h-n} \quad (3.2)$$

con  $h, n \in \mathbb{N} \wedge h \geq n$

De (3.1) y (3.2)

$$\frac{d^l}{dx^l} [(x-1)^n (x+1)^n] = \sum_{j=0}^l \frac{l!}{j!(l-j)!} \cdot \frac{n!}{(n-l+j)!} \cdot \frac{n!}{(n-j)!} (x-1)^{n-l+j} (x+1)^{n-j} \quad (3.3)$$

con  $l, n \in \mathbb{N} \wedge l \leq n$

Si en (3.3) sustituimos  $l$  por  $n + m$ , con  $m \leq n$ , queda

$$\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x-1)^n (x+1)^n] = \sum_{j=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{j!(n+m-j)!} \cdot \frac{n!}{(j-m)!} \cdot \frac{n!}{(n-j)!} (x-1)^{j-m} (x+1)^{n-j} \quad (3.4)$$

La expresión (3.4) solo tiene sentido para  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  porque el factor

que tiene de denominador  $(n - j)!$  solo es válido si  $j \leq n$ . Por lo tanto

$$\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x - 1)^n (x + 1)^n] = \sum_{j=0}^n \frac{(n + m)!}{j!(n + m - j)!} \cdot \frac{n!}{(j - m)!} \cdot \frac{n!}{(n - j)!} (x - 1)^{j-m} (x + 1)^{n-j} \quad (3.5)$$

Como  $(j - m)!$  solo tiene sentido para  $j \geq m$  podemos reescribir la expresión (3.5) de la forma siguiente:

$$\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x - 1)^n (x + 1)^n] = \sum_{j=0}^{n-m} \frac{(n + m)!}{j!(n - m - j)!} \cdot \frac{n!}{(m + j)!} \cdot \frac{n!}{(n - j)!} (x - 1)^j (x + 1)^{n-m-j} \quad (3.6)$$

Por otra parte

$$(x - 1)^j = \sum_{k=0}^j (-1)^k \binom{j}{k} x^{j-k} \quad k, j \in \mathbb{N} \wedge k \leq j$$

$$(x + 1)^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \binom{n-j}{k} x^{n-j-k} \quad n, k, j \in \mathbb{N} \wedge k \leq n - j \wedge j \leq n \quad (3.7)$$

$$\left( \sum_{j=1}^n a_j \right) \left( \sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^m a_j b_k \right) \quad (3.8)$$

De (3.7), (3.8)

$$(x - 1)^j (x + 1)^{n-j} = \sum_{k=0}^j \left( \sum_{h=0}^{n-j} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{n-j}{h} x^{n-k-h} \right) \quad (3.9)$$



Desarrollando el segundo miembro de (3.9) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \text{Coeficiente de } x &= \sum_{t=j-1}^j (-1)^t \binom{j}{t} \binom{n-j}{n-t-1} \\
 \text{Coeficiente de } x^2 &= \sum_{t=j-2}^j (-1)^t \binom{j}{t} \binom{n-j}{n-t-2} \\
 &\dots\dots\dots \\
 \text{Coeficiente de } x^\alpha &= \sum_{t=j-\alpha}^j (-1)^t \binom{j}{t} \binom{n-j}{n-t-\alpha}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

De (3.9), (3.10)

$$(x-1)^j (x+1)^{n-j} = \sum_{\alpha=0}^n \left\{ \sum_{t=\beta}^j (-1)^t \binom{j}{t} \binom{n-j}{n-t-\alpha} \right\} x^\alpha \tag{3.11}$$

con

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } j - \alpha < 0 \\ j - \alpha & \text{si } j - \alpha \geq 0 \end{cases} \wedge \binom{p}{q} = 0 \text{ si } q > p$$

### 3.1.3. Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre,  $P_n(x)$ , son las funciones propias, que corresponden a los valores propios,  $\mu_n = n(n+1) \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , del siguiente problema [86], [103]:

*Hallad los valores  $\mu$ , para los cuales existen, en el segmento  $-1 \leq x \leq 1$ , soluciones no triviales de la ecuación de Legendre*

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \mu y = 0, \quad -1 < x < 1$$

*acotadas para  $x = \pm 1$  y que satisfagan a la condición de normalización  $y(1) = 1$ .*

Una forma de expresar estas soluciones es la conocida como *fórmula de Rodrigues*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \tag{3.12}$$

Por otra parte, los polinomios de *Legendre* de distintos órdenes son ortogonales entre si

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = 0$$

y el cuadrado de su norma viene dado por

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1} \quad (3.13)$$

### 3.1.4. Sistemas de funciones ortogonales

**Definición 1.** *Un sistema de funciones ortogonales  $\{\varphi_n\}$  se llama cerrado, si no existe ninguna función continua, que no sea idénticamente nula, y que sea ortogonal a todas las funciones del sistema dado.*

**Definición 2.** *Un sistema de funciones ortogonales  $\{\varphi_n\}$  se llama completo en el intervalo  $]a, b[$ , si cualquier función continua se puede aproximar en media, con cualquier grado de exactitud, mediante una combinación lineal de las funciones  $\{\varphi_n\}$ .*

En otras palabras,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists S_n = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n, / \int_a^b [f(x) - S_n]^2 dx < \varepsilon$$

Para el sistema completo de funciones  $\{\varphi_n\}$ , tiene lugar la relación

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2$$

donde  $f_n$  son los coeficientes de Fourier de la función  $f(x)$

$$\left( f_n = \frac{1}{N_n} \int_a^b f(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi \right)$$

y  $N_n$  es la norma al cuadrado de las funciones  $\{\varphi_n\}$

$$\left( N_n = \int_a^b \varphi_n^2(\xi) d\xi \right)$$

**Lema 1.** *La propiedad cerrada es una consecuencia de la plenitud*

La plenitud y, con ella, la propiedad cerrada del sistema de polinomios ortogonales de *Legendre*  $\{P_n(x)\}$  es un corolario del teorema de *Weierstrass* sobre la posibilidad de aproximar uniformemente una función continua mediante polinomios [86].

**Teorema 3.1.1 (Weierstrass).**  $\forall f(x)$ , función continua, dada en el intervalo  $]a, b[$  y  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists Q_n(x)$ , polinomio de grado  $n$ , /  $|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$ .

### 3.1.5. Funciones asociadas de *Legendre*

Las funciones asociadas de *Legendre* son las soluciones al problema de hallar los valores propios y las funciones propias de la ecuación [86], [103]

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left( \mu - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0 \quad , \quad -1 < x < 1$$

con la condición de acotación

$$|y(\pm 1)| < \infty$$

Las funciones propias, que son solución del problema, se pueden expresar como

$$P_{n,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (3.14)$$

con  $-1 \leq x \leq 1 \wedge n \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge |m| \leq n$ .  
Éstas se corresponden con los valores propios

$$\lambda_n = n(n+1) \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

Es evidente que  $P_{n,0}(x) = P_n(x)$  y que  $P_{n,m}(x) \neq 0$  para  $m \leq n$ .

Por otra parte, las funciones asociadas de *Legendre* con  $n \neq k$  son ortogonales entre si

$$\int_{-1}^1 P_{n,m}(x) P_{k,m}(x) dx = 0$$

y el cuadrado de su norma viene dado por

$$\|P_{n,m}(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

### 3.1.6. Armónicos esféricos

Los armónicos esféricos se definen como las soluciones acotadas que poseen derivadas segundas continuas de la ecuación diferencial [6], [8], [94], [97]

$$\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \cos \theta \frac{\partial Y_{n,m}(\theta, \lambda)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{n,m}(\theta, \lambda)}{\partial \lambda^2} + n(n+1)Y_{n,m}(\theta, \lambda) = 0$$

siendo  $\theta$  y  $\lambda$  la parametrización de la esfera unidad:

$$x = \cos \theta \cos \lambda$$

$$y = \cos \theta \sin \lambda$$

$$z = \sin \theta$$

Las funciones propias que son solución del problema se pueden expresar:

1. en forma real

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) = \begin{cases} C_R(n, m) \cos m\lambda P_{n,m}(\sin \theta) & \text{si } m \geq 0 \\ C_R(n, m) \sin |m|\lambda P_{n,m}(\sin \theta) & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

$$C_R(n, m) = \eta(m) \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon(m) \pi (n+m)!}}$$

$$\eta(m) = \begin{cases} (-1)^{|m|} & \text{si } m < 0 \\ 1 & \text{si } m \geq 0 \end{cases}$$

$$\epsilon(m) = \begin{cases} 4 & \text{si } m = 0 \\ 2 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

donde

$$n \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge |m| \leq n$$

2. en forma compleja

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) = C_C(n, m) e^{im\lambda} P_{n,m}(\sin \theta)$$

$$C_C(n, m) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}$$

donde

$$n \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge |m| \leq n$$

## 3.2. Desarrollos en serie del producto de polinomios de *Legendre* como combinación lineal de polinomios de *Legendre*

### 3.2.1. Desarrollo en serie de potencias de los polinomios de *Legendre*

De (3.3), (3.12)

$$P_n(x) = \frac{(n!)^2}{2^n} \sum_{j=0}^n \frac{1}{(j!(n-j)!)^2} (x-1)^j (x+1)^{n-j} \quad (3.15)$$

De (3.15), (3.11)

$$P_n(x) = \frac{(n!)^2}{2^n} \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{1}{(j!(n-j)!)^2} \left[ \sum_{\alpha=0}^n \left\{ \sum_{t=\beta}^j (-1)^t \binom{j}{t} \binom{n-j}{n-t-\alpha} \right\} x^\alpha \right] \right\} \quad (3.16)$$

con

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } j - \alpha < 0 \\ j - \alpha & \text{si } j - \alpha \geq 0 \end{cases} \quad \wedge \quad \binom{p}{q} = 0 \quad \text{si } q > p$$

La expresión (3.16) también puede escribirse

$$P_n(x) = \sum_{\alpha=0}^n \left\{ \frac{(n!)^2}{2^n} \sum_{j=0}^n \left[ \frac{1}{(j!(n-j)!)^2} \left\{ \sum_{t=\beta}^j (-1)^t \binom{j}{t} \binom{n-j}{n-t-\alpha} \right\} \right] \right\} x^\alpha \quad (3.17)$$

Asignando

$$S_{P_1}(\alpha, n, j) = \sum_{t=\beta}^j (-1)^t \binom{j}{t} \binom{n-j}{n-\alpha-t}$$

$$S_{P_2}(\alpha, n) = \sum_{j=0}^n \frac{S_{P_1}(\alpha, n, j)}{(j!(n-j)!)^2}$$

la expresión (3.17) queda

$$P_n(x) = \frac{(n!)^2}{2^n} \sum_{\alpha=0}^n S_{P_2}(\alpha, n) x^\alpha \quad (3.18)$$

### 3.2.2. Desarrollo en serie de potencias del producto de dos polinomios de *Legendre*

Sea

$$\left( \sum_{\alpha_1=0}^n D_{\alpha_1} x^{\alpha_1} \right) \left( \sum_{\alpha_2=0}^m E_{\alpha_2} x^{\alpha_2} \right) = \sum_{\gamma=0}^{n+m} \left( \sum_{u=\delta}^l D_u E_{\gamma-u} \right) x^\gamma = \sum_{\gamma=0}^{n+m} X_\gamma x^\gamma \quad (3.19)$$

donde

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{si } m - \gamma \geq 0 \\ |m - \gamma| & \text{si } m - \gamma < 0 \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} \gamma & \text{si } \gamma \leq n \\ n & \text{si } \gamma > n \end{cases}$$

$$n, m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$$

De (3.18)

$$P_n(x) P_m(x) = \frac{(n! m!)^2}{2^{n+m}} \left( \sum_{\alpha_1=0}^n S_{P_2}(\alpha_1, n) x^{\alpha_1} \right) \left( \sum_{\alpha_2=0}^m S_{P_2}(\alpha_2, m) x^{\alpha_2} \right) \quad (3.20)$$

De (3.19), (3.20)

$$P_n(x) P_m(x) = \frac{(n! m!)^2}{2^{n+m}} \sum_{\gamma=0}^{n+m} \left\{ \left( \sum_{u=\delta}^l S_{P_2}(u, n) S_{P_2}(\gamma - u, m) \right) x^\gamma \right\} \quad (3.21)$$

donde

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{si } m - \gamma \geq 0 \\ |m - \gamma| & \text{si } m - \gamma < 0 \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} \gamma & \text{si } \gamma \leq n \\ n & \text{si } \gamma > n \end{cases}$$

$$n, m \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$$

Asignando

$$\chi_P(\gamma, n, m) = \frac{(n! m!)^2}{2^{n+m}} \sum_{u=\delta}^l S_{P_2}(u, n) S_{P_2}(\gamma - u, m)$$

queda

$$P_n(x) P_m(x) = \sum_{\gamma=0}^{n+m} \chi_P(\gamma, n, m) x^\gamma \quad (3.22)$$

### 3.2.3. Cálculo de las integrales $\int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt$

Sea

$$\int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt; \quad \forall n, m \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt &= \int_{-1}^1 t^m \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n] dt = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 t^m \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n] dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} U = t^m \quad dV = \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n] \\ dU = m t^{m-1} dt \quad V = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [(t^2 - 1)^n] \end{array} \right\} = -\frac{m}{2^n n!} \int_{-1}^1 t^{m-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [(t^2 - 1)^n] dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

De (3.24)

\* Si  $m < n$

$$\int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt = (-1)^m \frac{m!}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}} [(t^2 - 1)^n] dt = 0 \quad (3.25)$$

\* Si  $m = n$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt &= (-1)^n \frac{n!}{2^n n!} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt = \frac{(-1)^{2n}}{2^n} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t + 1 = x \\ dt = dx \end{array} \right\} = 2^n \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n dx = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = y \\ dx = 2 dy \end{array} \right\} = \\ &= 2^{n+1} \int_0^1 (1 - y)^n y^n dy = 2^{n+1} \beta(n + 1, n + 1) = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n + 1)!} \end{aligned} \quad (3.26)$$

\* Si  $m > n$

$$\int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt = (-1)^m \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{2^n n!} \int_{-1}^1 t^{m-n} (t^2 - 1)^n dt \quad (3.27)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 t^{m-n} (t^2 - 1)^n &= (-1)^n \int_{-1}^1 t^{m-n} (1 - t^2)^n = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \\
&= (-1)^n \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^{m-n} x \cos^{2n+1} x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-n} x \cos^{2n+1} x dx \right) = \\
&= (-1)^m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-n} x \cos^{2n+1} x dx + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-n} x \cos^{2n+1} x dx = \\
&= \frac{(-1)^m + (-1)^n}{2} \beta \left( \frac{m-n+1}{2}, n+1 \right) = \frac{(-1)^m + (-1)^n}{2} \frac{n! \Gamma \left( \frac{m-n+1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{m+n+3}{2} \right)} \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\Gamma \left( \frac{m+n+3}{2} \right) = \frac{(m+n+1)(m+n-1) \cdots (m-n+1)}{2^{n+1}} \Gamma \left( \frac{m-n+1}{2} \right) \quad (3.29)$$

De (3.27), (3.28), (3.29)

$$\int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt = (1 + (-1)^{m+n}) \frac{m! (m-n-1)!!}{(m+n+1)!! (m-n)!} \quad (3.30)$$

### 3.2.4. Integral del producto de tres polinomios de Legendre

Sea

$$I_L(n, m, r) = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) P_r(x) dx; \quad \forall n, m, r \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \quad (3.31)$$

De (3.22), (3.25), (3.26), (3.30) y (3.31)

$$I_L(n, m, r) = \chi_P(r, n, m) \frac{2^{r+1} (r!)^2}{(2r+1)!} + \sum_{j=r+1}^{n+m} \left( \chi_P(j, n, m) (1 + (-1)^{j+r}) \frac{j! (j-r-1)!!}{(j+r+1)!! (j-r)!} \right) \quad (3.32)$$



### 3.2.5. Desarrollo del producto de dos polinomios de *Legendre* como combinación lineal de polinomios de *Legendre*

El problema a resolver en este apartado es encontrar un desarrollo, en serie de polinomios de *Legendre*, del producto de polinomios de *Legendre*. Es decir,

$$P_n(x) P_r(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j P_j(x) \quad (3.33)$$

donde

$$a_j = \frac{1}{\|P_j(x)\|^2} \int_{-1}^1 P_n(x) P_r(x) P_j(x) dx \quad (3.34)$$

De (3.32), (3.33), (3.34)

$$P_n(x) P_r(x) = \sum_{j=|n-r|}^{n+r} \frac{2j+1}{2} I_L(n, r, j) P_j(x) \quad (3.35)$$

## 3.3. Desarrollos en serie del producto de funciones asociadas de *Legendre* como combinación lineal de funciones asociadas de *Legendre*

### 3.3.1. Desarrollo en serie de potencias de las funciones asociadas de *Legendre*

De (3.12), (3.14)

$$P_{n,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (3.36)$$

De (3.6), (3.11)

$$\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n = (n+m)!(n!)^2 \sum_{j=0}^{n-m} \left( \frac{1}{j!(n-m-j)!(m+j)!(n-j)!} \left( \sum_{\alpha=0}^{n-m} \left( \sum_{t=\beta}^j (-1)^t \binom{j}{t} \binom{n-m-j}{n-m-\alpha-t} \right) x^\alpha \right) \right) \quad (3.37)$$

La expresión (3.37) también puede escribirse como

$$\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2 - 1)^n = (n+m)!(n!)^2.$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n-m} \left( \sum_{j=0}^{n-m} \left( \frac{1}{j!(n-m-j)!(m+j)!(n-j)!} \left( \sum_{t=\beta}^j (-1)^t \binom{j}{t} \binom{n-m-j}{n-m-\alpha-t} \right) \right) \right) x^\alpha \quad (3.38)$$

De (3.36), (3.38)

$$P_{n,m}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}} (n+m)! n!}{2^n}.$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n-m} \left( \sum_{j=0}^{n-m} \left( \frac{1}{j!(n-m-j)!(m+j)!(n-j)!} \left( \sum_{t=\beta}^j (-1)^t \binom{j}{t} \binom{n-m-j}{n-m-\alpha-t} \right) \right) \right) x^\alpha \quad (3.39)$$

Asignando

$$S_1(\alpha, n, m, j) = \sum_{t=\beta}^j (-1)^t \binom{j}{t} \binom{n-m-j}{n-m-\alpha-t}$$

$$S_2(\alpha, n, m) = \sum_{j=0}^{n-m} \frac{S_1(\alpha, n, m, j)}{j!(n-m-j)!(m+j)!(n-j)!}$$

la expresión (3.39) queda

$$P_{n,m}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}} (n+m)! n!}{2^n} \sum_{\alpha=0}^{n-m} S_2(\alpha, n, m) x^\alpha \quad (3.40)$$

### 3.3.2. Desarrollo en serie de potencias del producto de tres funciones asociadas de *Legendre*

Producto de dos series

$$\left( \sum_{\alpha_1=0}^{n-m} D_{\alpha_1} x^{\alpha_1} \right) \left( \sum_{\alpha_2=0}^{r-s} E_{\alpha_2} x^{\alpha_2} \right) = \sum_{\gamma=0}^{n+r-m-s} \left( \sum_{u=\delta}^l D_u E_{\gamma-u} \right) x^\gamma = \sum_{\gamma=0}^{n+r-m-s} X_\gamma x^\gamma \quad (3.41)$$

donde

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{si } r - s - \gamma \geq 0 \\ |r - s - \gamma| & \text{si } r - s - \gamma < 0 \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} \gamma & \text{si } \gamma \leq n - m \\ n - m & \text{si } \gamma > n - m \end{cases}$$

$$n, m, r, s \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \leq n \wedge s \leq r$$

### Producto de tres series

$$\left( \sum_{\gamma=0}^{n+r-m-s} X_{\gamma} x^{\gamma} \right) \left( \sum_{\alpha_3=0}^{p-q} H_{\alpha_3} x^{\alpha_3} \right) = \sum_{\gamma_1=0}^{n+r+p-m-s-q} \left( \sum_{u_1=\delta_1}^{l_1} X_{u_1} H_{\gamma_1-u_1} \right) x^{\gamma_1} \quad (3.42)$$

donde

$$\delta_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } p - q - \gamma_1 \geq 0 \\ |p - q - \gamma_1| & \text{si } p - q - \gamma_1 < 0 \end{cases}$$

$$l_1 = \begin{cases} \gamma_1 & \text{si } \gamma_1 \leq n + r - m - s \\ n + r - m - s & \text{si } \gamma_1 > n + r - m - s \end{cases}$$

$$X_{\gamma} = \sum_{u=\delta}^l D_u E_{\gamma-u}$$

$$n, m, r, s, p, q \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \leq n \wedge s \leq r \wedge q \leq p$$

De (3.40)

$$P_{n,m}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}(n+m)!n!}{2^n} \sum_{\alpha_1=0}^{n-m} S_2(\alpha_1, n, m) x^{\alpha_1} \quad (3.43)$$

$$P_{r,s}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{s}{2}}(r+s)!r!}{2^r} \sum_{\alpha_2=0}^{r-s} S_2(\alpha_2, r, s) x^{\alpha_2} \quad (3.44)$$

$$P_{p,q}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{q}{2}}(p+q)!p!}{2^p} \sum_{\alpha_3=0}^{p-q} S_2(\alpha_3, p, q) x^{\alpha_3} \quad (3.45)$$

De (3.43), (3.44), (3.45)

$$P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) P_{p,q}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m+s+q}{2}} (n+m)! n! (r+s)! r! (p+q)! p!}{2^{n+r+p}}$$

$$\left( \sum_{\alpha_1=0}^{n-m} S_2(\alpha_1, n, m) x^{\alpha_1} \right) \left( \sum_{\alpha_2=0}^{r-s} S_2(\alpha_2, r, s) x^{\alpha_2} \right) \left( \sum_{\alpha_3=0}^{p-q} S_2(\alpha_3, p, q) x^{\alpha_3} \right) \quad (3.46)$$

De (3.41), (3.42), (3.46)

$$P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) P_{p,q}(x) = \frac{(n+m)! n! (r+s)! r! (p+q)! p!}{2^{n+r+p}}$$

$$\sum_{\gamma_1=0}^{n+r+p-(m+s+q)} \left\{ \left( \sum_{u_1=\delta_1}^{l_1} \chi_{u_1} S_2(\gamma_1 - u_1, p, q) \right) (1-x^2)^{\frac{m+s+q}{2}} x^{\gamma_1} \right\} \quad (3.47)$$

donde

$$\delta_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } p - q - \gamma_1 \geq 0 \\ |p - q - \gamma_1| & \text{si } p - q - \gamma_1 < 0 \end{cases}$$

$$l_1 = \begin{cases} \gamma_1 & \text{si } \gamma_1 \leq n + r - m - s \\ n + r - m - s & \text{si } \gamma_1 > n + r - m - s \end{cases}$$

$$\chi_{u_1} = \sum_{u=\delta}^l S_2(u, n, m) S_2(u_1 - u, r, s)$$

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{si } r - s - u_1 \geq 0 \\ |r - s - u_1| & \text{si } r - s - u_1 < 0 \end{cases}$$

$$l = \begin{cases} u_1 & \text{si } u_1 \leq n - m \\ n - m & \text{si } u_1 > n - m \end{cases}$$

$$n, m, r, s, p, q \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \leq n \wedge s \leq r \wedge q \leq p$$

Asignando

$$\chi\chi(\gamma_1, n, m, r, s, p, q) = \sum_{u_1=\delta_1}^{l_1} \chi_{u_1} S_2(\gamma_1 - u_1, p, q)$$

$$P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) P_{p,q}(x) = \frac{(n+m)! n! (r+s)! r! (p+q)! p!}{2^{n+r+p}}$$

$$\sum_{\gamma_1=0}^{n+r+p-(m+s+q)} \left\{ \chi\chi(\gamma_1, n, m, r, s, p, q) (1-x^2)^{\frac{m+s+q}{2}} x^{\gamma_1} \right\} \quad (3.48)$$

Para  $m = s = q = 0$ , (3.48) expresa el producto de tres polinomios de *Legendre*

$$P_n(x) P_r(x) P_p(x) = \frac{(n!)^2 (r!)^2 (p!)^2}{2^{n+r+p}} \sum_{\gamma_1=0}^{n+r+p} \left\{ \chi\chi(\gamma_1, n, 0, r, 0, p, 0) x^{\gamma_1} \right\} \quad (3.49)$$

### 3.3.3. Integral del producto de tres funciones asociadas de *Legendre*

Sea

$$\int_{-1}^1 P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) P_{p,q}(x) dx$$

donde

$$n, m, r, s, p, q \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \leq n \wedge s \leq r \wedge q \leq p$$

De (3.48)

$$\int_{-1}^1 P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) P_{p,q}(x) dx = \frac{(n+m)! n! (r+s)! r! (p+q)! p!}{2^{n+r+p}} \sum_{\alpha=0}^{n+r+p-(m+s+q)} \left\{ \chi\chi(\alpha, n, m, r, s, p, q) \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{m+s+q}{2}} x^\alpha dx \right\} \quad (3.50)$$

Sea

$$I(\alpha, z) = \int_{-1}^1 x^\alpha (1-x^2)^{\frac{z}{2}} dx \quad (3.51)$$

con  $\alpha, z \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$

$$\begin{aligned} I(\alpha, z) &= \int_{-1}^1 x^\alpha (1-x^2)^{\frac{z}{2}} dx = \int_{-1}^0 x^\alpha (1-x^2)^{\frac{z}{2}} dx + \int_0^1 x^\alpha (1-x^2)^{\frac{z}{2}} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin \theta \\ dx = \cos \theta d\theta \end{array} \right\} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^\alpha \theta \cos^{z+1} \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha \theta \cos^{z+1} \theta d\theta = \\ &= ((-1)^\alpha + 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha \theta \cos^{z+1} \theta d\theta = \frac{(-1)^\alpha + 1}{2} \beta \left( \frac{\alpha+1}{2}, \frac{z}{2} + 1 \right) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha+1}{2} > 0 \\ \frac{z}{2} + 1 > 0 \end{array} \right\} = \frac{1 + (-1)^\alpha}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2} + \frac{z}{2} + 1\right)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$I(\alpha, z) = \frac{1 + (-1)^\alpha}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2} + \frac{z}{2} + 1\right)} \quad (3.52)$$

Por otro lado

$$\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\alpha-1}{2} \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(\alpha-1)!! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{\frac{\alpha}{2}}} \quad (3.53)$$

\* Si  $z = \dot{2}$

$$\Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right) = \frac{z}{2} \cdots 1 = \left(\frac{z}{2}\right)! \quad (3.54)$$

$$\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2} + \frac{z}{2} + 1\right) = \left(\frac{\alpha+z+1}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(\alpha+z+1)!! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{\frac{\alpha+z}{2}+1}} \quad (3.55)$$

\* Si  $z = \dot{2} + 1$

$$\Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right) = \frac{z}{2} \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{z!! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{\frac{z+1}{2}}} \quad (3.56)$$

$$\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2} + \frac{z}{2} + 1\right) = \left(\frac{\alpha+z+1}{2}\right) \cdots 1 = \frac{(\alpha+z+1)!!}{2^{\frac{\alpha+z+1}{2}}} \quad (3.57)$$

En resumen, de (3.52), (3.53), (3.54), (3.55), (3.56), (3.57)

$$I(\alpha, z) = \begin{cases} \frac{1+(-1)^\alpha}{2} \frac{(\alpha-1)!! \left(\frac{z}{2}\right)! 2^{\frac{z}{2}+1}}{(\alpha+z+1)!!} & \text{si } z = \dot{2} \\ \frac{1+(-1)^\alpha}{2} \frac{(\alpha-1)!! z!! \pi}{(\alpha+z+1)!!} & \text{si } z = \dot{2} + 1 \end{cases} \quad \forall \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \quad (3.58)$$

De (3.50), (3.58)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) P_{p,q}(x) dx = \\ & = \frac{(n+m)! n! (r+s)! r! (p+q)! p!}{2^{n+r+p}} \cdot \sum_{\alpha=0}^{n+r+p-(m+s+q)} \{\chi\chi(\alpha, n, m, r, s, p, q) I(\alpha, m+s+q)\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

con

$$n, m, r, s, p, q \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \leq n \wedge s \leq r \wedge q \leq p$$

En general

$$\int_{-1}^1 P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) P_{p,q}(x) dx = \eta(m) \eta(s) \eta(q).$$

$$\frac{(n+m)! n! (r+s)! r! (p+q)! p!}{2^{n+r+p}} \sum_{\alpha=0}^{n+r+p-(|m|+|s|+|q|)} \{\chi\chi(\alpha, n, |m|, r, |s|, p, |q|) I(\alpha, |m| + |s| + |q|)\} \quad (3.60)$$

con

$$\eta(m) = \begin{cases} (-1)^{|m|} & \text{si } m < 0 \\ 1 & \text{si } m \geq 0 \end{cases}$$

$$n, m, r \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m, s, q \in \mathbb{Z} \wedge |m| \leq n \wedge |s| \leq r \wedge |q| \leq p$$

Para el caso particular de  $m = s = q = 0$  se obtiene

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_r(x) P_p(x) dx = \frac{(n!)^2 (r!)^2 (p!)^2}{2^{n+r+p}} \sum_{\alpha=0}^{n+r+p} \left\{ \chi\chi(\alpha, n, 0, r, 0, p, 0) \frac{1 + (-1)^\alpha}{\alpha + 1} \right\} \quad (3.61)$$

### 3.3.4. Desarrollo del producto de dos funciones asociadas de *Legendre* como combinación lineal de funciones asociadas de *Legendre*

**Teorema 3.3.1 (Desarrollo de una función en serie de funciones asociadas de *Legendre*).** *Las funciones asociadas de Legendre  $P_{n,m}(x)$  constituyen una base ortogonal completa del espacio de funciones de cuadrado integrable. Para una función  $f(x)$  de este espacio [6], [8]:*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i a_{i,j} P_{i,j}(x) \quad (3.62)$$

donde

$$a_{i,j} = \frac{1}{\|P_{i,j}(x)\|^2} \int_{-1}^1 f(x) P_{i,j}(x) dx$$

Si las dos primeras derivadas de  $f(x)$  son continuas, la serie de (3.62) converge absoluta y uniformemente .

El problema a resolver en este apartado es encontrar un desarrollo, en serie de funciones asociadas de *Legendre*, del producto de funciones asociadas de *Legendre*. Es decir,

$$P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p a_{p,q} P_{p,q}(x)$$

con

$$a_{p,q} = \frac{1}{\|P_{p,q}(x)\|^2} \int_{-1}^1 P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) P_{p,q}(x) dx$$

Por otra parte, renombramos a (3.60) por

$$I_{FA}(n, m, r, s, p, q) = \int_{-1}^1 P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) P_{p,q}(x) dx$$

A continuación se analizará cómo se desarrolla el producto de dos funciones asociadas de *Legendre* en serie de funciones asociadas de *Legendre*. Para ello se estudiarán diversas posibilidades de desarrollo que existen.

$$\boxed{\text{Posibilidad 1}} \quad n, r, m, s \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \leq n \wedge s \leq r$$

$$\begin{aligned} P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) &= (1-x^2)^{\frac{m+s}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n-m) \cdot (\text{Polinomio de grado } r-s) = \\ &= (1-x^2)^{\frac{m+s}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m-s) \end{aligned}$$

Para un  $m+s$  fijo,  $\{P_{p,m+s}(x)\}_{p=m+s}^{\infty}$  es una base ortogonal de  $L^2$ . En consecuencia,

$$P_{m+s,m+s}(x) = (1-x^2)^{\frac{m+s}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 0)$$

$$P_{m+s+1,m+s}(x) = (1-x^2)^{\frac{m+s}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 1)$$

.....

$$P_{n+r,m+s}(x) = (1-x^2)^{\frac{m+s}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m-s)$$



Con lo que

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{i=m+s}^{n+r} A_i \cdot P_{i,m+s}(x) \quad (3.63)$$

donde

$$A_i = \frac{I_{FA}(n, m, r, s, i, m+s)}{\|P_{i,m+s}(x)\|^2}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) &= (1-x^2)^{\frac{m-s}{2}} \cdot (1-x^2)^s \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m-s) = \\ &= (1-x^2)^{\frac{m-s}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m+s) \quad \text{si } m > s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) &= (1-x^2)^{\frac{s-m}{2}} \cdot (1-x^2)^m \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m-s) = \\ &= (1-x^2)^{\frac{s-m}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m-s) \quad \text{si } s > m \end{aligned}$$

Es decir,

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = (1-x^2)^{\frac{|m-s|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-|m-s|)$$

Para un  $|m-s|$  fijo,  $\{P_{p,|m-s|}(x)\}_{p=|m-s|}^{\infty}$  es una base ortogonal de  $L^2$ . En consecuencia,

$$P_{|m-s|,|m-s|}(x) = (1-x^2)^{\frac{|m-s|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 0)$$

$$P_{|m-s|+1,|m-s|}(x) = (1-x^2)^{\frac{|m-s|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 1)$$

.....

$$P_{n+r,|m-s|}(x) = (1-x^2)^{\frac{|m-s|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-|m-s|)$$

Con lo que

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{j=|m-s|}^{n+r} B_j \cdot P_{j,|m-s|}(x) \quad (3.64)$$

donde

$$B_j = \frac{I_{FA}(n, m, r, s, j, |m-s|)}{\|P_{j,|m-s|}(x)\|^2}$$

$$\boxed{\text{Posibilidad 2}} \quad n, r, m \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge s \in \mathbb{Z}^- \wedge m \leq n \wedge |s| \leq r$$

Sea  $s = -s_1 \wedge s_1 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) &= P_{n,m}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = \\ &= (1-x^2)^{\frac{m-s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m+s_1) = \\ &= (1-x^2)^{-\frac{m+s_1}{2}} \cdot (1-x^2)^m \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m+s_1) = \\ &= (1-x^2)^{-\frac{m+s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m+s_1) \end{aligned}$$

Para un  $-(m+s_1)$  fijo,  $\{P_{p,-(m+s_1)}(x)\}_{p=m+s_1}^{\infty}$  es una base ortogonal de  $L^2$ . En consecuencia,

$$P_{m+s_1,-(m+s_1)}(x) = (1-x^2)^{-\frac{m+s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 2(m+s_1))$$

$$P_{m+s_1+1,-(m+s_1)}(x) = (1-x^2)^{-\frac{m+s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 2(m+s_1)+1)$$

.....

$$P_{n+r,-(m+s_1)}(x) = (1-x^2)^{-\frac{m+s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m+s_1)$$

Con lo que

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = \sum_{i=m+s_1}^{n+r} A_i \cdot P_{i,-(m+s_1)}(x) \quad (3.65)$$

Por lo tanto

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{i=m-s}^{n+r} A_i \cdot P_{i,s-m}(x) \quad (3.66)$$

donde

$$A_i = \frac{I_{FA}(n, m, r, s, i, s-m)}{\|P_{i,s-m}(x)\|^2}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) &= P_{n,m}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = \\
 &= (1-x^2)^{\frac{m-s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m+s_1) = \\
 &= (1-x^2)^{\frac{s_1-m}{2}} \cdot (1-x^2)^{m-s_1} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m+s_1) = \\
 &= (1-x^2)^{\frac{s_1-m}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m-s_1) \quad \text{si } m > s_1
 \end{aligned}$$

Análogamente

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = (1-x^2)^{\frac{m-s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m+s_1) \quad \text{si } m < s_1$$

Es decir,

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = (1-x^2)^{-\frac{|m-s_1|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+|m-s_1|)$$

Para un  $-|m-s_1|$  fijo,  $\{P_{p,-|m-s_1|}(x)\}_{p=|m-s_1|}^{\infty}$  es una base ortogonal de  $L^2$ . En consecuencia,

$$P_{|m-s_1|,-|m-s_1|}(x) = (1-x^2)^{-\frac{|m-s_1|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 2|m-s_1|)$$

$$P_{|m-s_1|+1,-|m-s_1|}(x) = (1-x^2)^{-\frac{|m-s_1|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 2|m-s_1|+1)$$

.....

$$P_{n+r,-|m-s_1|}(x) = (1-x^2)^{-\frac{|m-s_1|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+|m-s_1|)$$

Con lo que

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = \sum_{j=|m-s_1|}^{n+r} B_j \cdot P_{j,-|m-s_1|}(x) \quad (3.67)$$

Por lo tanto

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{j=|m+s|}^{n+r} B_j \cdot P_{j,-|m+s|}(x) \quad (3.68)$$

donde

$$B_j = \frac{I_{FA}(n, m, r, s, j, -|m+s|)}{\|P_{j,-|m+s|}(x)\|^2}$$

$$\boxed{\text{Posibilidad 3}} \quad n, r, s \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \in \mathbb{Z}^- \wedge |m| \leq n \wedge s \leq r$$

Sea  $m = -m_1 \wedge m_1 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) &= P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \\ &= (1-x^2)^{\frac{s-m_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m_1-s) = \\ &= (1-x^2)^{-\frac{m_1+s}{2}} \cdot (1-x^2)^s \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m_1-s) = \\ &= (1-x^2)^{-\frac{m_1+s}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m_1+s) \end{aligned}$$

Para un  $-(m_1+s)$  fijo,  $\{P_{p,-(m_1+s)}(x)\}_{p=m_1+s}^{\infty}$  es una base ortogonal de  $L^2$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} P_{m_1+s,-(m_1+s)}(x) &= (1-x^2)^{-\frac{m_1+s}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 2(m_1+s_1)) \\ P_{m_1+s_1+1,-(m_1+s_1)}(x) &= (1-x^2)^{-\frac{m_1+s}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 2(m_1+s)+1) \\ &\dots\dots\dots \\ P_{n+r,-(m_1+s)}(x) &= (1-x^2)^{-\frac{m_1+s}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m_1+s) \end{aligned}$$

Con lo que

$$P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{i=m_1+s}^{n+r} A_i \cdot P_{i,-(m_1+s)}(x) \quad (3.69)$$

Por lo tanto

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{i=s-m}^{n+r} A_i \cdot P_{i,m-s}(x) \tag{3.70}$$

donde

$$A_i = \frac{I_{FA}(n, m, r, s, i, m - s)}{\| P_{i,m-s}(x) \|^2}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) &= P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,s}(x) = (1 - x^2)^{\frac{s-m_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n + r + m_1 - s) = \\ &= (1 - x^2)^{\frac{m_1-s}{2}} \cdot (1 - x^2)^{s-m_1} \cdot (\text{Polinomio de grado } n + r + m_1 - s) = \\ &= (1 - x^2)^{\frac{m_1-s}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n + r - m_1 + s) \quad \text{si } s > m_1 \end{aligned}$$

Análogamente

$$P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,s}(x) = (1 - x^2)^{\frac{s-m_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n + r + m_1 - s) \quad \text{si } s < m_1$$

Es decir,

$$P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,s}(x) = (1 - x^2)^{-\frac{|s-m_1|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n + r + |s - m_1|)$$

Para un  $-|s - m_1|$  fijo,  $\{P_{p,-|s-m_1|}(x)\}_{p=|s-m_1|}^{\infty}$  es una base ortogonal de  $L^2$ . En consecuencia,

$$P_{|s-m_1|,-|s-m_1|}(x) = (1 - x^2)^{-\frac{|s-m_1|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 2|s - m_1|)$$

$$P_{|s-m_1|+1,-|s-m_1|}(x) = (1 - x^2)^{-\frac{|s-m_1|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 2|s - m_1| + 1)$$

.....

$$P_{n+r,-|s-m_1|}(x) = (1 - x^2)^{-\frac{|s-m_1|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n + r + |s - m_1|)$$

Con lo que

$$P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{j=|s-m_1|}^{n+r} B_j \cdot P_{j,-|s-m_1|}(x) \tag{3.71}$$

Por lo tanto

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{j=|m+s|}^{n+r} B_j \cdot P_{j,-|m+s|}(x) \tag{3.72}$$

donde

$$B_j = \frac{I_{FA}(n, m, r, s, j, -|m+s|)}{\|P_{j,-|m+s|}(x)\|^2}$$

Posibilidad 4  $n, r \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m, s \in \mathbb{Z}^- \wedge |m| \leq n \wedge |s| \leq r$

Sea  $m = -m_1 \wedge s = -s_1 \wedge m_1, s_1 \in \mathbb{N}$

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = (1-x^2)^{-\frac{m_1+s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m_1+s_1)$$

Para un  $-(m_1+s_1)$  fijo,  $\{P_{p,-(m_1+s_1)}(x)\}_{p=m_1+s_1}^\infty$  es una base ortogonal de  $L^2$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} P_{m_1+s_1,-(m_1+s_1)}(x) &= (1-x^2)^{-\frac{m_1+s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 2(m_1+s_1)) \\ P_{m_1+s_1+1,-(m_1+s_1)}(x) &= (1-x^2)^{-\frac{m_1+s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } 2(m_1+s_1)+1) \\ &\dots\dots\dots \\ P_{n+r,-(m_1+s_1)}(x) &= (1-x^2)^{-\frac{m_1+s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m_1+s_1) \end{aligned}$$

Con lo que

$$P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = \sum_{i=m_1+s_1}^{n+r} A_i \cdot P_{i,-(m_1+s_1)}(x) \tag{3.73}$$

Por lo tanto

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{i=-m-s}^{n+r} A_i \cdot P_{i,m+s}(x) \quad (3.74)$$

donde

$$A_i = \frac{I_{FA}(n, m, r, s, i, m+s)}{\|P_{i,m+s}(x)\|^2}$$

$$\boxed{\text{Posibilidad 5}} \quad n, r \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m, s \in \mathbb{Z}^- \wedge |m| \leq n \wedge |s| \leq r$$

Sea  $m = -m_1 \wedge s = -s_1 \wedge m_1, s_1 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) &= P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = (1-x^2)^{-\frac{m_1+s_1}{2}} \cdot \\ &\quad \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m_1+s_1) = \\ &= (1-x^2)^{\frac{m_1+s_1}{2}} \cdot (1-x^2)^{-(m_1+s_1)} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m_1+s_1) = \\ &= (1-x^2)^{\frac{m_1+s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m_1-s_1) \end{aligned}$$

De (3.63)

$$P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = \sum_{i=m_1+s_1}^{n+r} A_i \cdot P_{i,m_1+s_1}(x) \quad (3.75)$$

Por lo tanto

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{i=|m+s|}^{n+r} A_i \cdot P_{i,|m+s|}(x) \quad (3.76)$$

donde

$$A_i = \frac{I_{FA}(n, m, r, s, i, |m+s|)}{\|P_{i,|m+s|}(x)\|^2}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) &= (1-x^2)^{-\frac{m_1+s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m_1+s_1) = \\ &= (1-x^2)^{\frac{m_1-s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m_1+s_1) \quad \text{si } m_1 > s_1 \\ P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) &= (1-x^2)^{-\frac{m_1+s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m_1+s_1) = \\ &= (1-x^2)^{\frac{s_1-m_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r+m_1-s_1) \quad \text{si } m_1 < s_1 \end{aligned}$$

Es decir,

$$P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = (1-x^2)^{\frac{|m_1-s_1|}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-|m_1-s_1|)$$

De (3.64)

$$P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = \sum_{j=|m_1-s_1|}^{n+r} B_j \cdot P_{j,|m_1-s_1|}(x) \tag{3.77}$$

Por lo tanto

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{j=|m-s|}^{n+r} B_j \cdot P_{j,|m-s|}(x) \tag{3.78}$$

donde

$$B_j = \frac{I_{FA}(n, m, r, s, j, |m-s|)}{\|P_{j,|m-s|}(x)\|^2}$$

Posibilidad 6  $n, r, m \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge s \in \mathbb{Z}^- \wedge m \leq n \wedge |s| \leq r$

Sea  $s = -s_1 \wedge s_1 \in \mathbb{N}$

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = P_{n,m}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = (1-x^2)^{\frac{m-s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m+s_1)$$

Para un  $m-s_1$  fijo,  $\{P_{p,m-s_1}(x)\}_{p=|m-s_1|}^{\infty}$  es una base ortogonal de  $L^2$ . En consecuencia,

$$P_{|m-s_1|,m-s_1}(x) = (1-x^2)^{\frac{m-s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } |m-s_1|-m+s_1)$$

$$P_{|m-s_1|+1,m-s_1}(x) = (1-x^2)^{\frac{m-s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } |m-s_1|+1-m+s_1)$$

.....

$$P_{n+r,m-s_1}(x) = (1-x^2)^{\frac{m-s_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n+r-m+s_1)$$

Con lo que

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,-s_1}(x) = \sum_{i=|m-s_1|}^{n+r} A_i \cdot P_{i,m-s_1}(x) \tag{3.79}$$



Por lo tanto

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{i=|m+s|}^{n+r} A_i \cdot P_{i,m+s}(x) \tag{3.80}$$

donde

$$A_i = \frac{I_{FA}(n, m, r, s, i, m + s)}{\| P_{i,m+s}(x) \|^2}$$

Posibilidad 7  $n, r, s \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \in \mathbb{Z}^- \wedge |m| \leq n \wedge s \leq r$

Sea  $m = -m_1 \wedge m_1 \in \mathbb{N}$

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,s}(x) = (1 - x^2)^{\frac{s-m_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n + r + m_1 + s)$$

Para un  $s - m_1$  fijo,  $\{P_{p,s-m_1}(x)\}_{p=|s-m_1|}^\infty$  es una base ortogonal de  $L^2$ . En consecuencia,

$$P_{|s-m_1|,s-m_1}(x) = (1 - x^2)^{\frac{s-m_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } |s - m_1| - s + m_1)$$

$$P_{|s-m_1|+1,s-m_1}(x) = (1 - x^2)^{\frac{s-m_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } |s - m_1| + 1 - s + m_1)$$

.....

$$P_{n+r,s-m_1}(x) = (1 - x^2)^{\frac{s-m_1}{2}} \cdot (\text{Polinomio de grado } n + r - s + m_1)$$

Con lo que

$$P_{n,-m_1}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{i=|s-m_1|}^{n+r} A_i \cdot P_{i,s-m_1}(x) \tag{3.81}$$

Por lo tanto

$$P_{n,m}(x) \cdot P_{r,s}(x) = \sum_{i=|m+s|}^{n+r} A_i \cdot P_{i,m+s}(x) \tag{3.82}$$

donde

$$A_i = \frac{I_{FA}(n, m, r, s, i, m + s)}{\| P_{i,m+s}(x) \|^2}$$

**Posibilidad 8**  $n, r \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m = s = 0$

$$P_n(x) \cdot P_r(x) = \sum_{i=|n-r|}^{n+r} A_i \cdot P_i(x) \quad (3.83)$$

donde

$$A_i = \frac{I_{FA}(n, 0, r, 0, i, 0)}{\|P_i(x)\|^2}$$

### 3.4. Desarrollos en serie del producto de armónicos esféricos como combinación lineal de armónicos esféricos

#### 3.4.1. Forma real

Integral del producto de tres armónicos esféricos

La integral a calcular es

$$I_R(p, q, n, m, r, s) = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \cos \theta \, d\theta \, d\lambda \quad (3.84)$$

donde

$$n, r, p \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m, s, q \in \mathbb{Z} \wedge |m| \leq n \wedge |s| \leq r \wedge |q| \leq p$$

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) = \begin{cases} C_R(n, m) \cos m\lambda P_{n,m}(\sin \theta) & \text{si } m \geq 0 \\ C_R(n, m) \sin |m|\lambda P_{n,m}(\sin \theta) & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

$$C_R(n, m) = \eta(m) \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon(m) \pi (n+m)!}}$$

$$\eta(m) = \begin{cases} (-1)^{|m|} & \text{si } m < 0 \\ 1 & \text{si } m \geq 0 \end{cases}$$

$$\epsilon(m) = \begin{cases} 4 & \text{si } m = 0 \\ 2 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$$

Asignando

$$\varphi_m(\lambda) = \begin{cases} \cos m\lambda & \text{si } m \geq 0 \\ \sin |m|\lambda & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (3.85)$$

Entonces

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) = C_R(n, m) \varphi_m(\lambda) P_{n,m}(\sin \theta) \quad (3.86)$$

De (3.84), (3.86)

$$\begin{aligned} & I_R(p, q, n, m, r, s) = \\ & = C_R(n, m) C_R(r, s) C_R(p, q) \left( \int_{\lambda=0}^{2\pi} \varphi_m(\lambda) \varphi_s(\lambda) \varphi_q(\lambda) d\lambda \right) \left( \int_{-1}^1 P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) P_{p,q}(x) dx \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Por otra parte

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \varphi_m(\lambda) \varphi_s(\lambda) \varphi_q(\lambda) d\lambda \neq 0 \quad (3.88)$$

$$\text{si } \begin{cases} (m \geq 0 \wedge s \geq 0 \wedge q \geq 0) \vee (m \geq 0 \wedge s < 0 \wedge q < 0) \vee \\ \vee (s \geq 0 \wedge m < 0 \wedge q < 0) \vee (q \geq 0 \wedge s < 0 \wedge m < 0) \end{cases}$$

Analizando los casos anteriores se obtiene:

Caso 1  $m \geq 0 \wedge s \geq 0 \wedge q \geq 0$

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \varphi_m(\lambda) \varphi_s(\lambda) \varphi_q(\lambda) d\lambda = \begin{cases} 2\pi & \text{si } m = s = q = 0 \\ \pi & \text{si } (m = 0 \wedge s = q) \vee (s = 0 \wedge m = q) \vee (q = 0 \wedge m = s) \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } (q = m + s) \vee (s = m + q) \vee (m = s + q) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.89)$$

$$\boxed{\text{Caso 2}} \quad m \geq 0 \wedge s < 0 \wedge q < 0$$

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \varphi_m(\lambda) \varphi_s(\lambda) \varphi_q(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \pi & \text{si } m = 0 \wedge |s| = |q| \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } (q = m + |s|) \vee (|s| = m + |q|) \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } m = |s| + |q| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.90)$$

$$\boxed{\text{Caso 3}} \quad s \geq 0 \wedge m < 0 \wedge q < 0$$

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \varphi_m(\lambda) \varphi_s(\lambda) \varphi_q(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \pi & \text{si } s = 0 \wedge |m| = |q| \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } (|m| = s + |q|) \vee (|q| = |m| + s) \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } s = |m| + |q| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.91)$$

$$\boxed{\text{Caso 4}} \quad q \geq 0 \wedge s < 0 \wedge m < 0$$

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \varphi_m(\lambda) \varphi_s(\lambda) \varphi_q(\lambda) d\lambda = \begin{cases} \pi & \text{si } q = 0 \wedge |m| = |s| \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } (|m| = q + |s|) \vee (|s| = |m| + q) \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } q = |m| + |s| \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.92)$$

Por otra parte

$$P_{n,-|m|}(x) = (-1)^{|m|} \frac{(n - |m|)!}{(n + |m|)!} P_{n,|m|}(x)$$

Con lo que

$$C_R(n, -|m|) P_{n,-|m|}(x) = C_R(n, |m|) P_{n,|m|}(x) \quad (3.93)$$

De (3.59), (3.85), (3.87), (3.88), (3.89), (3.90), (3.91), (3.92), (3.93)

$$\begin{aligned}
 & I_R(p, q, n, m, r, s) = \\
 & = \frac{(n + |m|)! n! (r + |s|)! r! (p + |q|)! p!}{2^{n+r+p}} \left( \int_{\lambda=0}^{2\pi} \varphi_m(\lambda) \varphi_s(\lambda) \varphi_q(\lambda) d\lambda \right) C_R(n, |m|) C_R(r, |s|) \cdot \\
 & \cdot C_R(p, |q|) \sum_{\xi=0}^{n+r+p-(|m|+|s|+|q|)} \{ \chi \chi(\xi, n, |m|, r, |s|, p, |q|) I(\xi, |m| + |s| + |q|) \} \quad (3.94)
 \end{aligned}$$

### Desarrollo del producto de dos armónicos esféricos como combinación lineal de armónicos esféricos

**Teorema 3.4.1 (Desarrollo de una función en serie de armónicos esféricos).** *Los armónicos esféricos  $Y_{n,m}(\theta, \lambda)$  constituyen un sistema ortonormal completo del espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrable en la esfera de radio la unidad. Para una función  $f(\theta, \lambda)$  de este espacio [8], [34], [37], [42], [78], [83]:*

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} Y_{n,m}(\theta, \lambda) \quad (3.95)$$

$$a_{n,m} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta, \lambda) Y_{n,m}(\theta, \lambda) \cos \theta d\lambda d\theta \quad (3.96)$$

Si las dos primeras derivadas de  $f(\theta, \lambda)$  son continuas, la serie de (3.95) converge absoluta y uniformemente en la esfera de radio 1.

El problema a resolver en este apartado es encontrar un desarrollo, en serie de armónicos esféricos, del producto de armónicos esféricos. Es decir,

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p a_{p,q} Y_{p,q}(\theta, \lambda) \quad (3.97)$$

con

$$a_{p,q} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \cos \theta d\lambda d\theta \quad (3.98)$$

El problema se aborda analizando el signo del segundo subíndice de los armónicos esféricos.

$$\boxed{\text{Caso 1}} \quad n, r, m, s \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \leq n \wedge s \leq r$$

$$\begin{aligned} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) &= C_R(n, m) C_R(r, s) \cos m\lambda \cos s\lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) = \\ &= \frac{1}{2} C_R(n, m) C_R(r, s) \cos(m+s)\lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) + \\ &\quad + \frac{1}{2} C_R(n, m) C_R(r, s) \cos(m-s)\lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) \end{aligned}$$

De (3.63), (3.64), (3.97), (3.98), (3.84), (3.94)

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = \sum_{i=m+s}^{n+r} A_i^{(1,1)} Y_{i,m+s}(\theta, \lambda) + \sum_{j=|m-s|}^{n+r} B_j^{(1,1)} Y_{j,|m-s|}(\theta, \lambda) \quad (3.99)$$

donde

$$A_i^{(1,1)} = I_R(i, m+s, n, m, r, s) \wedge B_j^{(1,1)} = I_R(j, |m-s|, n, m, r, s)$$

$$\boxed{\text{Caso 2}} \quad n, r \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m, s \in \mathbb{Z}^- \wedge |m| \leq n \wedge |s| \leq r$$

$$\begin{aligned} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) &= C_R(n, m) C_R(r, s) \sin |m|\lambda \sin |s|\lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) = \\ &= -\frac{1}{2} C_R(n, m) C_R(r, s) \cos(|m|+|s|)\lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) + \\ &\quad + \frac{1}{2} C_R(n, m) C_R(r, s) \cos(|m|-|s|)\lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) \end{aligned}$$

De (3.76), (3.78), (3.97), (3.98), (3.84), (3.94)

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = \sum_{i=|m+s|}^{n+r} A_i^{(-1,-1)} Y_{i,|m+s|}(\theta, \lambda) + \sum_{j=|m-s|}^{n+r} B_j^{(-1,-1)} Y_{j,|m-s|}(\theta, \lambda) \quad (3.100)$$

donde

$$A_i^{(-1,-1)} = I_R(i, |m+s|, n, m, r, s) \wedge B_j^{(-1,-1)} = I_R(j, |m-s|, n, m, r, s)$$

$$\boxed{\text{Caso 3}} \quad n, r, m \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge s \in \mathbb{Z}^- \wedge m \leq n \wedge |s| \leq r$$

$$\begin{aligned} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) &= C_R(n, m) C_R(r, s) \cos m\lambda \sin |s|\lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) = \\ &= \frac{1}{2} C_R(n, m) C_R(r, s) \sin(m+|s|)\lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) + \\ &\quad + \frac{1}{2} C_R(n, m) C_R(r, s) \sin(|s|-m)\lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) \end{aligned}$$

De (3.66), (3.68), (3.97), (3.98), (3.84), (3.94)

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = \sum_{i=m-s}^{n+r} A_i^{(1,-1)} Y_{i,s-m}(\theta, \lambda) + \sum_{j=|m+s|}^{n+r} B_j^{(1,-1)} Y_{j,-|m+s|}(\theta, \lambda) \quad (3.101)$$

donde

$$A_i^{(1,-1)} = I_R(i, s-m, n, m, r, s) \wedge B_j^{(1,-1)} = I_R(j, -|m+s|, n, m, r, s)$$

$$\boxed{\text{Caso 4}} \quad n, r, s \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \in \mathbb{Z}^- \wedge |m| \leq n \wedge s \leq r$$

$$\begin{aligned} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) &= C_R(n, m) C_R(r, s) \sin |m| \lambda \cos s \lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) = \\ &= \frac{1}{2} C_R(n, m) C_R(r, s) \sin(|m| + s) \lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) + \\ &\quad + \frac{1}{2} C_R(n, m) C_R(r, s) \sin(|m| - s) \lambda P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) \end{aligned}$$

De (3.70), (3.72), (3.97), (3.98), (3.84), (3.94)

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = \sum_{i=s-m}^{n+r} A_i^{(-1,1)} Y_{i,m-s}(\theta, \lambda) + \sum_{j=|m+s|}^{n+r} B_j^{(-1,1)} Y_{j,-|m+s|}(\theta, \lambda) \quad (3.102)$$

donde

$$A_i^{(-1,1)} = I_R(i, m-s, n, m, r, s) \wedge B_j^{(-1,1)} = I_R(j, -|m+s|, n, m, r, s)$$

$$\boxed{\text{Caso 5}} \quad n, r, s \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m = 0 \wedge s \leq r$$

$$Y_{n,0}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = C_R(n, 0) C_R(r, s) \cos s \lambda P_n(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta)$$

De (3.63), (3.97), (3.98), (3.84), (3.94)

$$Y_{n,0}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = \sum_{i=s}^{n+r} A_i^{(0,1)} Y_{i,s}(\theta, \lambda) \quad (3.103)$$

donde

$$A_i^{(0,1)} = I_R(i, s, n, 0, r, s)$$

$$\boxed{\text{Caso 6}} \quad n, r \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m = 0 \wedge s \in \mathbb{Z}^- \wedge |s| \leq r$$

$$Y_{n,0}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = C_R(n, 0) C_R(r, s) \sin |s| \lambda P_n(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta)$$

De (3.66), (3.97), (3.98), (3.84), (3.94)

$$Y_{n,0}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = \sum_{i=-s}^{n+r} A_i^{(0,-1)} Y_{i,s}(\theta, \lambda) \quad (3.104)$$

donde

$$A_i^{(0,-1)} = I_R(i, s, n, m, r, s)$$

$$\boxed{\text{Caso 7}} \quad n, r, m \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge s = 0 \wedge m \leq n$$

Por analogía al *caso 5*

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,0}(\theta, \lambda) = \sum_{i=m}^{n+r} A_i^{(1,0)} Y_{i,m}(\theta, \lambda) \quad (3.105)$$

donde

$$A_i^{(1,0)} = I_R(i, m, n, m, r, 0)$$

$$\boxed{\text{Caso 8}} \quad n, r \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge s = 0 \wedge m \in \mathbb{Z}^- \wedge |m| \leq n$$

Por analogía al *caso 6*

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,0}(\theta, \lambda) = \sum_{i=-m}^{n+r} A_i^{(-1,0)} Y_{i,m}(\theta, \lambda) \quad (3.106)$$

donde

$$A_i^{(-1,0)} = I_R(i, m, n, m, r, 0)$$

$$\boxed{\text{Caso 9}} \quad n, r \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m = s = 0$$

$$Y_{n,0}(\theta, \lambda) Y_{r,0}(\theta, \lambda) = C_R(n, 0) C_R(r, 0) P_n(\sin \theta) P_r(\sin \theta)$$

Supongamos que  $n \geq r$ , entonces

$$Y_{n,0}(\theta, \lambda) Y_{r,0}(\theta, \lambda) = \sum_{i=0}^{n+r} A_i Y_{i,0}(\theta, \lambda)$$

con

$$A_i = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y_{n,0}(\theta, \lambda) Y_{r,0}(\theta, \lambda) Y_{i,0}(\theta, \lambda) \cos \theta \, d\theta \, d\lambda =$$



$$\begin{aligned}
&= C_R(n, 0) C_R(r, 0) C_R(i, 0) \int_{-1}^1 P_n(t) P_r(t) P_i(t) dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} P_r(t) P_i(t) = Q_{r+i}(t) = \text{polinomio de grado } r+i \\ \int_{-1}^1 Q_m(t) P_n(t) dt = 0 \text{ si } m < n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } i < n-r \\ A_i \text{ si } i \geq n-r \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Entonces

$$Y_{n,0}(\theta, \lambda) Y_{r,0}(\theta, \lambda) = \sum_{i=n-r}^{n+r} A_i Y_{i,0}(\theta, \lambda) \quad \text{si } n \geq r \quad (3.107)$$

Análogamente

$$Y_{n,0}(\theta, \lambda) Y_{r,0}(\theta, \lambda) = \sum_{i=r-n}^{n+r} A_i Y_{i,0}(\theta, \lambda) \quad \text{si } r \geq n \quad (3.108)$$

De (3.107), (3.108)

$$Y_{n,0}(\theta, \lambda) Y_{r,0}(\theta, \lambda) = \sum_{i=|n-r|}^{n+r} A_i^{(0,0)} Y_{i,0}(\theta, \lambda) \quad (3.109)$$

donde

$$A_i^{(0,0)} = I_R(i, 0, n, 0, r, 0)$$

**Caso 10**

$$(n \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge r = s = 0) \vee (r \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge s \in \mathbb{Z} \wedge n = m = 0)$$

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{0,0}(\theta, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} Y_{n,m}(\theta, \lambda) \quad (3.110)$$

$$Y_{0,0}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} Y_{r,s}(\theta, \lambda) \quad (3.111)$$

**Caso 11**  $n = r = m = s = 0$

$$Y_{0,0}(\theta, \lambda) Y_{0,0}(\theta, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \quad (3.112)$$

En resumen, si asignamos  $I_R^*(p, q) = I_R(p, q, n, m, r, s)$ , el producto de armónicos esféricos en forma real,  $(Y_{n,m}(\theta, \lambda) \cdot Y_{r,s}(\theta, \lambda))$ , vendrá dado por las expresiones siguientes:

$$\mathbf{Si} \ (m > 0 \wedge s > 0) \vee (m < 0 \wedge s < 0)$$

$$\sum_{i=|m+s|}^{n+r} I_R^*(i, |m+s|) Y_{i,|m+s|}(\theta, \lambda) + \sum_{j=|m-s|}^{n+r} I_R^*(j, |m-s|) Y_{j,|m-s|}(\theta, \lambda)$$

$$\mathbf{Si} \ (m > 0 \wedge s < 0) \vee (m < 0 \wedge s > 0)$$

$$\sum_{i=|m|+|s|}^{n+r} I_R^*(i, -(|m|+|s|)) Y_{i,-(|m|+|s|)}(\theta, \lambda) + \sum_{j=|m+s|}^{n+r} I_R^*(j, -|m+s|) Y_{j,-|m+s|}(\theta, \lambda)$$

$$\mathbf{Si} \ (m = 0 \wedge s < 0) \vee (m = 0 \wedge s > 0)$$

$$\sum_{i=|s|}^{n+r} I_R^*(i, s) Y_{i,s}(\theta, \lambda)$$

$$\mathbf{Si} \ (m < 0 \wedge s = 0) \vee (m > 0 \wedge s = 0)$$

$$\sum_{i=|m|}^{n+r} I_R^*(i, m) Y_{i,m}(\theta, \lambda)$$

$$\mathbf{Si} \ m = 0 \wedge s = 0$$

$$\sum_{i=|n-r|}^{n+r} I_R^*(i, 0) Y_{i,0}(\theta, \lambda)$$

$$\mathbf{Si} \ r = s = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} Y_{n,m}(\theta, \lambda)$$

$$\mathbf{Si} \ n = m = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} Y_{r,s}(\theta, \lambda)$$

$$\mathbf{Si} \ n = m = r = s = 0$$

$$\frac{1}{4\pi}$$

con

$$n, r \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m, s \in \mathbb{Z} \wedge |m| \leq n \wedge |s| \leq r$$

(3.113)

### 3.4.2. Forma compleja

#### Integral del producto de tres armónicos esféricos

Se define armónico esférico en forma compleja como:

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) = C_C(n, m) e^{im\lambda} P_{n,m}(\sin \theta) \quad (3.114)$$

donde

$$n \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge |m| \leq n$$

$$C_C(n, m) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}}$$

$$P_{n,m}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n$$

$$P_{n,-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{n,m}(x) \quad \text{con } m \in \mathbb{N}$$

La integral a calcular es

$$I_c(p, q, n, m, r, s) = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \cos \theta d\theta d\lambda \quad (3.115)$$

donde

$$n, r, p \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m, s, q \in \mathbb{Z} \wedge |m| \leq n \wedge |s| \leq r \wedge |q| \leq p$$

De (3.114), (3.115)

$$I_c(p, q, n, m, r, s) = C_C(n, m) C_C(r, s) C_C(p, q) \left( \int_{\lambda=0}^{2\pi} e^{i(m+s+q)\lambda} d\lambda \right) \left( \int_{-1}^1 P_{n,m}(x) P_{r,s}(x) P_{p,q}(x) dx \right) \quad (3.116)$$

Por otro lado

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} e^{i(m+s+q)\lambda} d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } m+s+q \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } m+s+q = 0 \end{cases} \quad (3.117)$$

$$C_C(n, -|m|) P_{n,-|m|}(x) = (-1)^{|m|} C_C(n, |m|) P_{n,|m|}(x) \quad (3.118)$$

Se define

$$\eta(m) = \begin{cases} (-1)^{|m|} & \text{si } m < 0 \\ 1 & \text{si } m \geq 0 \end{cases} \quad \text{con } m \in \mathbb{Z} \quad (3.119)$$

De (3.59), (3.116), (3.117), (3.118), (3.119)

$$\begin{aligned} I_C(p, q, n, m, r, s) &= \frac{(n + |m|)! n! (r + |s|)! r! (p + |q|)! p!}{2^{n+r+p}} \\ &\cdot \left( \int_{\lambda=0}^{2\pi} e^{i(m+s+q)\lambda} d\lambda \right) C_C(n, |m|) C_C(r, |s|) C_C(p, |q|) \eta(m) \eta(s) \eta(q) \cdot \\ &\cdot \sum_{\xi=0}^{n+r+p-(|m|+|s|+|q|)} \{ \chi\chi(\xi, n, |m|, r, |s|, p, |q|) I(\xi, |m| + |s| + |q|) \} \end{aligned} \quad (3.120)$$

### Desarrollo del producto de dos armónicos esféricos como combinación lineal de armónicos esféricos

Se define armónico esférico en forma compleja conjugado de la forma siguiente:

$$\bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda) = C_C(n, m) e^{-im\lambda} P_{n,m}(\sin \theta) \quad (3.121)$$

donde

$$n \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge |m| \leq n$$

Por otro lado,

$$\bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda) = (-1)^m Y_{n,-m}(\theta, \lambda) \quad (3.122)$$

Por el *Teorema 2.4.1*

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} Y_{n,m}(\theta, \lambda) \quad (3.123)$$

$$a_{n,m} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\theta, \lambda) \bar{Y}_{n,m}(\theta, \lambda) \cos \theta d\lambda d\theta \quad (3.124)$$

Si las dos primeras derivadas de  $f(\theta, \lambda)$  son continuas, la serie de (3.123) converge absoluta y uniformemente en la esfera de radio 1.

El problema a resolver en este apartado es encontrar un desarrollo, en serie de armónicos esféricos, del producto de armónicos esféricos. Es decir,

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p a_{p,q} Y_{p,q}(\theta, \lambda) \quad (3.125)$$

con

$$a_{p,q} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) \bar{Y}_{p,q}(\theta, \lambda) \cos \theta d\lambda d\theta \quad (3.126)$$

Sea el producto de armónicos esféricos

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = C_C(n, m) C_C(r, s) e^{i(m+s)\lambda} P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) \quad (3.127)$$

De (3.63), (3.74), (3.80), (3.82)

$$P_{n,m}(\sin \theta) P_{r,s}(\sin \theta) = \sum_{j=|m+s|}^{n+r} A_j P_{j,m+s}(\sin \theta) \quad (3.128)$$

De (3.125), (3.126), (3.127), (3.128)

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = \sum_{j=|m+s|}^{n+r} A_j^c Y_{j,m+s}(\theta, \lambda) \quad (3.129)$$

donde

$$A_j^c = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) \bar{Y}_{j,m+s}(\theta, \lambda) \cos \theta d\lambda d\theta$$

De (3.122)

$$A_j^c = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-1)^{|m+s|} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) Y_{j,-(m+s)}(\theta, \lambda) \cos \theta d\lambda d\theta \quad (3.130)$$

De (3.130), (3.120)

$$A_j^c = (-1)^{|m+s|} I_C(j, -(m+s), n, m, r, s) \quad (3.131)$$

Asignando

$$I_C^*(p, q) = (-1)^{|m+s|} I_C(p, q, n, m, r, s) \quad (3.132)$$

De (3.129), (3.131), (3.132)

$$Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) = \sum_{j=|m+s|}^{n+r} I_C^*(j, -(m+s)) Y_{j,m+s}(\theta, \lambda) \quad (3.133)$$

# Capítulo 4

## Configuraciones de equilibrio de los cuerpos celestes

### 4.1. Introducción

El estudio de las configuraciones de equilibrio de los cuerpos celestes es un problema clásico dentro de la mecánica celeste que ha sido estudiado por diversos autores: *MacLaurin* y *Jacobi* [41], *Clairaut* [22], *Dirichlet* [24], *Riemann* [75], *Poincaré* [74], *Liapounov* [58], *Falkner* [29], *Chandrasekhar* [21] y *Kopal* [49], [50], [51] entre otros. En este trabajo se abordará el caso particular del estudio de las figuras de equilibrio de los cuerpos deformables en rotación, utilizando para ello los desarrollos de *Clairaut*.

En este capítulo se desarrolla un modelo para una masa fluida en rotación en el espacio, considerándola como un cuerpo rígido. Con esta finalidad, las superficies equipotenciales se desarrollan utilizando las series de *Neumann* respecto de las coordenadas de *Clairaut* y, de estos desarrollos, se pueden obtener las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de frontera. Los métodos clásicos asumen la convergencia de estas series en capas donde resulta cuestionable dicha convergencia. Para resolver este problema, en este trabajo se desarrollan dos métodos, tanto para primer orden como para segundo orden. El primero de los métodos está basado en la cuadratura numérica y el segundo en un desarrollo analítico [63] [65].

Se considera  $M$  la masa deformable aislada con rotación uniforme  $\vec{\omega}$ . Consideremos una componente del sistema, cuya distribución de masa venga dada por una función  $\rho(x, y, z)$  y sea  $M$  un punto de ella de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$ .

El potencial en un punto interior  $\vec{r}$  de coordenadas  $(x, y, z)$  viene determinado por

$$\Psi = \Omega + V_c = G \int_M \frac{dm'}{\Delta} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (4.1)$$

donde el primer término es el llamado potencial autogravitatorio y el segundo término es el potencial centrífugo debido a la rotación del sistema de coordenadas solidario con el cuerpo estudiado.

En esta ecuación  $M$  denota la masa del cuerpo,  $dm'$  es el elemento de masa de un punto interior arbitrario  $\vec{r}'$  con coordenadas  $(x', y', z')$  y  $\Delta$  es la distancia entre los puntos de radiovectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ .

La condición de rotación rígida implica el equilibrio hidrostático  $dP = \rho d\Psi$  y a partir de esta condición, de acuerdo con *Kopal* [49], [50], [51] y *Falkner* [29], este estado conlleva a la identificación de las superficies equipotenciales isobáricas, isotérmicas e isopícnicas. Para integrar este problema, en un caso general de distribución de masas, es necesario relacionar la presión y la densidad con una ecuación de estado.

## 4.2. Desarrollo del potencial autogravitatorio en coordenadas de *Clairaut*

En el sistema de coordenadas de *Clairaut*  $(a, \theta, \lambda)$  el parámetro  $a$  es constante en cada superficie equipotencial.

En este trabajo el parámetro  $a$  se ha escogido de manera que es el radio de la esfera con la misma masa que la superficie equipotencial.

Este sistema de coordenadas está relacionado con el sistema de coordenadas esféricas mediante la relación  $r = r(a, \theta, \lambda)$ .

Por lo tanto

$$x = r(a, \theta, \lambda) \cos \theta \cos \lambda$$

$$y = r(a, \theta, \lambda) \cos \theta \sin \lambda$$

$$z = r(a, \theta, \lambda) \sin \theta$$

es la relación entre el sistema de coordenadas cartesianas y el sistema de coordenadas de *Clairaut*.



El valor absoluto del jacobiano de la transformación viene dado por

$$|J| = \left| \frac{\partial r}{\partial a} \right| r^2 \cos \theta$$

El elemento de masa  $dm'$  en coordenadas esféricas se expresa como:

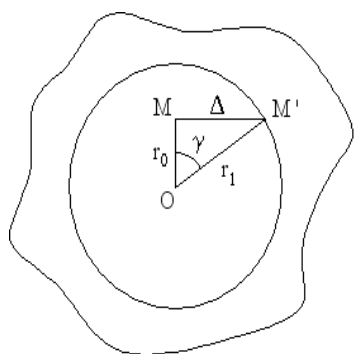
$$dm' = \rho(r', \theta', \lambda') r'^2(a', \theta', \lambda') \cos \theta' dr' d\theta' d\lambda'$$

Con lo que el elemento de masa en coordenadas de *Clairaut* se denota por:

$$dm' = \rho(a') \cdot \frac{\partial r'}{\partial a'} \cdot r'^2(a', \theta', \lambda') \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' \quad (4.2)$$

Para evaluar el potencial autogravitatorio  $\Omega$  es necesario el desarrollo del inverso de la distancia. Los métodos clásicos (*Finlay* [30], *Kopal* [49] [50] [51], *Jardetzky* [41], *López* [61]) están basados en el desarrollo de la distancia entre dos elementos de masa  $dm$  y  $dm'$ .

$\Delta$  es la distancia de  $dm$  a  $dm'$  y  $\gamma$  el ángulo entre los radiovectores, con lo que aplicando el *teorema del coseno* al triángulo  $\widehat{OMM'}$ , se obtiene:



$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \gamma$$

de donde:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \gamma}}$$

Por otra parte

$$(1 + x^2 - 2x \cos \alpha)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\cos \alpha)$$

donde  $P_n$  son los polinomios de *Legendre*.

$$\frac{1}{\Delta} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma) & \text{si } r' < r \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos \gamma) & \text{si } r' > r \end{cases}$$

Sean  $(r, \theta, \lambda)$  y  $(r', \theta', \lambda')$  las coordenadas esféricas de los elementos de masa  $dm$  y  $dm'$  respectivamente. El potencial autogravitatorio en un punto de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \lambda)$  puede ser evaluado como

$$\Omega = U + V \quad (4.3)$$

con

$$U = G \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_r^{r_1} \frac{\rho(r', \theta', \lambda')}{\Delta} r'^2 \cos \theta' dr' d\theta' d\lambda' \quad (4.4)$$

$$V = G \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r \frac{\rho(r', \theta', \lambda')}{\Delta} r'^2 \cos \theta' dr' d\theta' d\lambda' \quad (4.5)$$

donde  $r_1$  es el radio de la menor esfera centrada en  $O$  que contenga a toda la distribución de masa de la componente.

Para calcular estas integrales es conveniente sustituir  $\frac{1}{\Delta}$  por su desarrollo en serie de polinomios de *Legendre*. Con lo que los potenciales exterior e interior se pueden expresar, respectivamente, como:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} r^n U_n \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} V_n \quad (4.6)$$

donde

$$U_n = G \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_r^{r_1} \rho(r', \theta', \lambda') r'^{1-n} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' dr' d\theta' d\lambda' \quad (4.7)$$

$$V_n = G \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r \rho(r', \theta', \lambda') r'^{2+n} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' dr' d\theta' d\lambda' \quad (4.8)$$

Se definen  $K_n$  y  $W_n$  como:

$$K_n = G \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_a^{a_1} \rho(a') r'^{1-n} \frac{\partial r'}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' dr' d\theta' d\lambda' \quad (4.9)$$

$$W_n = G \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho(a') r'^{2+n} \frac{\partial r'}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' dr' d\theta' d\lambda' \quad (4.10)$$

siendo  $a_1$  la primera raíz de la ecuación  $\rho(a) = 0$ .

Los métodos clásicos asumen que  $U_n = K_n$  y  $V_n = W_n$ . Consecuentemente

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} r^n K_n \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} W_n \quad (4.11)$$

Por otra parte,  $K_n$  y  $W_n$  pueden expresarse

$$K_n = \frac{G}{2-n} \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r'^{2-n} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right] da' \quad \text{si } n \neq 2 \quad (4.12)$$

$$K_2 = G \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln r' P_2(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right] da' \quad (4.13)$$

$$W_n = \frac{G}{n+3} \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r'^{n+3} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right] da' \quad (4.14)$$

Se supone que el radiovector  $r'$  de una superficie equipotencial se desarrolla como

$$r' = a' \left\{ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{n,m}(a') Y_{n,m}(\theta', \lambda') \right\}$$

donde  $f_{n,m}(a')$  son las amplitudes y  $Y_{n,m}(\theta', \lambda')$  las funciones esféricas o armónicos esféricos.

Por razones de simetría, el radiovector  $r'$  se puede desarrollar, en el caso particular de sólo rotación, como

$$r' = a' \left\{ 1 + \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m}(a') P_{2m}(\sin \theta') \right\} = a'(1 + \Sigma') \quad (4.15)$$

donde  $P_n$  son los polinomios de *Legendre*.

Del teorema de adición de los armónicos esféricos en forma real [7], [8]

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{n,m}(\theta', \lambda') \quad (4.16)$$

y de la ortonormalidad de los armónicos esféricos en forma real

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) \cos \theta d\theta d\lambda = \delta_{n,r} \delta_{m,s} \quad (4.17)$$

(donde  $\delta_{i,j}$  es la delta de *Kronecker*)

se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) Y_{r,m}(\theta', \lambda') \cos \theta' d\theta' d\lambda' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_{n,m}(\theta, \lambda) \delta_{n,r} \quad (4.18)$$

Por otra parte

$$P_r(\sin \theta') = \sqrt{\frac{4\pi}{2r+1}} Y_{r,0}(\theta', \lambda') \quad (4.19)$$

De (4.18), (4.19)

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) P_r(\sin \theta') \cos \theta' d\theta' d\lambda' = \frac{4\pi}{2n+1} P_n(\sin \theta) \delta_{n,r} \quad (4.20)$$

Para calcular las integrales de las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.14) es conveniente utilizar las aproximaciones de  $r'^k$  y de  $\ln r'$  dadas por los desarrollos

$$r'^k = a'^k \left( 1 + k \Sigma' + \frac{k(k-1)}{2} \Sigma'^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Sigma'^3 + \dots \right) \quad (4.21)$$

$$\ln r' = \ln a + \Sigma' - \frac{\Sigma'^2}{2} + \frac{\Sigma'^3}{3} + \dots \quad (4.22)$$

con

$$\Sigma' = \sum_{i=0}^{\infty} f_{2i}(a') P_{2i}(\sin \theta')$$

Sustituyendo (4.21) y (4.22) en (4.12), (4.13) y (4.14); y aproximando  $r'^{2-n}$ ,  $\ln r'$  y  $r'^{n+3}$  en un orden apropiado respecto de las amplitudes, el potencial autogravitatorio se puede escribir como

$$\Omega = 4\pi G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(a) r^n + F_n(a) r^{-n-1}}{2n+1} P_n(\sin \theta) \quad (4.23)$$

Por otra parte, el potencial centrífugo,  $V_c$ , viene determinado por

$$V_c = \frac{1}{2} r^2 [1 - P_2(\sin \theta)]$$

con lo que el potencial total se puede escribir de la forma

$$\Psi(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(a) P_n(\sin \theta) \quad (4.24)$$

### 4.3. Teorías de primer y segundo orden sobre las figuras de equilibrio de los cuerpos celestes

#### 4.3.1. Teoría de primer orden

De (4.23) se deduce que  $4\pi F_0(a) = M(a)$ , donde  $M(a)$  es la masa contenida en la superficie equipotencial de parámetro  $a$ . Según *Kopal* [49] [50] [51], para estas condiciones y para tercer orden en las amplitudes, se obtiene

$$f_0(a) = -\frac{1}{5} f_2^2(a) - \frac{2}{105} f_2^3(a) + \dots$$

Las funciones  $E_n(a)$  y  $F_n(a)$ , en primer orden para las amplitudes, se escriben de la forma

$$\begin{aligned} E_0(a) &= \int_a^{a_1} \rho(a') a' da' \quad , \quad E_n(a) = \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} [a'^{2-n} f_n(a')] da' \\ F_0(a) &= \int_0^a \rho(a') a'^2 da' \quad , \quad F_n(a) = \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} [a'^{n+3} f_n(a')] da' \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde  $a_1$  es la primera raíz de la ecuación  $\rho(a) = 0$ .

De (4.24) se deduce que

$$\Psi(a, \theta) = \Psi_0(a) \quad , \quad \Psi_n(a) = 0 \quad \text{si } n \neq 0$$

De (4.11), (4.12) y (4.13), aproximando hasta primer orden en  $\omega^2$ , se obtienen

$$\frac{a^2 E_2(a)}{5} + \frac{a^{-3} F_2(a)}{5} - a^{-1} f_2(a) F_0(a) = \frac{\omega^2 a^2}{12\pi G}$$

$$\frac{a^n E_n(a)}{2n+1} + \frac{a^{-n-1} F_n(a)}{2n+1} - a^{-1} f_n(a) F_0(a) = 0 \quad , \quad n = 2, 4, \dots$$

En estas ecuaciones integrales sólo  $f_2(a) \neq 0$  en primer orden.

Desafortunadamente, las series definidas por (4.6) no convergen en la capa definida por  $r \in [r_{min}(a), r_{max}(a)]$  con

$$r_{min}(a) = \min \left\{ r(a, \theta, \lambda) : \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \wedge \lambda \in [0, \pi] \right\}$$

$$r_{max}(a) = \max \left\{ r(a, \theta, \lambda) : \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \wedge \lambda \in [0, \pi] \right\}$$

Para resolver este problema se desarrollan los dos métodos siguientes [63] [65]:

### Teoría de primer orden: Método de cuadratura numérica

El potencial que se desea evaluar es

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} [U_n r^n + V_n r^{-n-1}] \quad (4.26)$$

Es conveniente utilizar el sistema de coordenadas de *Clairaut* para calcular  $U_n$  y  $V_n$ . Para ello se definen  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  como

$$\Sigma = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) P_n(\sin \theta) \quad , \quad \Sigma' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a') P_n(\sin \theta')$$

Los valores de los radiovectores  $r$  y  $r'$  de las superficies equipotenciales que contienen a  $dm$  y a  $dm'$  vienen dados por

$$r = a(1 + \Sigma) \quad , \quad r' = a'(1 + \Sigma')$$

siendo  $(a, \theta, \lambda)$  las coordenadas de *Clairaut* en la superficie  $(\theta', \lambda')$  según la dirección dada por  $(a(1 + \Sigma)(1 + \Sigma')^{-1}, \theta', \lambda')$ .

Con estas premisas se tiene que

$$U_n = \frac{G}{2-n} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{a(1+\Sigma)(1+\Sigma')^{-1}}^{a_1} \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \rho(r', \theta', \lambda') \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' \right] \quad (4.27)$$

para  $n \neq 2$

$$U_2 = G \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{a(1+\Sigma)(1+\Sigma')^{-1}}^{a_1} \frac{\partial \ln r'}{\partial a'} P_2(\cos \gamma) \rho(r', \theta', \lambda') \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' \right] \quad (4.28)$$

$$V_n = \frac{G}{n+3} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a(1+\Sigma)(1+\Sigma')^{-1}} \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \rho(r', \theta', \lambda') \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' \right] \quad (4.29)$$

Es conveniente calcular la siguiente integral para evaluar  $V_n$

$$\int_0^{a(1+\Sigma)(1+\Sigma')^{-1}} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' = \int_0^a \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' + \int_a^{a(1+\Sigma)(1+\Sigma')^{-1}} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' \quad (4.30)$$

Para calcular la segunda integral del segundo miembro de (4.30), mediante un método de cuadratura numérica, se utilizará la siguiente aproximación, en primer orden, de la expresión  $a(1+\Sigma)(1+\Sigma')^{-1} \approx a(1+\Sigma-\Sigma')$ .

Ahora utilizando la fórmula de cuadratura rectangular se obtiene

$$\int_a^{a(1+\Sigma)(1+\Sigma')^{-1}} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' \approx \int_a^{a(1+\Sigma-\Sigma')} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' \approx \rho(a) \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} (\Sigma-\Sigma') \quad (4.31)$$

Por otra parte, para orden cero en las amplitudes  $r'^{n+3} = a'^{n+3}$ . Por lo que

$$\int_a^{a(1+\Sigma)(1+\Sigma')^{-1}} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' = (n+3)a^{n+2}\rho(a) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \{P_n(\sin \theta) - P_n(\sin \theta')\} \right] \quad (4.32)$$

De este resultado se deduce que

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a(1+\Sigma)(1+\Sigma')^{-1}} \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \rho(r', \theta', \lambda') \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' + \\
&+ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (n+3)a^{n+2} \rho(a) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \{P_n(\sin \theta) - P_n(\sin \theta')\} \right] P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda'
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Si  $n \neq 0$ , la primera integral del segundo miembro de (4.33) se puede aproximar en primer orden en las amplitudes por

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' = \\
&= \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r'^{n+3} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right] da' = \\
&= \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a'^{n+3} \left( 1 + (n+3) \sum_{k=0}^{\infty} f_k(a') P_k(\sin \theta) \right) \right. \\
&\cdot P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' \left. \right] da' = \frac{4\pi}{2n+1} (n+3) \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} [a'^{n+3} f_n(a')] da' P_n(\sin \theta)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Por otro lado, para  $n = 0$  se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho(a') \frac{\partial r'^3}{\partial a'} \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' = 12\pi \int_0^a \rho(a') a'^2 da' \tag{4.35}$$

El valor de la segunda integral del segundo miembro de (4.33) para  $n \neq 0$  viene determinado por

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (n+3)a^{n+2} \rho(a) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \{P_n(\sin \theta) - P_n(\sin \theta')\} \right] P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' = \\
&= -4\pi \frac{n+3}{2n+1} a^{n+2} f_n(a) \rho(a) P_n(\sin \theta)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

y para  $n = 0$  se anula.



Sustituyendo (4.34) y (4.36) en (4.33), para  $n \neq 0$ , se obtiene

$$V_n = \frac{4\pi G}{2n+1} \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} [a'^{n+3} f_n(a')] da' - \frac{4\pi G}{2n+1} a^{n+2} f_n(a) \rho(a) P_n(\sin \theta) \quad (4.37)$$

y para  $n = 0$

$$V_0 = 4\pi G \int_0^a \rho(a') a'^2 da' \quad (4.38)$$

Como se puede observar la primera integral del segundo miembro de la ecuación (4.37) coincide con el valor de  $V_n$  en la teoría clásica.

El análisis para los términos correspondientes de  $U_n$  resulta similar al efectuado para  $V_n$  con lo que, para  $n \neq 0$ ,

$$U_n = \frac{4\pi G}{2n+1} \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} [a'^{2-n} f_n(a')] da' + \frac{4\pi G}{2n+1} a^{1-n} f_n(a) \rho(a) P_n(\sin \theta) \quad (4.39)$$

y para  $n = 0$

$$U_0 = 4\pi G \int_a^{a_1} \rho(a') a' da' \quad (4.40)$$

Ahora sustituyendo  $r^k$  por  $r^k = a^k \left( 1 + k \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) P_n(\sin \theta) \right)$  en (4.26), para primer orden en las amplitudes, se obtiene

$$\begin{aligned} \Omega = & 4\pi G \left[ a^{-1} \int_0^a \rho(a') a'^2 da' - a^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^a \rho(a') a'^2 da' \right\} f_n(a) P_n(\sin \theta) \right] + \\ & + 4\pi G \int_a^{a_1} \rho(a') a' da' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi G}{2n+1} \left\{ a^{-n-1} \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} [a'^{2-n} f_n(a')] da' + \right. \\ & \left. + a^n \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} [a'^{2-n} f_n(a')] da' \right\} P_n(\sin \theta) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -a^{-n-1} \frac{2\pi G}{2n+1} a^{n+2} f_n(a) + a^n \frac{2\pi G}{2n+1} a^{1-n} f_n(a) \right] P_n(\sin \theta) \quad (4.41) \end{aligned}$$

Nótese que el último sumatorio de la ecuación (4.41) es nulo.

Entonces sustituyendo (4.25) en (4.41) se obtiene que

$$\begin{aligned} \Omega &= 4\pi G[E_0(a) + a^{-1}F_0(a)] + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi G \left\{ \frac{1}{2n+1} [a^n E_n(a) + a^{-n-1} F_n(a)] - a^{-1} F_0(a) f_n(a) \right\} P_n(\sin \theta) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Este resultado coincide con el obtenido para la expresión del potencial en la teoría clásica.

### Teoría de primer orden: Desarrollo analítico

Este método se basa en el desarrollo analítico del inverso de la distancia. Sea

$$\Omega = K + W \quad (4.43)$$

donde

$$\begin{aligned} K &= G \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_a^{a_1} \frac{\rho(a') r'^2}{\Delta} \frac{\partial r'}{\partial a'} \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' \\ W &= G \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{\rho(a') r'^2}{\Delta} \frac{\partial r'}{\partial a'} \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' \end{aligned} \quad (4.44)$$

Para calcular  $K$  y  $W$  se utilizarán los desarrollos

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n r^{-n-1} \quad , \quad K = \sum_{n=0}^{\infty} K_n r^n$$

donde  $W_n$  y  $K_n$  están definidas por (4.9) y (4.10).

Los desarrollos de

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma) & \text{si } r' < r \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos \gamma) & \text{si } r' > r \end{cases}$$

no convergen en la capa definida por  $r \in [r_{min}(a), r_{max}(a)]$  con

$$r_{min}(a) = \min \left\{ r(a, \theta, \lambda) : \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \wedge \lambda \in [0, \pi] \right\}$$

$$r_{max}(a) = \max \left\{ r(a, \theta, \lambda) : \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \wedge \lambda \in [0, \pi] \right\}$$

Para resolver este problema se define

$$D(a, a') = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \gamma}} \quad (4.45)$$

El inverso de la distancia entre  $dm$  y  $dm'$  se puede desarrollar hasta segundo orden en  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  quedando de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = & D(a, a') + D_a(a, a')a \Sigma + D_{a'}(a, a')a' \Sigma' + \frac{1}{2}D_{aa}(a, a')a^2 \Sigma^2 + \\ & + D_{aa'}(a, a')aa' \Sigma \Sigma' + \frac{1}{2}D_{a'a'}(a, a')a'^2 \Sigma'^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde los subíndices  $x$  denotan la derivada respecto al parámetro  $x$ .

Por otra parte

$$dm' = \rho(a') a'^2 (1 + 3\Sigma' + a' \Sigma'_{a'} + 3\Sigma'^2 + 2a' \Sigma' \Sigma'_{a'} + \dots) \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' \quad (4.47)$$

Para calcular el potencial dentro de la superficie equipotencial de  $dm$  se desarrolla  $D(a, a')$  como sigue

$$D(a, a') = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a'}{a} \right)^n P_n(\cos \gamma) \quad (4.48)$$

mientras que para calcularlo en la superficie exterior se desarrolla

$$D(a, a') = \frac{1}{a'} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a}{a'} \right)^n P_n(\cos \gamma) \quad (4.49)$$

Para el cálculo de  $W$  se tomará

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a'}{a} \right)^n \{1 - (n+1)\Sigma + n\Sigma'\} P_n(\cos \gamma) \quad (4.50)$$

Sustituyendo (4.47) y (4.50) en (4.44) se obtiene

$$W = G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'^{n+2}}{a'^{n+1}} \{1 - (n+1)\Sigma + (n+3)\Sigma' + a'\Sigma'_a\} \cdot P_n(\sin \theta') \rho(a') \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' \quad (4.51)$$

Para el cálculo de  $K$  se procederá de forma análoga

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{a'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a'}\right)^n \{1 + n\Sigma - (n+1)\Sigma'\} P_n(\cos \gamma) \quad (4.52)$$

Sustituyendo (4.47) y (4.52) en (4.44) se obtiene

$$K = G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{a'^{n-1}} \{1 + n\Sigma + (2-n)\Sigma' + a'\Sigma'_a\} \cdot P_n(\sin \theta') \rho(a') \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' \quad (4.53)$$

Si se calcula (4.51) y (4.53) para  $n \neq 0$  se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Sigma P_n(\cos \gamma) d\theta' d\lambda' = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Sigma P_0(\cos \gamma) d\theta' d\lambda' = 4\pi\Sigma \quad (4.54)$$

y

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Sigma' P_n(\cos \gamma) d\theta' d\lambda' = \frac{4\pi}{2n+1} f_n(a') P_n(\sin \theta') \quad (4.55)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a'\Sigma'_a P_n(\cos \gamma) d\theta' d\lambda' = \frac{4\pi}{2n+1} a' f_n(a') P_n(\sin \theta')$$

Por lo tanto

$$W = 4\pi G \int_0^a \rho(a') a'^2 da' - 4\pi G \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a) \int_0^a \rho(a') a'^2 da' P_n(\sin \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi G}{2n+1} \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} [a'^{n+3} f_n(a')] da' \quad (4.56)$$

$$K = 4\pi G \int_a^{a_1} \rho(a') a' da' + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi G}{2n+1} \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} [a'^{2-n} f_n(a')] da' \quad (4.57)$$

Sustituyendo (4.56) y (4.57) en (4.43), se obtiene

$$\begin{aligned} \Omega = K + W = 4\pi G[E_0(a) + a^{-1}F_0(a)] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} 4\pi G \left\{ \frac{1}{2n+1} [a^n E_n(a) + a^{-n-1} F_n(a)] - a^{-1} F_0(a) f_n(a) \right\} P_n(\sin \theta) \end{aligned} \quad (4.58)$$

con lo que el potencial autogravitacional coincide con el calculado en la sección anterior y, por tanto, con el de la teoría clásica.

### 4.3.2. Teoría de segundo orden

Según *Kopal* [50] [51] la amplitud  $f_2(a)$  representa cantidades de primer orden en  $\omega^2$ , es decir,  $f_2(a) = O(\omega^2)$ ; la amplitud  $f_4(a)$  representa cantidades de segundo orden; la amplitud  $f_6(a)$  representa cantidades de tercer orden; etc.

En nuestro caso, dado que nuestra teoría de primer orden coincide con la teoría clásica, podemos asumir en este momento que  $f_2(a)$  representa cantidades de primer orden en  $\omega^2$ . Siendo el orden de  $f_4(a)$ ,  $f_6(a)$ , ... de órdenes superiores. Para asumir que  $f_{2k}(a)$  es de orden  $\omega^{2k}$ , será necesario probar que nuestra teoría coincide con la teoría clásica hasta orden  $2k$ .

De (4.15)

$$r'^k = a'^k \left( 1 + k \Sigma' + \frac{k(k-1)}{2} \Sigma'^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Sigma'^3 + \dots \right) \quad (4.59)$$

$$\ln r' = \ln a + \Sigma' - \frac{\Sigma'^2}{2} + \frac{\Sigma'^3}{3} + \dots \quad (4.60)$$

con

$$\Sigma' = \sum_{i=0}^{\alpha} f_{2i}(a') P_{2i}(\sin \theta)$$

$$\Sigma'^2 = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} f_{2i}(a') f_{2j}(a') P_{2i}(\sin \theta) P_{2j}(\sin \theta)$$

$$\Sigma'^3 = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} f_{2i}(a') f_{2j}(a') f_{2s}(a') P_{2i}(\sin \theta) P_{2j}(\sin \theta) P_{2s}(\sin \theta)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{N}$

De (3.35)

$$\begin{aligned}
& P_i(\sin \theta') P_j(\sin \theta') P_s(\sin \theta') = \\
& = \sum_{q=|i-j|}^{i+j} \sum_{u=|s-q|}^{s+q} \frac{2q+1}{2} \frac{2u+1}{2} I_L(i, j, q) I_L(s, q, u) P_u(\sin \theta') \quad (4.61)
\end{aligned}$$

De (3.35), (4.20)

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_i(\sin \theta') P_j(\sin \theta') P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' = \\
& = \frac{4\pi}{2n+1} \frac{2n+1}{2} I_L(i, j, n) P_n(\sin \theta) \quad (4.62)
\end{aligned}$$

De (4.20), (4.61)

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_i(\sin \theta') P_j(\sin \theta') P_s(\sin \theta') P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' = \\
& = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{q=|i-j|}^{i+j} \frac{2q+1}{2} \frac{2n+1}{2} I_L(i, j, q) I_L(s, q, n) P_n(\sin \theta) \quad (4.63)
\end{aligned}$$

De (4.14), (4.20), (4.21), (4.62), (4.63)

$$\begin{aligned}
W_n &= 4\pi G \int_0^a \rho(a') a'^2 da' \delta_{n,0} + \frac{4\pi G}{2n+1} \left[ \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \{a'^{n+3} [f_n(a') + \right. \\
& \quad + \frac{(n+2)(2n+1)}{4} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} f_i(a') f_j(a') I_L(i, j, n) + \\
& \quad \left. + \frac{(n+2)(n+1)(2n+1)}{12} \right. \\
& \quad \left. \cdot \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} \sum_{q=|i-j|}^{i+j} \frac{2q+1}{2} f_i(a') f_j(a') f_s(a') I_L(i, j, q) I_L(s, q, n) + \dots \right] da' \Big] P_n(\sin \theta) \quad (4.64)
\end{aligned}$$

Por otra parte

$$W_0 = 4\pi G \int_0^a \rho(a') a'^2 da' = Gm(a) \quad (4.65)$$

donde  $m(a)$  es la masa contenida en la superficie equipotencial de parámetro  $a$ .

Sustituyendo  $n = 0$  en (4.64) y teniendo en cuenta (4.65), se obtiene

$$\begin{aligned} f_0(a') + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} f_i(a') f_j(a') I_L(i, j, 0) + \\ + \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} \sum_{q=|i-j|}^{i+j} \frac{2q+1}{2} f_i(a') f_j(a') f_s(a') I_L(i, j, q) I_L(s, q, 0) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Llamando

$$F_0(a) = \int_0^a \rho(a') a'^2 da' \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} F_n(a) = \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{n+3} \left[ f_n(a') + \frac{(n+2)(2n+1)}{4} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} f_i(a') f_j(a') I_L(i, j, n) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(n+2)(n+1)(2n+1)}{12} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} \sum_{q=|i-j|}^{i+j} \frac{2q+1}{2} f_i(a') f_j(a') f_s(a') I_L(i, j, q) I_L(s, q, n) + \dots \right] \right\} da' \end{aligned} \quad (4.68)$$

para  $n > 0$ .

De (4.11), (4.14), (4.64), (4.65), (4.67), (4.68)

$$V = 4\pi G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(a)}{2n+1} r^{-n-1} P_n(\sin \theta) \quad (4.69)$$

De (4.12), (4.20), (4.21), (4.62), (4.63)

$$\begin{aligned} K_n = \frac{4\pi G}{2n+1} \left[ \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{2-n} \left[ \frac{1}{2} \delta_{n,0} + f_n(a') + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{(1-n)(2n+1)}{4} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} f_i(a') f_j(a') I_L(i, j, n) - \frac{(1-n)n(2n+1)}{12} \right] \right\} \right. \end{aligned}$$

$$\left. \cdot \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} \sum_{q=|i-j|}^{i+j} \frac{2q+1}{2} f_i(a') f_j(a') f_s(a') I_L(i, j, q) I_L(s, q, n) + \dots \right\} da' \Big] P_n(\sin \theta) \quad (4.70)$$

para  $n \neq 2$

De (4.13), (4.20), (4.22), (4.62), (4.63)

$$K_2 = \frac{4\pi G}{5} \left[ \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ f_2(a') - \frac{5}{4} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} f_i(a') f_j(a') I_L(i, j, 2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{6} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} \sum_{q=|i-j|}^{i+j} \frac{2q+1}{2} f_i(a') f_j(a') f_s(a') I_L(i, j, q) I_L(s, q, 2) + \dots \right\} da' \right] P_2(\sin \theta) \quad (4.71)$$

Llamando

$$E_n(a) = \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{2-n} \left[ \frac{1}{2} \delta_{n,0} + f_n(a') + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1-n)(2n+1)}{4} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} f_i(a') f_j(a') I_L(i, j, n) - \frac{(1-n)n(2n+1)}{12} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} \sum_{q=|i-j|}^{i+j} \frac{2q+1}{2} f_i(a') f_j(a') f_s(a') I_L(i, j, q) I_L(s, q, n) + \dots \right\} da' \quad (4.72)$$

para  $n \neq 2$

$$E_2(a) = \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ f_2(a') - \frac{5}{4} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} f_i(a') f_j(a') I_L(i, j, 2) + \right. \\ \left. + \frac{5}{6} \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{s=0}^{\alpha} \sum_{q=|i-j|}^{i+j} \frac{2q+1}{2} f_i(a') f_j(a') f_s(a') I_L(i, j, q) I_L(s, q, 2) + \dots \right\} da' \quad (4.73)$$

De (4.11), (4.12), (4.13), (4.70), (4.71), (4.72), (4.73)

$$U = 4\pi G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(a)}{2n+1} r^n P_n(\sin \theta) \quad (4.74)$$



De (4.3), (4.69), (4.74)

$$\Omega = 4\pi G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n(a) r^n + F_n(a) r^{-n-1}}{2n+1} P_n(\sin \theta) \quad (4.75)$$

Truncando  $r^3$ , hasta tercer orden en las amplitudes, se obtiene

$$\begin{aligned} r^3 = a^3 (1 + 3\Sigma + 3\Sigma^2 + \Sigma^3) = 3a^3 \left\{ \left( \frac{1}{3} + f_0(a) + \frac{1}{5} f_2^2(a) + \frac{2}{105} f_2^3(a) \right) + \right. \\ \left. + \left( f_2(a) + 2f_0(a) f_2(a) + \frac{2}{7} f_2^2(a) + \frac{1}{7} f_2^3(a) \right) P_2(\sin \theta) + \right. \\ \left. + \left( \frac{18}{35} f_2^2(a) + \frac{36}{385} f_2^3(a) + f_4(a) \right) P_4(\sin \theta) \right\} \quad (4.76) \end{aligned}$$

De (4.66)

$$f_0(a') = -\frac{1}{5} f_2^2(a') - \frac{2}{105} f_2^3(a')$$

que es válida hasta tercer orden en las amplitudes.

Por lo tanto, para segundo orden

$$f_0(a') = -\frac{1}{5} f_2^2(a') \quad (4.77)$$

Consecuentemente, en segundo orden,

$$\begin{aligned} E_0(a) &= \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{10} f_2^2(a') \right] \right\} da' \\ E_2(a) &= \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ f_2(a') - \frac{1}{7} f_2^2(a') \right\} da' \\ E_4(a) &= \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \frac{1}{a'^2} \left[ f_4(a') - \frac{27}{35} f_2^2(a') \right] \right\} da' \\ E_n(a) &= \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{2-n} f_n(a') \right\} da' \quad (4.78) \end{aligned}$$

$$F_0(a) = \int_0^a a'^2 \rho(a') da'$$

$$\begin{aligned}
F_2(a) &= \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^5 \left[ f_2(a') + \frac{4}{7} f_2^2(a') \right] \right\} da' \\
F_4(a) &= \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^7 \left[ f_4(a') + \frac{54}{35} f_2^2(a') \right] \right\} da' \\
F_n(a) &= \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{n+3} f_n(a') \right\} da' \tag{4.79}
\end{aligned}$$

De (4.9), (4.10), (4.11), (4.78), (4.79)

$$K = 4\pi G \sum_{j=0}^{\infty} \frac{E_j(a)}{2j+1} r^j P_j(\sin \theta) \tag{4.80}$$

$$W = 4\pi G \sum_{j=0}^{\infty} \frac{F_j(a)}{2j+1} r^{-j-1} P_j(\sin \theta) \tag{4.81}$$

Por otra parte, truncando  $\Sigma^2$  hasta segundo orden en las amplitudes, se obtiene

$$\Sigma^2 = f_2^2(a) \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \right) \tag{4.82}$$

De (4.15), (4.21), (4.78), (4.80), (4.82)

$$\begin{aligned}
K_0 = 4\pi G E_0(a) &= 4\pi G \left\{ \int_a^{a_1} a' \rho(a') da' - \frac{1}{5} \int_a^{a_1} a' \rho(a') f_2^2(a') da' - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{5} \int_a^{a_1} a'^2 \rho(a') f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' \right\} \tag{4.83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2 = \frac{4\pi G}{5} E_2(a) r^2 P_2(\sin \theta) &= \frac{4\pi G a^2}{5} \left\{ \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' + \right. \\
&+ 2 \left( \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) \right) \left( \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' \right) - \\
&\quad \left. - \frac{2}{7} \int_a^{a_1} \rho(a') f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' \right\} P_2(\sin \theta) \tag{4.84}
\end{aligned}$$

$$K_4 = \frac{4\pi G}{9} E_4(a) r^4 P_4(\sin \theta) = \frac{4\pi G a^4}{9} \left\{ -2 \int_a^{a_1} a'^{-3} \rho(a') f_4(a') da' + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{54}{35} \int_a^{a_1} a'^{-3} \rho(a') f_2^2(a') da' + \int_a^{a_1} a'^{-2} \rho(a') \frac{df_4(a')}{da'} da' - \\
& \left. - \frac{54}{35} \int_a^{a_1} a'^{-2} \rho(a') f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' \right\} P_4(\sin \theta) \quad (4.85)
\end{aligned}$$

$$K_n = \frac{4\pi G}{2n+1} E_n(a) r^n P_n(\sin \theta) \quad \text{para } n > 4 \quad (4.86)$$

De (4.15), (4.21), (4.79), (4.81), (4.82)

$$\begin{aligned}
W_0 &= 4\pi G F_0(a) r^{-1} = 4\pi G a^{-1} \left\{ 1 - \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) + \right. \\
& \left. + f_2^2(a) \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \right) \right\} \int_0^a a'^2 \rho(a') da' \quad (4.87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_2 &= \frac{4\pi G}{5} F_2(a) r^{-3} P_2(\sin \theta) = \frac{4\pi G}{5a^3} \left\{ 5 \left( 1 - 3 \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) \right) \int_0^a a'^4 \rho(a') f_2(a') da' + \right. \\
& + \left( 1 - 3 \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) \right) \int_0^a a'^5 \rho(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' + \frac{20}{7} \int_0^a a'^4 \rho(a') f_2^2(a') da' + \\
& \left. + \frac{8}{7} \int_0^a a'^5 \rho(a') f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' \right\} P_2(\sin \theta) \quad (4.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_4 &= \frac{4\pi G}{9} F_4(a) r^{-5} P_4(\sin \theta) = \frac{4\pi G}{9a^5} \left\{ 7 \int_0^a a'^6 \rho(a') f_4(a') da' + \frac{54}{5} \int_0^a a'^6 \rho(a') f_2^2(a') da' + \right. \\
& + \left. \int_0^a a'^7 \rho(a') \frac{df_4(a')}{da'} da' + \frac{108}{35} \int_0^a a'^7 \rho(a') f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' \right\} P_4(\sin \theta) \quad (4.89)
\end{aligned}$$

$$W_n = \frac{4\pi G}{2n+1} F_n(a) r^{-n-1} P_n(\sin \theta) \quad \text{para } n > 4 \quad (4.90)$$

Desafortunadamente las series definidas en (4.6) no convergen en la capa definida por  $r \in [r_{min}(a), r_{max}(a)]$  con

$$r_{min}(a) = \min \left\{ r(a, \theta, \lambda) : \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \lambda \in [0, 2\pi] \right\}$$

$$r_{max}(a) = \max \left\{ r(a, \theta, \lambda) : \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \lambda \in [0, 2\pi] \right\}$$

y además la suposiciones, que la teoría clásica asume, de que  $U_n = K_n$  y  $V_n = W_n$ , no son correctas.

Para resolver estos inconvenientes utilizaremos dos métodos diferentes: uno empleando la cuadratura numérica y el otro empleando un desarrollo analítico.

### Teoría de segundo orden: Método de cuadratura numérica

Truncando la serie (4.15) para  $m = \alpha$

$$r = a \left( 1 + \sum_{m=0}^{\alpha} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) \right) = a(1 + \Sigma) \quad (4.91)$$

Desarrollando  $r^j$ ,  $\Sigma^2$  y  $\Sigma$  hasta segundo orden

$$r^j = a^j (1 + \Sigma)^j = a^j \left( 1 + j\Sigma + \frac{j(j-1)}{2} \Sigma^2 \right) \quad (4.92)$$

$$\Sigma^2 = \frac{1}{5} f_2^2(a) P_0(\sin \theta) + \frac{2}{7} f_2^2(a) P_2(\sin \theta) + \frac{18}{35} f_2^2(a) P_4(\sin \theta) \quad (4.93)$$

$$\Sigma = f_0(a) P_0(\sin \theta) + f_2(a) P_2(\sin \theta) + f_4(a) P_4(\sin \theta) + \sum_{m=3}^{\alpha} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) \quad (4.94)$$

De (4.92), (4.93), (4.94)

$$r^j = a^j \left\{ 1 + j f_0(a) + \frac{j(j-1)}{10} f_2^2(a) + \left( j f_2(a) + \frac{j(j-1)}{7} f_2^2(a) \right) P_2(\sin \theta) + \left( \frac{9j(j-1)}{35} f_2^2(a) + j f_4(a) \right) P_4(\sin \theta) + \sum_{m=3}^{\alpha} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) \right\} \quad (4.95)$$

Por otro lado

$$\ln r = \ln a + \ln(1 + \Sigma) \quad (4.96)$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Desarrollando  $\ln(1 + \Sigma)$  hasta segundo orden

$$\ln(1 + \Sigma) = \Sigma - \frac{\Sigma^2}{2} \quad (4.97)$$

De (4.93), (4.94), (4.96), (4.97)

$$\begin{aligned} \ln r = \ln a + f_0(a) - \frac{1}{10} f_2^2(a) + \left( f_2(a) - \frac{1}{7} f_2^2(a) \right) P_2(\sin \theta) + \\ + \left( f_4(a) - \frac{9}{35} f_2^2(a) \right) P_4(\sin \theta) + \sum_{m=3}^{\alpha} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) \end{aligned} \quad (4.98)$$

Sean  $(a, \theta, \lambda)$  las coordenadas de *Clairaut* de la superficie equipotencial que contiene a  $dm$  y a  $dm'$  en la dirección de  $(\theta', \lambda')$  dadas por  $(a(1 + \Sigma)(1 + \Sigma')^{-1}, \theta', \lambda')$ .

Entonces, aproximando hasta segundo orden,

$$a' = (a(1 + \Sigma)(1 + \Sigma')^{-1}) = a + a\Sigma - a\Sigma' + a\Sigma'^2 - a\Sigma\Sigma' \quad (4.99)$$

Considerando que  $\frac{df_2(a)}{da}$  es de primer orden y el resto de derivadas de las funciones de deformación,  $\frac{df_k(a)}{da}$ , son de segundo orden o superior, desarrollaremos  $f_{2m}(a')$  hasta segundo orden.

$$f_{2m}(a') = f_{2m}(a + a(\Sigma - \Sigma')) = f_{2m}(a) + \frac{df_{2m}(a)}{da} a(\Sigma - \Sigma') \quad (4.100)$$

De (4.94), (4.100)

$$\begin{aligned} \Sigma' = f_0(a) - \frac{1}{5} a f_2(a) \frac{df_2(a)}{da} + \left[ f_2(a) + a f_2(a) \frac{df_2(a)}{da} \left( P_2(\sin \theta) - \frac{2}{7} \right) \right] P_2(\sin \theta') + \\ + \left( f_4(a) - \frac{18}{35} a f_2(a) \frac{df_2(a)}{da} \right) P_4(\sin \theta') + \sum_{m=3}^{\alpha} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta') \end{aligned} \quad (4.101)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\Sigma'^2 &= \sum_{m=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha} f_{2m}(a') f_{2k}(a') P_{2m}(\sin \theta') P_{2k}(\sin \theta') = \\ &= \sum_{m=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha} \left( f_{2m}(a) + \frac{d f_{2m}(a)}{d a} a(\Sigma - \Sigma') \right) \left( f_{2k}(a) + \frac{d f_{2k}(a)}{d a} a(\Sigma - \Sigma') \right) \cdot \\ &\quad \cdot P_{2m}(\sin \theta') P_{2k}(\sin \theta')\end{aligned}$$

En segundo orden,  $\Sigma'^2$ , queda como  $\Sigma'^2 = f_2^2(a) P_2^2(\sin \theta')$ .

Además como  $P_2^2(\sin \theta') = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta') + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta')$ , entonces

$$\Sigma'^2 = \frac{1}{5} f_2^2(a) + \frac{2}{7} f_2^2(a) P_2(\sin \theta') + \frac{18}{35} f_2^2(a) P_4(\sin \theta') \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned}\Sigma \Sigma' &= \sum_{m=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha} f_{2m}(a) f_{2k}(a') P_{2m}(\sin \theta) P_{2k}(\sin \theta') = \\ &= \sum_{m=0}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha} f_{2m}(a) \left( f_{2k}(a) + \frac{d f_{2k}(a)}{d a} a(\Sigma - \Sigma') \right) P_{2m}(\sin \theta) P_{2k}(\sin \theta')\end{aligned}$$

Por lo tanto, en segundo orden,

$$\Sigma \Sigma' = f_2^2(a) P_2(\sin \theta) P_2(\sin \theta') \quad (4.103)$$

Llamando

$$S_1 = f_2(a) (P_2(\sin \theta) - P_2(\sin \theta')) \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{5} \left( f_2^2(a) + a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{d a} \right) + f_4(a) P_4(\sin \theta) + \\ &+ \left( \frac{2}{7} f_2^2(a) - f_2^2(a) P_2(\sin \theta) + \frac{2}{7} a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{d a} - a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{d a} P_2(\sin \theta) \right) P_2(\sin \theta') + \\ &+ \left( \frac{18}{35} f_2^2(a) - f_4(a) + \frac{18}{35} a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{d a} \right) P_4(\sin \theta') + \sum_{m=3}^{\alpha} f_{2m}(a) (P_{2m}(\sin \theta) - P_{2m}(\sin \theta'))\end{aligned} \quad (4.105)$$

De (4.94), (4.99), (4.101), (4.102), (4.103)

$$a' = a + a S_1 + a S_2 \quad (4.106)$$

Por otra parte, el potencial exterior vendrá determinado por

$$U_n = \frac{G}{2-n} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_r^{a_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' \quad \text{para } n \neq 2 \quad (4.107)$$

Sea

$$\begin{aligned} & \int_r^{a_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da' = \int_{a+aS_1+aS_2}^{a_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da' = \\ & = \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da' + \int_{a+aS_1}^a \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da' + \int_{a+aS_1+aS_2}^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da' \end{aligned} \quad (4.108)$$

donde

$$K_n = \frac{G}{2-n} \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r'^{2-n} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right] da' \quad \text{para } n \neq 2 \quad (4.109)$$

Seguidamente aproximaremos la integral  $\int_{a+aS_1}^a \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da'$  hasta segundo orden utilizando un método de integración numérica de primer orden, concretamente el método del trapecio,

$$\int_{a+aS_1}^a \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da' = -\frac{aS_1}{2} \left( \rho(a) \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} \Big|_{a'=a} + \rho(a+aS_1) \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} \Big|_{a'=a+aS_1} \right) \quad (4.110)$$

Como  $S_1$  es de primer orden, aproximaremos  $\frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'}$  hasta primer orden.

$$r'^{2-n} = a'^{2-n} (1 + (2-n) f_2(a') P_2(\sin \theta')) \quad \text{en primer orden}$$

$$\frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} = (2-n) a'^{1-n} \left[ 1 + \left( (2-n) f_2(a') + a' \frac{d f_2(a')}{d a'} \right) P_2(\sin \theta') \right] \quad \text{en primer orden}$$

De (4.100)  $f_2(a') = f_2(a)$  y  $\frac{d f_2(a')}{d a'} = \frac{d f_2(a)}{d a}$  en primer orden. Por lo tanto

$$\rho(a) \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} \Big|_{a'=a} = (2-n) a^{1-n} \rho(a) \left[ 1 + \left( (2-n) f_2(a) + a \frac{d f_2(a)}{d a} \right) P_2(\sin \theta') \right] \quad (4.111)$$

Por otra parte

$$\rho(a + aS_1) = \rho(a) + aS_1 \frac{d\rho(a)}{da} \quad \text{en primer orden}$$

con lo que aproximando hasta primer orden el producto  $\rho(a + aS_1) \left. \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} \right|_{a'=a+aS_1}$  queda

$$\begin{aligned} \rho(a + aS_1) \left. \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} \right|_{a'=a+aS_1} &= (2-n) a^{1-n} \rho(a) [1 + (1-n) S_1] + \\ &+ \left( (2-n) f_2(a) + a \frac{d f_2(a)}{da} \right) P_2(\sin \theta') \Big] + (2-n) a^{2-n} S_1 \frac{d\rho(a)}{da} \quad (4.112) \end{aligned}$$

De (4.104), (4.110), (4.111), (4.112)

$$\begin{aligned} \int_{a+aS_1}^a \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da' &= -(2-n) a^{2-n} \rho(a) \left[ -\frac{1}{5} f_2^2(a) - \frac{1}{5} a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{da} + \right. \\ &+ \left( f_2(a) + \frac{1-n}{7} f_2^2(a) \right) P_2(\sin \theta) + \frac{9(1-n)}{35} f_2^2(a) P_4(\sin \theta) + \left( -f_2(a) - \frac{3}{7} f_2^2(a) + \frac{n}{7} f_2^2(a) + \right. \\ &+ \left. f_2^2(a) P_2(\sin \theta) - \frac{2}{7} a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{da} + a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{da} P_2(\sin \theta) \right) P_2(\sin \theta') + \\ &+ \left( -\frac{27}{35} f_2^2(a) + \frac{9n}{35} f_2^2(a) - \frac{18}{35} a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{da} \right) P_4(\sin \theta') \Big] - \\ &-(2-n) a^{2-n} \frac{d\rho(a)}{da} \left[ \frac{1}{5} a f_2^2(a) + \frac{1}{7} a f_2^2(a) P_2(\sin \theta) + \frac{9}{35} a f_2^2(a) P_4(\sin \theta) + \left( \frac{1}{7} a f_2^2(a) - \right. \right. \\ &\left. \left. - a f_2^2(a) P_2(\sin \theta) \right) P_2(\sin \theta') + \frac{9}{35} a f_2^2(a) P_4(\sin \theta') \right] \quad \text{para } n \neq 2 \quad (4.113) \end{aligned}$$

Ahora aproximaremos la integral  $\int_{a+aS_1+aS_2}^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da'$  hasta segundo orden utilizando el método del rectángulo

$$\int_{a+aS_1+aS_2}^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da' = -a S_2 \rho(\xi) \left. \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} \right|_{a'=\xi}$$

donde  $\xi \in [a + aS_1, a + aS_1 + aS_2]$



Como  $S_2$  es de segundo orden, tanto  $\rho(\xi)$  como  $\left. \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} \right|_{a'=\xi}$  se tendrán que aproximar hasta orden cero. Por lo tanto

$$\int_{a+aS_1+aS_2}^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da' = -(2-n) a^{1-n} \rho(a) S_2 \quad \text{para } n \neq 2 \quad (4.114)$$

Para el caso  $n = 2$  se tiene que

$$U_2 = G \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_r^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') P_2(\cos \gamma) \cos \theta' da' d\theta' d\lambda \quad (4.115)$$

Sea

$$\begin{aligned} & \int_r^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') da' = \int_{a+aS_1+aS_2}^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') da' = \\ & = \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') da' + \int_{a+aS_1}^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') da' + \int_{a+aS_1+aS_2}^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') da' \end{aligned} \quad (4.116)$$

donde

$$K_2 = G \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln r' P_2(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda \right] da' \quad (4.117)$$

A continuación aproximaremos la integral  $\int_{a+aS_1}^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') da'$  hasta segundo orden utilizando un método de integración numérica de primer orden, concretamente el método del trapecio,

$$\int_{a+aS_1}^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') da' = -\frac{aS_1}{2} \left( \rho(a) \left. \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') \right|_{a'=a} + \rho(a+aS_1) \left. \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') \right|_{a'=a+aS_1} \right) \quad (4.118)$$

Como  $S_1$  es de primer orden, aproximaremos  $\left. \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') \right|_{a'=a}$  hasta primer orden.

$$\ln r' = \ln a' + f_2(a') P_2(\sin \theta') \quad \text{en primer orden}$$

$$\frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') = a'^{-1} + \frac{df_2(a')}{da'} P_2(\sin \theta') \quad \text{en primer orden}$$

De (4.100)  $f_2(a') = f_2(a)$  y  $\frac{df_2(a')}{da'} = \frac{df_2(a)}{da}$  en primer orden. Por lo tanto

$$\rho(a) \left. \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') \right|_{a'=a} = \rho(a) a'^{-1} + \rho(a) \frac{df_2(a')}{da'} P_2(\sin \theta') \quad (4.119)$$

Por otra parte

$$\rho(a + aS_1) = \rho(a) + aS_1 \frac{d\rho(a)}{da} \quad \text{en primer orden}$$

con lo que aproximando hasta primer orden el producto

$$\begin{aligned} \rho(a + aS_1) \left. \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') \right|_{a'=a+aS_1} \text{ queda} \\ \rho(a + aS_1) \left. \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') \right|_{a'=a+aS_1} = (1 - S_1) a^{-1} \rho(a) + \rho(a) \frac{df_2(a)}{da} P_2(\sin \theta') + \frac{d\rho(a)}{da} S_1 \end{aligned} \quad (4.120)$$

De (4.104), (4.118), (4.119), (4.120)

$$\begin{aligned} \int_{a+aS_1}^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') da' = \rho(a) \left[ \frac{1}{5} f_2^2(a) + \left( -f_2(a) + \frac{1}{7} f_2^2(a) \right) P_2(\sin \theta) + \right. \\ \left. + \frac{9}{35} f_2^2(a) P_4(\sin \theta) + \frac{1}{5} a f_2(a) \frac{df_2(a)}{da} + \right. \\ \left. + \left( f_2(a) + \frac{1}{7} f_2^2(a) - f_2^2(a) P_2(\sin \theta) + \frac{2}{7} a f_2(a) \frac{df_2(a)}{da} - \right. \right. \\ \left. \left. - a f_2(a) \frac{df_2(a)}{da} P_2(\sin \theta) \right) P_2(\sin \theta') + \left( \frac{9}{35} f_2^2(a) + \frac{18}{35} a f_2(a) \frac{df_2(a)}{da} \right) P_4(\sin \theta') \right] + \\ \left. + \frac{d\rho(a)}{da} \left[ -\frac{1}{5} a f_2^2(a) - \frac{1}{7} a f_2^2(a) P_2(\sin \theta) - \frac{9}{35} a f_2^2(a) P_4(\sin \theta) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( -\frac{1}{7} a f_2^2(a) + a f_2^2(a) P_2(\sin \theta) \right) P_2(\sin \theta') - \frac{9}{35} a f_2^2(a) P_4(\sin \theta') \right] \end{aligned} \quad (4.121)$$

Ahora aproximaremos la integral  $\int_{a+aS_1+aS_2}^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') da'$  hasta segundo orden utilizando el método del rectángulo

$$\int_{a+aS_1+aS_2}^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') da' = -aS_2 \rho(\xi) \left. \frac{\partial}{\partial a'} (\ln r') \right|_{a'=\xi}$$

donde  $\xi \in [a + aS_1, a + aS_1 + aS_2]$

Como  $S_2$  es de segundo orden, tanto  $\rho(\xi)$  como  $\frac{\partial}{\partial a'}(\ln r')|_{a'=\xi}$  se tendrán que aproximar hasta orden cero. Por lo tanto

$$\int_{a+aS_1+aS_2}^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'}(\ln r') da' = -\rho(a) S_2 \quad (4.122)$$

De (4.105), (4.107), (4.109), (4.113), (4.114), (4.115), (4.117), (4.121), (4.122)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n = \mathbf{K}_n - 4\pi\mathbf{G}\mathbf{a}^2\delta_{n,0} \left\{ \rho(\mathbf{a}) \left[ \left( \mathbf{f}_2(\mathbf{a}) + \frac{1}{7} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \right) \mathbf{P}_2(\sin \theta) + \left( \frac{9}{35} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) + \mathbf{f}_4(\mathbf{a}) \right) \mathbf{P}_4(\sin \theta) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{m=3}^{\alpha} \mathbf{f}_{2m}(\mathbf{a}) \mathbf{P}_{2m}(\sin \theta) \right] + \frac{d\rho(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} \left[ \frac{1}{5} \mathbf{a} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) + \frac{1}{7} \mathbf{a} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \mathbf{P}_2(\sin \theta) + \frac{9}{35} \mathbf{a} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \mathbf{P}_4(\sin \theta) \right] \right\} - \\ - \frac{4\pi\mathbf{G}}{9} \mathbf{a}^{-2} \delta_{n,4} \left\{ \rho(\mathbf{a}) \left( \frac{27}{35} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) - \mathbf{f}_4(\mathbf{a}) \right) \mathbf{P}_4(\sin \theta) + \frac{d\rho(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} \frac{9}{35} \mathbf{a} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \mathbf{P}_4(\sin \theta) \right\} + \\ + \frac{4\pi\mathbf{G}}{2\mathbf{n}+1} \mathbf{a}^{2-n} \rho(\mathbf{a}) \sum_{m=3}^{\alpha} \mathbf{f}_{2m}(\mathbf{a}) \mathbf{P}_{2m}(\sin \theta) \delta_{n,2m} \quad \text{para } \mathbf{n} \neq 2 \quad (4.123) \end{aligned}$$

$$\text{con } \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{K}_2 - \frac{4\pi\mathbf{G}}{5} \left\{ \rho(\mathbf{a}) \left( \frac{1}{7} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) - \mathbf{f}_2(\mathbf{a}) \right) \mathbf{P}_2(\sin \theta) + \frac{d\rho(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \left( \frac{1}{7} - \mathbf{P}_2(\sin \theta) \right) \mathbf{P}_2(\sin \theta) \right\} \quad (4.124)$$

Por otra parte, el potencial interior vendrá determinado por

$$V_n = \frac{G}{n+3} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' da' d\theta' d\lambda' \quad (4.125)$$

Sea

$$\begin{aligned} \int_0^r \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' = \int_0^{a+aS_1+aS_2} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' = \\ = \int_0^a \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' + \int_a^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' + \int_{a+aS_1}^{a+aS_1+aS_2} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' \quad (4.126) \end{aligned}$$

donde

$$W_n = \frac{G}{n+3} \int_0^a \rho(a') \frac{\partial}{\partial a'} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r'^{n+3} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right] da' \quad (4.127)$$

Seguidamente aproximaremos la integral  $\int_a^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da'$  hasta segundo orden utilizando un método de integración numérica de primer orden, concretamente el método del trapecio,

$$\int_a^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' = \frac{aS_1}{2} \left( \rho(a) \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} \Big|_{a'=a} + \rho(a+aS_1) \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} \Big|_{a'=a+aS_1} \right) \quad (4.128)$$

Como  $S_1$  es de primer orden, aproximaremos  $\frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'}$  hasta primer orden.

$$\frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} = (n+3) a'^{n+2} \left[ 1 + \left( (n+3) f_2(a') + a' \frac{d f_2(a')}{d a'} \right) P_2(\sin \theta') \right] \quad \text{en primer orden}$$

De (4.100)  $f_2(a') = f_2(a)$  y  $\frac{d f_2(a')}{d a'} = \frac{d f_2(a)}{d a}$  en primer orden. Por lo tanto

$$\rho(a) \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} \Big|_{a'=a} = (n+3) a^{n+2} \rho(a) \left[ 1 + \left( (n+3) f_2(a) + a \frac{d f_2(a)}{d a} \right) P_2(\sin \theta') \right] \quad (4.129)$$

Por otra parte

$$\rho(a+aS_1) = \rho(a) + aS_1 \frac{d \rho(a)}{d a} \quad \text{en primer orden}$$

con lo que aproximando hasta primer orden el producto  $\rho(a+aS_1) \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} \Big|_{a'=a+aS_1}$  y teniendo en cuenta (4.104) queda

$$\begin{aligned} \rho(a+aS_1) \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} \Big|_{a'=a+aS_1} &= (n+3) a^{n+2} \left\{ \rho(a) [1 + (n+2) f_2(a) P_2(\sin \theta) + f_2(a) P_2(\sin \theta')] + \right. \\ &\quad \left. + a \frac{d f_2(a)}{d a} P_2(\sin \theta') \right] + \frac{d \rho(a)}{d a} a f_2(a) (P_2(\sin \theta) - P_2(\sin \theta')) \left. \right\} \quad (4.130) \end{aligned}$$

De (4.104), (4.128), (4.129), (4.130)

$$\begin{aligned} \int_a^{a+aS_1} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' &= (n+3) a^{n+3} \left\{ \rho(a) \left[ -\frac{1}{5} f_2^2(a) - \frac{1}{5} a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{d a} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( f_2(a) + \frac{2}{7} f_2^2(a) + \frac{n}{7} f_2^3(a) \right) P_2(\sin \theta) + \left( \frac{18}{35} f_2^2(a) + \frac{9n}{35} f_2^3(a) \right) P_4(\sin \theta) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( -f_2(a) - \frac{4}{7} f_2^2(a) - \frac{n}{7} f_2^2(a) + f_2^2(a) P_2(\sin \theta) - \frac{2}{7} a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{d a} + \right. \\
& + a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{d a} P_2(\sin \theta) \left. \right) P_2(\sin \theta') + \left( -\frac{36}{35} f_2^2(a) - \frac{9n}{35} f_2^2(a) - \frac{18}{35} a f_2(a) \frac{d f_2(a)}{d a} \right) P_4(\sin \theta') + \\
& + \frac{d \rho(a)}{d a} \left[ \frac{1}{5} a f_2^2(a) + \frac{1}{7} a f_2^2(a) P_2(\sin \theta) + \frac{9}{35} a f_2^2(a) P_4(\sin \theta) + \left( \frac{1}{7} a f_2^2(a) - \right. \right. \\
& \left. \left. - a f_2^2(a) P_2(\sin \theta) \right) P_2(\sin \theta') + \frac{9}{35} a f_2^2(a) P_4(\sin \theta') \right] \left. \right\} \quad (4.131)
\end{aligned}$$

Ahora aproximaremos la integral  $\int_{a+aS_1}^{a+aS_1+aS_2} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da'$  hasta segundo orden utilizando el método del rectángulo

$$\int_{a+aS_1}^{a+aS_1+aS_2} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' = a S_2 \rho(\xi) \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} \Big|_{a'=\xi}$$

donde  $\xi \in [a + aS_1, a + aS_1 + aS_2]$

Como  $S_2$  es de segundo orden, tanto  $\rho(\xi)$  como  $\frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} \Big|_{a'=\xi}$  se tendrán que aproximar hasta orden cero. Por lo tanto

$$\int_{a+aS_1}^{a+aS_1+aS_2} \rho(a') \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' = (n+3) a^{n+3} \rho(a) S_2 \quad (4.132)$$

De (4.105), (4.125), (4.126), (4.127), (4.131), (4.132)

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_n = \mathbf{W}_n + 4\pi \mathbf{G} a^2 \left\{ \rho(a) \left[ \left( a \mathbf{f}_2(a) + \frac{2}{7} a \mathbf{f}_2^2(a) \right) \mathbf{P}_2(\sin \theta) + \left( a \mathbf{f}_4(a) + \frac{18}{35} a \mathbf{f}_2^2(a) \right) \mathbf{P}_4(\sin \theta) + \right. \right. \\
+ a \sum_{m=3}^{\alpha} \mathbf{f}_{2m}(a) \mathbf{P}_{2m}(\sin \theta) \left. \right] + \frac{d \rho(a)}{d a} \left( \frac{1}{5} a^2 \mathbf{f}_2^2(a) + \frac{1}{7} a^2 \mathbf{f}_2^2(a) \mathbf{P}_2(\sin \theta) + \right. \\
+ \left. \frac{9}{35} a^2 \mathbf{f}_2^2(a) \mathbf{P}_4(\sin \theta) \right) \left. \right\} \delta_{n,0} + \frac{4\pi \mathbf{G}}{5} a^4 \left\{ \rho(a) \left( -a \mathbf{f}_2(a) - \frac{4}{7} a \mathbf{f}_2^2(a) \right) + \right. \\
+ \left. \frac{d \rho(a)}{d a} \left( \frac{1}{7} a^2 \mathbf{f}_2^2(a) - a^2 \mathbf{f}_2^2(a) \mathbf{P}_2(\sin \theta) \right) \right\} \mathbf{P}_2(\sin \theta) \delta_{n,2} + \\
+ \frac{4\pi \mathbf{G}}{9} a^6 \left\{ \rho(a) \left( -a \mathbf{f}_4(a) - \frac{54}{35} a \mathbf{f}_2^2(a) \right) \mathbf{P}_4(\sin \theta) + \frac{d \rho(a)}{d a} \frac{9}{35} a^2 \mathbf{f}_2^2(a) \mathbf{P}_4(\sin \theta) \right\} \delta_{n,4} - \\
- \frac{4\pi \mathbf{G}}{2n+1} a^{n+3} \rho(a) \sum_{m=3}^{\alpha} \mathbf{f}_{2m}(a) \mathbf{P}_{2m}(\sin \theta) \delta_{n,2m} \quad (4.133)
\end{aligned}$$

Seguidamente calcularemos los primeros términos del desarrollo del potencial autogravitatorio  $\Omega$ .

De (4.123)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 = \mathbf{K}_0 - 4\pi\mathbf{G} \mathbf{a}^2 \rho(\mathbf{a}) & \left[ \left( \mathbf{f}_2(\mathbf{a}) + \frac{1}{7} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \right) \mathbf{P}_2(\sin \theta) + \left( \frac{9}{35} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) + \mathbf{f}_4(\mathbf{a}) \right) \mathbf{P}_4(\sin \theta) + \right. \\ & \left. + \sum_{m=3}^{\alpha} \mathbf{f}_{2m}(\mathbf{a}) \mathbf{P}_{2m}(\sin \theta) \right] - 4\pi\mathbf{G} \mathbf{a}^3 \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \frac{d\rho(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \mathbf{P}_2(\sin \theta) + \frac{9}{35} \mathbf{P}_4(\sin \theta) \right) \end{aligned} \quad (4.134)$$

De (4.133)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 = \mathbf{W}_0 + 4\pi\mathbf{G} \mathbf{a}^3 & \left\{ \rho(\mathbf{a}) \left[ \left( \mathbf{f}_2(\mathbf{a}) + \frac{2}{7} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \right) \mathbf{P}_2(\sin \theta) + \left( \mathbf{f}_4(\mathbf{a}) + \frac{18}{35} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \right) \mathbf{P}_4(\sin \theta) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{m=3}^{\alpha} \mathbf{f}_{2m}(\mathbf{a}) \mathbf{P}_{2m}(\sin \theta) \right] + \mathbf{a} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \frac{d\rho(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \mathbf{P}_2(\sin \theta) + \frac{9}{35} \mathbf{P}_4(\sin \theta) \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.135)$$

Para calcular  $V_0 r^{-1}$  aproximaremos  $r^{-1}$  hasta primer orden ya que, en el desarrollo de  $V_0$ , existe un término de primer orden.

$$r^{-1} = a^{-1} (1 - f_2(a) P_2(\sin \theta)) \quad (4.136)$$

De (4.3), (4.6), (4.134), (4.135), (4.136)

$$\mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_0 \mathbf{r}^{-1} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{W}_0 \mathbf{r}^{-1} - 4\pi\mathbf{G} \mathbf{a}^2 \rho(\mathbf{a}) \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \mathbf{P}_2(\sin \theta) + \frac{9}{35} \mathbf{P}_4(\sin \theta) \right) \quad (4.137)$$

Para calcular  $U_2 r^2$  aproximaremos  $r^2$  hasta primer orden ya que, en el desarrollo de  $U_2$ , existe un término de primer orden.

$$r^2 = a^2 (1 + 2f_2(a) P_2(\sin \theta)) \quad (4.138)$$

De (4.133)

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{W}_2 + \frac{4\pi\mathbf{G}}{5} \mathbf{a}^5 \left\{ -\rho(\mathbf{a}) \left( \mathbf{f}_2(\mathbf{a}) + \frac{4}{7} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \right) + \frac{d\rho(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \left( \frac{1}{7} - \mathbf{P}_2(\sin \theta) \right) \right\} \mathbf{P}_2(\sin \theta) \quad (4.139)$$

Para calcular  $V_2 r^{-3}$  aproximaremos  $r^{-3}$  hasta primer orden ya que, en el desarrollo de  $V_2$ , existe un término de primer orden.

$$r^{-3} = a^{-3} (1 - 3f_2(a) P_2(\sin \theta)) \quad (4.140)$$

De (4.3), (4.6), (4.124), (4.138), (4.139), (4.140)

$$\mathbf{U}_2 \mathbf{r}^2 + \mathbf{V}_2 \mathbf{r}^{-3} = \mathbf{K}_2 \mathbf{r}^2 + \mathbf{W}_2 \mathbf{r}^{-3} + \frac{4\pi\mathbf{G}}{5} \mathbf{a}^2 \rho(\mathbf{a}) \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \left( 1 + \frac{5}{7} \mathbf{P}_2(\sin \theta) + \frac{18}{7} \mathbf{P}_4(\sin \theta) \right) \quad (4.141)$$

De (4.123)

$$\mathbf{U}_4 = \mathbf{K}_4 - \frac{4\pi\mathbf{G}}{9} \mathbf{a}^{-2} \left[ \rho(\mathbf{a}) \left( \frac{37}{35} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) - \mathbf{f}_4(\mathbf{a}) \right) + \frac{9}{35} \frac{d\rho(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \right] \mathbf{P}_4(\sin \theta) \quad (4.142)$$

Para calcular  $U_4 r^4$  aproximaremos  $r^4$  hasta orden cero ya que, en el desarrollo de  $U_4$ , todos los términos son de segundo orden.

$$r^4 = a^4 \quad (4.143)$$

De (4.133)

$$\mathbf{V}_4 = \mathbf{W}_4 + \frac{4\pi\mathbf{G}}{9} \mathbf{a}^7 \left[ -\rho(\mathbf{a}) \left( \mathbf{f}_4(\mathbf{a}) + \frac{54}{35} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \right) + \frac{9}{35} \frac{d\rho(\mathbf{a})}{d\mathbf{a}} \mathbf{a} \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \right] \mathbf{P}_4(\sin \theta) \quad (4.144)$$

Para calcular  $V_4 r^{-5}$  aproximaremos  $r^{-5}$  hasta orden cero ya que, en el desarrollo de  $V_4$ , todos los términos son de segundo orden.

De (4.3), (4.6), (4.142), (4.143), (4.144)

$$\mathbf{U}_4 \mathbf{r}^4 + \mathbf{V}_4 \mathbf{r}^{-5} = \mathbf{K}_4 \mathbf{r}^4 + \mathbf{W}_4 \mathbf{r}^{-5} - \frac{36\pi\mathbf{G}}{35} \mathbf{a}^2 \rho(\mathbf{a}) \mathbf{f}_2^2(\mathbf{a}) \mathbf{P}_4(\sin \theta) \quad (4.145)$$

De (4.123)

$$U_n = K_n + \frac{4\pi G}{2n+1} a^{2-n} \rho(a) \sum_{m=3}^{\alpha} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) \delta_{n,2m} \quad \text{para } n > 4 \quad (4.146)$$

Para calcular  $U_n r^n$  aproximaremos  $r^n$  hasta orden cero ya que, en el desarrollo de  $U_n$ , todos los términos son de segundo orden.

$$r^n = a^n \quad (4.147)$$

De (4.133)

$$V_n = W_n - \frac{4\pi G}{2n+1} a^{n+3} \rho(a) \sum_{m=3}^{\alpha} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) \delta_{n,2m} \quad \text{para } n > 4 \quad (4.148)$$

Para calcular  $V_n r^{-1-n}$  aproximaremos  $r^{-1-n}$  hasta orden cero ya que, en el desarrollo de  $V_n$ , todos los términos son de segundo orden.

De (4.3), (4.6), (4.146), (4.147), (4.148)

$$U_n r^n + V_n r^{-1-n} = K_n r^n + W_n r^{-1-n} \quad \text{para } n > 4 \quad (4.149)$$

De (4.3), (4.6), (4.137), (4.141), (4.145), (4.149)

$$\begin{aligned} \Omega = & K_0 + W_0 r^{-1} + K_2 r^2 + W_2 r^{-3} + K_4 r^4 + W_4 r^{-5} + \\ & + \sum_{m=3}^{\infty} (K_{2m} r^{2m} + W_{2m} r^{-(2m+1)}) \end{aligned} \quad (4.150)$$

que es la forma clásica del desarrollo del potencial autogravitatorio hasta segundo orden en las amplitudes.



**Teoría de segundo orden: Desarrollo analítico**

Sea

$$f(r, r') = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \gamma}} \quad (4.151)$$

Se define

$$D(a, a') = \frac{1}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2a a' \cos \gamma}} \quad (4.152)$$

Desarrollando  $f(r, r')$ , hasta segundo orden respecto de  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , alrededor de  $(r_0, r'_0)$ ; donde

$$r_0 = r|_{\Sigma=0} \quad \wedge \quad r'_0 = r'|_{\Sigma'=0} \quad \wedge \quad r - r_0 = a \Sigma \quad \wedge \quad r' - r'_0 = a' \Sigma'$$

y los subíndices indicando las derivadas respecto de ese parámetro, queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = & D(a, a') + D_a(a, a') a \Sigma + D_{a'}(a, a') a' \Sigma' + \frac{1}{2} D_{aa}(a, a') a^2 \Sigma^2 + \\ & + D_{aa'}(a, a') a a' \Sigma \Sigma' + \frac{1}{2} D_{a'a'}(a, a') a'^2 \Sigma'^2 \end{aligned} \quad (4.153)$$

De (4.15)

$$\frac{\partial r'}{\partial a'} = 1 + \Sigma' + a' \Sigma'_{a'} \quad (4.154)$$

De (4.21)

$$r'^2 = a'^2 (1 + 2\Sigma' + \Sigma'^2) \quad (4.155)$$

De (4.154), (4.155) y truncando la serie hasta segundo orden en  $\Sigma'$  queda

$$\frac{\partial r'}{\partial a'} r'^2 = a'^2 (1 + 3\Sigma' + 3\Sigma'^2 + a' \Sigma'_{a'} + 2a' \Sigma' \Sigma'_{a'}) \quad (4.156)$$

De (4.2) y (4.156) el elemento de masa en coordenadas de *Clairaut* viene determinado por

$$dm' = \rho(a') a'^2 (1 + 3\Sigma' + 3\Sigma'^2 + a' \Sigma'_{a'} + 2a' \Sigma' \Sigma'_{a'}) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' \quad (4.157)$$

De (4.153), (4.157) y truncando la serie hasta segundo orden en  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  queda

$$\begin{aligned} \frac{dm'}{\Delta} = & \{D(a, a') + D_a(a, a') a \Sigma + [3D(a, a') + D_{a'}(a, a') a'] \Sigma' + \\ & + \frac{1}{2} D_{aa}(a, a') a^2 \Sigma^2 + [D_{aa'}(a, a') a a' + 3D_a(a, a') a] \Sigma \Sigma' + \\ & + \left[ \frac{1}{2} D_{a',a'}(a, a') a'^2 + 3D_{a'}(a, a') a' + 3D(a, a') \right] \Sigma'^2 + D(a, a') a' \Sigma'_{a'} + \\ & + D_a(a, a') a a' \Sigma \Sigma'_{a'} + [D_{a'}(a, a') a'^2 + 2D(a, a') a'] \Sigma' \Sigma'_{a'} \} \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' \end{aligned} \quad (4.158)$$

Desarrollando hasta segundo orden respecto de las amplitudes queda

$$\begin{aligned} \Sigma &= f_0(a) + f_2(a) P_2(\sin \theta) + f_4(a) P_4(\sin \theta) + \sum_{m=3}^{\infty} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) \\ \Sigma' &= f_0(a') + f_2(a') P_2(\sin \theta') + f_4(a') P_4(\sin \theta') + \sum_{m=3}^{\infty} f_{2m}(a') P_{2m}(\sin \theta') \\ \Sigma'_{a'} &= \frac{df_0(a')}{da'} + \frac{df_2(a')}{da'} P_2(\sin \theta') + \frac{df_4(a')}{da'} P_4(\sin \theta') + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{df_{2m}(a')}{da'} P_{2m}(\sin \theta') \\ \Sigma^2 &= f_2^2(a) \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \right) \\ \Sigma'^2 &= f_2^2(a') \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta') + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta') \right) \\ \Sigma \Sigma' &= f_2(a) f_2(a') P_2(\sin \theta) P_2(\sin \theta') \\ \Sigma \Sigma'_{a'} &= f_2(a) \frac{df_2(a')}{da'} P_2(\sin \theta) P_2(\sin \theta') \\ \Sigma' \Sigma'_{a'} &= f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta') + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta') \right) \end{aligned} \quad (4.159)$$

Por otro lado, para calcular el potencial interior a la superficie equipotencial de  $dm$ ,  $D(a, a')$  se desarrolla de la forma siguiente

$$D(a, a') = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a'}{a}\right)^n P_n(\cos \gamma) \quad (4.160)$$

y en otra superficie,  $D(a, a')$  se desarrolla de la forma siguiente

$$D(a, a') = \frac{1}{a'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a'}\right)^n P_n(\cos \gamma) \quad (4.161)$$

Por lo que en el interior de la superficie equipotencial se tendrá que

$$\begin{aligned} D_a(a, a') &= - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{a'^n}{a^{n+2}} P_n(\cos \gamma) \\ D_{a'}(a, a') &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{a'^{n-1}}{a^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \\ D_{aa}(a, a') &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \frac{a'^n}{a^{n+3}} P_n(\cos \gamma) \\ D_{aa'}(a, a') &= - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \frac{a'^{n-1}}{a^{n+2}} P_n(\cos \gamma) \\ D_{a'a'}(a, a') &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \frac{a'^{n-2}}{a^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \end{aligned} \quad (4.162)$$

y en el exterior de la superficie equipotencial se tendrá que

$$\begin{aligned} D_a(a, a') &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{a^{n-1}}{a'^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \\ D_{a'}(a, a') &= - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{a^n}{a'^{n+2}} P_n(\cos \gamma) \\ D_{aa}(a, a') &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \frac{a^{n-2}}{a'^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \\ D_{aa'}(a, a') &= - \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \frac{a^{n-1}}{a'^{n+2}} P_n(\cos \gamma) \\ D_{a'a'}(a, a') &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) \frac{a^n}{a'^{n+3}} P_n(\cos \gamma) \end{aligned} \quad (4.163)$$

De (4.4), (4.5), (4.20), (4.158), (4.159), (4.162), (4.163)

$D(a, a')$

**Interior**

$$G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(a, a') \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \frac{4\pi G}{a} \delta_{n,0} \int_0^a a'^2 \rho(a') da' \quad (4.164)$$

**Exterior**

$$G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(a, a') \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = 4\pi G \delta_{n,0} \int_a^{a_1} a' \rho(a') da' \quad (4.165)$$

$D_a(a, a') a \Sigma$

**Interior**

$$\begin{aligned} G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D_a(a, a') a \Sigma \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ = -\frac{4\pi G}{a} \left( \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m}(a) P_{2m}(\sin \theta) \right) \delta_{n,0} \int_0^a a'^2 \rho(a') da' \end{aligned} \quad (4.166)$$

**Exterior**

$$G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D_a(a, a') a \Sigma \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = 0 \quad (4.167)$$

$[3D(a, a') + D_{a'}(a, a') a'] \Sigma'$

**Interior**

$$\begin{aligned} G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3D(a, a') \Sigma' \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \frac{12\pi G}{a} \delta_{n,0} \int_0^a a'^2 \rho(a') f_0(a') da' + \\ + \frac{12\pi G}{5a^3} \delta_{n,2} P_2(\sin \theta) \int_0^a a'^4 \rho(a') f_2(a') da' + \frac{12\pi G}{9a^5} \delta_{n,4} P_4(\sin \theta) \int_0^a a'^6 \rho(a') f_4(a') da' + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=3}^{\infty} \frac{12\pi G}{(2n+1)a^{n+1}} \delta_{n,2m} P_{2m}(\sin \theta) \int_0^a a'^{n+2} \rho(a') f_{2m}(a') da' \quad (4.168)$$

$$\begin{aligned} & G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D_{a'}(a, a') a' \Sigma' \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ &= \frac{8\pi G}{5a^3} \delta_{n,2} P_2(\sin \theta) \int_0^a a'^4 \rho(a') f_2(a') da' + \frac{16\pi G}{9a^5} \delta_{n,4} P_4(\sin \theta) \int_0^a a'^6 \rho(a') f_4(a') da' + \\ &+ \sum_{m=3}^{\infty} \frac{4n\pi G}{(2n+1)a^{n+1}} \delta_{n,2m} P_{2m}(\sin \theta) \int_0^a a'^{n+2} \rho(a') f_{2m}(a') da' \quad (4.169) \end{aligned}$$

### Exterior

$$\begin{aligned} & G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3D(a, a') \Sigma' \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = 12\pi G \delta_{n,0} \int_a^{a_1} a' \rho(a') f_0(a') da' + \\ &+ \frac{12\pi G a^2}{5} \delta_{n,2} P_2(\sin \theta) \int_a^{a_1} a'^{-1} \rho(a') f_2(a') da' + \frac{12\pi G a^4}{9} \delta_{n,4} P_4(\sin \theta) \int_a^{a_1} a'^{-3} \rho(a') f_4(a') da' + \\ &+ \sum_{m=3}^{\infty} \frac{12\pi G a^n}{(2n+1)} \delta_{n,2m} P_{2m}(\sin \theta) \int_a^{a_1} a'^{1-n} \rho(a') f_{2m}(a') da' \quad (4.170) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D_{a'}(a, a') a' \Sigma' \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = -4\pi G \delta_{n,0} \int_a^{a_1} a' \rho(a') f_0(a') da' - \\ &- \frac{12\pi G a^2}{5} \delta_{n,2} P_2(\sin \theta) \int_a^{a_1} a'^{-1} \rho(a') f_2(a') da' - \frac{20\pi G a^4}{9} \delta_{n,4} P_4(\sin \theta) \int_a^{a_1} a'^{-3} \rho(a') f_4(a') da' - \\ &- \sum_{m=3}^{\infty} \frac{4(n+1)\pi G a^n}{(2n+1)} \delta_{n,2m} P_{2m}(\sin \theta) \int_a^{a_1} a'^{1-n} \rho(a') f_{2m}(a') da' \quad (4.171) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} D_{aa}(a, a') a^2 \Sigma^2$$

### Interior

$$\begin{aligned} & G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} D_{aa}(a, a') a^2 \Sigma^2 \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ &= \frac{4\pi G}{a} f_2^2(a) \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \right) \delta_{n,0} \int_0^a a'^2 \rho(a') da' \quad (4.172) \end{aligned}$$

**Exterior**

$$G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} D_{aa}(a, a') a^2 \Sigma^2 \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = 0 \quad (4.173)$$

$$\underline{[D_{aa'}(a, a') a a' + 3D_a(a, a') a] \Sigma \Sigma'}$$

**Interior**

$$\begin{aligned} & G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D_{aa'}(a, a') a a' \Sigma \Sigma' \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = -\frac{24\pi G}{5a^3} f_2(a) \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \right) \delta_{n,2} \int_0^a a'^4 \rho(a') f_2(a') da' \end{aligned} \quad (4.174)$$

$$\begin{aligned} & G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3D_a(a, a') a \Sigma \Sigma' \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = -\frac{36\pi G}{5a^3} f_2(a) \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \right) \delta_{n,2} \int_0^a a'^4 \rho(a') f_2(a') da' \end{aligned} \quad (4.175)$$

**Exterior**

$$\begin{aligned} & G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D_{aa'}(a, a') a a' \Sigma \Sigma' \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = -\frac{24\pi G a^2}{5} f_2(a) \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \right) \delta_{n,2} \int_a^{a_1} a'^{-1} \rho(a') f_2(a') da' \end{aligned} \quad (4.176)$$

$$\begin{aligned} & G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3D_a(a, a') a \Sigma \Sigma' \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = \frac{24\pi G a^2}{5} f_2(a) \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \right) \delta_{n,2} \int_a^{a_1} a'^{-1} \rho(a') f_2(a') da' \end{aligned} \quad (4.177)$$

$$\left[ \frac{1}{2} D_{a'a'}(a, a') a'^2 + 3D_{a'}(a, a') a' + 3D(a, a') \right] \Sigma'^2$$

**Interior**

$$\begin{aligned} & G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} D_{a'a'}(a, a') a'^2 \Sigma'^2 \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ &= \frac{4\pi G}{5a^3} \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_0^a a'^4 \rho(a') f_2^2(a') da' + \frac{24\pi G}{9a^5} \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_0^a a'^6 \rho(a') f_2^2(a') da' \end{aligned} \quad (4.178)$$

$$\begin{aligned} & G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3D_{a'}(a, a') a' \Sigma'^2 \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ &= \frac{24\pi G}{5a^3} \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_0^a a'^4 \rho(a') f_2^2(a') da' + \frac{48\pi G}{9a^5} \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_0^a a'^6 \rho(a') f_2^2(a') da' \end{aligned} \quad (4.179)$$

$$\begin{aligned} & G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3D(a, a') \Sigma'^2 \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ &= \frac{12\pi G}{5a} \delta_{n,0} \int_0^a a'^2 \rho(a') f_2^2(a') da' + \frac{12\pi G}{5a^3} \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_0^a a'^4 \rho(a') f_2^2(a') da' + \\ & \quad + \frac{12\pi G}{9a^5} \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_0^a a'^6 \rho(a') f_2^2(a') da' \end{aligned} \quad (4.180)$$

**Exterior**

$$\begin{aligned} & G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} D_{a'a'}(a, a') a'^2 \Sigma'^2 \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ &= \frac{4\pi G}{5} \delta_{n,0} \int_a^{a_1} a' \rho(a') f_2^2(a') da' + \frac{24\pi G a^2}{5} \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_a^{a_1} a'^{-1} \rho(a') f_2^2(a') da' + \\ & \quad + \frac{60\pi G a^4}{9} \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_a^{a_1} a'^{-3} \rho(a') f_2^2(a') da' \end{aligned} \quad (4.181)$$

$$\begin{aligned} & G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3D_{a'}(a, a') a' \Sigma'^2 \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ &= -\frac{12\pi G}{5} \delta_{n,0} \int_a^{a_1} a' \rho(a') f_2^2(a') da' - \frac{36\pi G a^2}{5} \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_a^{a_1} a'^{-1} \rho(a') f_2^2(a') da' - \\ & \quad - \frac{60\pi G a^4}{9} \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_a^{a_1} a'^{-3} \rho(a') f_2^2(a') da' \end{aligned} \quad (4.182)$$

$$\begin{aligned}
& G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3D(a, a') \Sigma'^2 \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\
& = \frac{12\pi G}{5} \delta_{n,0} \int_a^{a_1} a' \rho(a') f_2^2(a') da' + \frac{12\pi G a^2}{5} \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_a^{a_1} a'^{-1} \rho(a') f_2^2(a') da' + \\
& + \frac{12\pi G a^4}{9} \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_a^{a_1} a'^{-3} \rho(a') f_2^2(a') da' \quad (4.183)
\end{aligned}$$

$D(a, a') a' \Sigma'_{a'}$

### Interior

$$\begin{aligned}
& G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(a, a') a' \Sigma'_{a'} \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\
& = \frac{4\pi G}{a} \delta_{n,0} \int_0^a a'^3 \rho(a') \frac{df_0(a')}{da'} da' + \frac{4\pi G}{5a^3} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_0^a a'^5 \rho(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' + \\
& + \frac{4\pi G}{9a^5} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_0^a a'^7 \rho(a') \frac{df_4(a')}{da'} da' + \\
& + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{4\pi G}{(2n+1)a^{n+1}} P_{2m}(\sin \theta) \delta_{n,2m} \int_0^a a'^{m+3} \rho(a') \frac{df_{2m}(a')}{da'} da' \quad (4.184)
\end{aligned}$$

### Exterior

$$\begin{aligned}
& G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D(a, a') a' \Sigma'_{a'} \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\
& = 4\pi G \delta_{n,0} \int_a^{a_1} a'^2 \rho(a') \frac{df_0(a')}{da'} da' + \frac{4\pi G a^2}{5} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' + \\
& + \frac{4\pi G a^4}{9} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_a^{a_1} a'^{-2} \rho(a') \frac{df_4(a')}{da'} da' + \\
& + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{4\pi G a^n}{2n+1} P_{2m}(\sin \theta) \delta_{n,2m} \int_a^{a_1} a'^{2-n} \rho(a') \frac{df_{2m}(a')}{da'} da' \quad (4.185)
\end{aligned}$$



$$\underline{D_a(a, a') a a' \Sigma \Sigma'_{a'}}$$

**Interior**

$$\begin{aligned} & G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D_a(a, a') a a' \Sigma \Sigma'_{a'} \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = -\frac{12\pi G}{5a^3} \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \right) f_2(a) \delta_{n,2} \int_0^a a'^5 \rho(a') \frac{d f_2(a')}{da'} da' \quad (4.186) \end{aligned}$$

**Exterior**

$$\begin{aligned} & G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D_a(a, a') a a' \Sigma \Sigma'_{a'} \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = \frac{8\pi G a^2}{5} \left( \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) + \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \right) f_2(a) \delta_{n,2} \int_a^{a_1} \rho(a') \frac{d f_2(a')}{da'} da' \quad (4.187) \end{aligned}$$

$$\underline{[D_{a'}(a, a') a'^2 + 2a' D(a, a')] \Sigma' \Sigma'_{a'}}$$

**Interior**

$$\begin{aligned} & G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D_{a'}(a, a') a'^2 \Sigma' \Sigma'_{a'} \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = \frac{8\pi G}{5a^3} \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_0^a a'^5 \rho(a') f_2(a') \frac{d f_2(a')}{da'} da' + \\ & + \frac{16\pi G}{9a^5} \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_0^a a'^7 \rho(a') f_2(a') \frac{d f_2(a')}{da'} da' \quad (4.188) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & G \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a' D(a, a') \Sigma' \Sigma'_{a'} \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = \frac{8\pi G}{5a} \delta_{n,0} \int_0^a a'^3 \rho(a') f_2(a') \frac{d f_2(a')}{da'} da' + \\ & + \frac{8\pi G}{5a^3} \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_0^a a'^5 \rho(a') f_2(a') \frac{d f_2(a')}{da'} da' + \\ & + \frac{8\pi G}{9a^5} \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_0^a a'^7 \rho(a') f_2(a') \frac{d f_2(a')}{da'} da' \quad (4.189) \end{aligned}$$

**Exterior**

$$\begin{aligned}
G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} D_{a'}(a, a') a'^2 \Sigma' \Sigma'_{a'} \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' &= \\
&= -\frac{4\pi G}{5} \delta_{n,0} \int_a^{a_1} a'^2 \rho(a') f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' - \\
&\quad - \frac{12\pi G a^2}{5} \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_a^{a_1} \rho(a') f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' - \\
&\quad - \frac{20\pi G a^4}{9} \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_a^{a_1} a'^{-2} \rho(a') f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' \quad (4.190)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G \int_a^{a_1} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a' D(a, a') \Sigma' \Sigma'_{a'} \rho(a') a'^2 \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' &= \\
&= \frac{8\pi G}{5} \delta_{n,0} \int_a^{a_1} a'^2 \rho(a') f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' + \\
&\quad + \frac{8\pi G a^2}{5} \frac{2}{7} P_2(\sin \theta) \delta_{n,2} \int_a^{a_1} \rho(a') f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' + \\
&\quad + \frac{8\pi G a^4}{9} \frac{18}{35} P_4(\sin \theta) \delta_{n,4} \int_a^{a_1} a'^{-2} \rho(a') f_2(a') \frac{df_2(a')}{da'} da' \quad (4.191)
\end{aligned}$$

Sumando los potenciales interiores de factor común  $\delta_{n,j}$ , con  $j = 0, 2, 4$ , se observa que, los resultados, coinciden plenamente con  $W_j$ , con  $j = 0, 2, 4$ , respectivamente y sumando los potenciales exteriores de factor común  $\delta_{n,j}$ , con  $j = 0, 2, 4$ , se observa que, los resultados, coinciden plenamente con  $K_j$ , con  $j = 0, 2, 4$ , respectivamente. Por lo tanto queda probada la teoría clásica, en segundo orden, del potencial autogravitatorio.

# Capítulo 5

## Sistemas binarios próximos

### 5.1. Introducción

Aunque se tenga un conocimiento bastante completo de la manera en que se forman las estrellas individuales, nuestra comprensión de la forma en que lo hacen las estrellas binarias dista mucho de ser completa. Esto, en gran parte, se debe al hecho de que el proceso de formación estelar sucede de forma muy rápida y en regiones de la galaxia donde resulta muy difícil realizar estudios observacionales [2], [88], [96].

En astronomía, el término sistema binario se utiliza para referirse a dos objetos astronómicos que se encuentran tan próximos entre sí que están ligados por su fuerza gravitatoria, orbitando alrededor de un centro de masas común [36].

El término sistema binario (estrella binaria) fue definido en 1802 por el descubridor del planeta *Urano*, *William Herschell*, como *una estrella doble real, unión de dos estrellas, las cuales forman un único sistema por acción de la gravedad*.

Las estrellas binarias se pueden clasificar [25] según:

- Su modo de detección

Las binarias pueden estar muy separadas entre sí o muy cerca. A veces tanto, que llegan a intercambiar material. Por otra parte, su posición con respecto a nosotros, distancia y orientación relativa de sus órbitas con la nuestra producen un amplio abanico de tipos de binarias, algunas de las cuales pueden pertenecer a dos o más de esas clases. Las binarias, además, son una estupenda oportunidad para obtener mediciones

directas de masas y radios estelares. Ello las convierte en excelentes patrones de calibración para los modelos de clasificación estelar que se sirven de las luminosidades aparentes y espectros de emisión para deducir masas, radios y temperaturas.

- Binarias visuales

Aquellas que se pueden encontrar con los telescopios ordinarios. En este tipo de binarias ambos componentes son visibles en la imagen. Este tipo de binarias suelen estar no muy lejos de nosotros y bastante alejadas entre sí. Estas binarias, a pesar de su fácil observación, no suelen ser tan fáciles de detectar ya que sus períodos orbitales suelen ser del orden de cientos de años. Ni siquiera dos estrellas cercanas tendrían por qué ser binarias. Podrían ser dos estrellas que cruzaran sus trayectorias para no volverse a encontrar jamás. La prueba clave la dan siempre sus trayectorias respectivas. Para poder apreciar el movimiento mutuo de las binarias visuales hay que comparar las imágenes del cielo en años distintos. A veces su movimiento es tan imperceptible que se requieren placas fotográficas de décadas de diferencia. Este elevado tiempo de análisis hace, aun hoy, que este tipo de binarias sea el más complicado de detectar.

- Binarias eclipsantes

Sólo se observan cuando sus órbitas están alineadas con la nuestra de tal manera que, periódicamente, una estrella pasa por delante de la otra. Ello hace que se observen disminuciones regulares en la luminosidad, la llamada por los astrónomos curva de luz. Dado que su luminosidad va cambiando en el tiempo a veces pasan desapercibidas como estrellas variables. Usualmente estas estrellas tienen un período corto ya que la única manera de detectarlas es observar la regularidad en sus variaciones de luminosidad.

La órbita de la estrella binaria eclipsante puede ser determinada gracias al estudio de la curva de luz. A su vez, el tamaño relativo de las estrellas individuales puede ser determinado en términos del radio de la órbita al observar qué tan rápido varía el brillo de las estrellas en el tiempo.

En las últimas décadas se ha logrado la recolección de varios cálculos acerca de estas estrellas gracias a los avances en los telescopios.

- Binarias espectroscópicas

Al igual que las astrométricas, las espectroscópicas también poseen una estrella invisible. La diferencia radica en el modo en que este tipo se logra detectar mediante el desplazamiento Doppler en el

espectro del astro visible. Después de observar la estrella durante el tiempo se nota un cambio periódico en las longitudes de ondas. La explicación de este cambio de frecuencia es resultado de la órbita, las estrellas algunas veces se mueven hacia la Tierra y luego se alejan de ella. Cuando la estrella se mueve hacia la Tierra se genera un movimiento azul en el espectro. Y cuando se aleja de nosotros el espectro cambia hacia el rojo. Esta técnica de mayor precisión que la del paralaje permite la detección de las estrellas binarias de forma más rápida. A pesar de todo algunas binarias no presentan casi ningún desplazamiento radial debido a la orientación de su órbita por lo que este método resulta inútil para éstas.

La órbita de la binaria espectroscópica se determina haciendo una larga serie de observaciones, de la velocidad radial de uno o los dos componentes del sistema. Las observaciones se grafican en relación con el tiempo y de la curva resultante se determina el periodo del sistema. Si la órbita es circular entonces el resultado será una curva de seno. Si la órbita es elíptica, la forma de la curva dependerá de la excentricidad del elipse y de la orientación de los ejes con referencia a la línea visual.

- Binarias ópticas (falsas binarias)  
Gracias a que las dos estrellas aparecen en el cielo muy cerca una de otra porque se encuentran en la misma visual. Sucede que en realidad están a distancias muy diferentes de nosotros.  
Se puede distinguir una binaria óptica de una verdadera luego de observarlas por largos períodos, usualmente años. Si el movimiento de la estrella es lineal se puede asumir que las estrellas no son binarias, sino falsas binarias.  
Aunque parezca mentira, ha habido errores astronómicos bastante graves por esta simple confusión.
  
- La configuración del sistema  
Otra forma de clasificar las estrellas binarias es mediante las distancias entre las estrellas en comparación al tamaño de cada una de éstas.
  
- Binarias separadas  
Son un tipo de estrellas binarias donde sus componentes se encuentran en el lóbulo de *Roche*, el área donde la fuerza gravitacional de la estrella es mayor que la del otro componente. La estrellas no tienen efecto entre ellas, lo que hace que estas evolucionen separadamente. La mayor parte de las binarias pertenece a esta clase.

- Binarias semiseparadas  
Son estrellas donde uno de los componentes está en el lóbulo de *Roche* mientras que la otra no. El gas de la superficie del componente que llena el lóbulo de *Roche* (donador) es transferido a la otra estrella creciente. La transferencia de masa domina la evolución del sistema. En ambos casos se forma un disco de acrecimiento que envuelve a la estrella receptora.
- Binarias en contacto  
Son una estrella binaria donde los dos componentes llenan su lóbulo de *Roche*. La parte más alta de la atmósfera estelar forma una cobertura común que rodea a las dos estrellas. Mientras la fricción de la cobertura rompe el movimiento orbital, las estrellas pueden llegar a fusionarse.

Los sistemas binarios espectroscópicos y eclipsantes, que no se pueden separar ópticamente, se conocen con el nombre de sistemas binarios próximos.

La estructura y evolución de los sistemas binarios próximos difiere de la que tendrían sus componentes si estuvieran aisladas. Esto es debido a efectos de atracción mútua, transferencia de masa, transferencia de momento angular, efecto de reflexión, ...

Estos sistemas tienen unos elementos orbitales que pueden variar con el tiempo, al no poderse considerar ambas componentes como esféricas, dando lugar a una progresiva circularización de sus órbitas por una parte, y por otra a una tendencia a la sincronización de los espines de las componentes con el periodo de revolución del sistema, tendiéndose de este modo al mínimo de energía hasta alcanzar una situación dinámicamente estable (*López* [60]; *Karetnikov y Sirotkin* [44]; *Iorio* [39], *Faccioli, Alcock y Cook* [28]; *Mazeh* [68]; *Zahn* [101]).

Resulta conveniente realizar un somero estudio del modelo de *Roche* debido a la importancia de éste en los intercambios materiales entre las componentes del sistema y que el modelo de *Roche* es una buena aproximación en muchos casos a la estructura de los sistemas binarios próximos.

Dicho modelo consiste en aplicar la teoría del problema restringido de tres cuerpos al estudio de los sistemas binarios. Para que esto sea posible se requiere que las componentes del sistema binario satisfagan las siguientes condiciones:

1. Las componentes del sistema se encuentran en equilibrio radiativo.
2. Las distribuciones de materia de las componentes presentan una gran condensación central.
3. La órbita relativa al secundario respecto al primario es circular.
4. La rotación de las componentes del sistema es sincrónica con su periodo de revolución.
5. Los ejes de rotación de ambas componentes son perpendiculares al plano orbital.

En este trabajo se aborda el estudio de las configuraciones de sistemas binarios próximos con componentes separados para los cuales la razón tamaño-distancia es muy pequeña y la forma de las componentes puede, por lo tanto, asemejarse a una esfera. Los sistemas estudiados están considerados en equilibrio hidrostático, que es una configuración estable de equilibrio. El equilibrio hidrostático implica la rotación rígida del sistema y, de acuerdo con *Kopal* [50] [51] y *Falkner* [29], este estado implica la identificación de las superficies equipotenciales, isobáricas, isotérmicas e isopícnicas.

El sistema puede ser modelado por las ecuaciones

$$\nabla P = \rho \nabla \Psi$$

$$\Delta \Psi = -4\pi G\rho + 2\omega^2$$

donde  $P$  es la presión,  $\rho$  es la densidad,  $\Psi$  es el potencial total,  $G$  es la constante de gravitación universal,  $\vec{\omega}$  es el vector velocidad angular del sistema y  $\Delta$  es el operador de *Laplace*.

El potencial total,  $\Psi$ , en un punto de una componente del sistema está formado por la suma del:

1. Potencial autogravitatorio,  $\Omega$ , debido a la masa de la propia componente.
2. Potencial centrífugo,  $V_c$ , debido al movimiento de rotación del sistema respecto a un sistema inercial.
3. Potencial de marea,  $V_t$ , debido a la otra componente del sistema binario.

Sea  $O_0XYZ$  el sistema de coordenadas definido por:

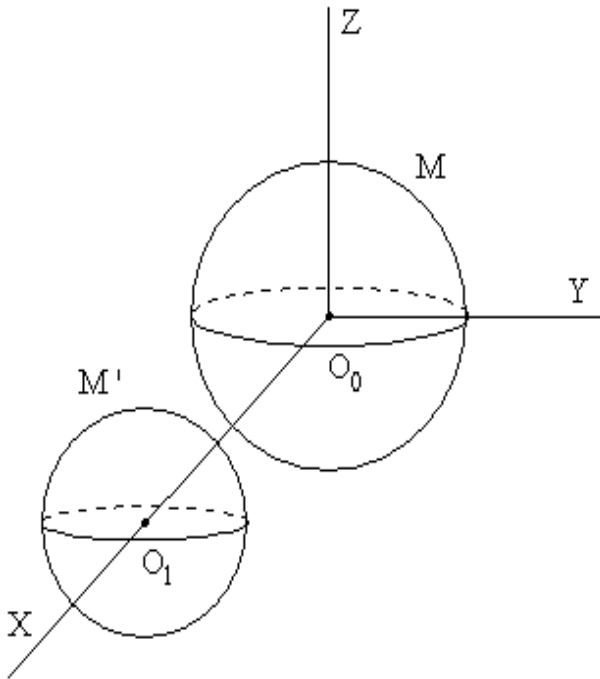
$O_0$  = Centro de masas de la componente primaria del sistema

$O_1$  = Centro de masas de la componente secundaria del sistema

$O_0X$  = Eje en la dirección  $O_0O_1$

$O_0Z$  = Eje que pasa por  $O_0$  paralelo al vector velocidad angular del sistema

$O_0Y$  = Eje formando triedro directo con  $O_0X$  y con  $O_0Z$



Un modelo simple del potencial total es el representado por el modelo de *Roche*:

$$\Psi = G \frac{M_1}{r_1} + \frac{\omega^2}{2} \left[ \left( x - \frac{M_2 R}{M_1 + M_2} \right)^2 + y^2 \right] + G \frac{M_2}{r_2}$$

donde  $M_1$  y  $M_2$  son las masas de las componentes,  $R$  es la distancia entre los centros de masas de las componentes,  $r_1$  es la distancia entre el punto y el centro de masas de la componente primaria y  $r_2$  es la distancia entre el punto y el centro de masas de la componente secundaria. En el modelo de *Roche*, las



masas de las componentes están muy concentradas alrededor de su centro de masas; en este caso, el primer término del segundo miembro de la ecuación se puede identificar por el potencial autogravitatorio, el segundo por el potencial centrífugo y el tercero por el potencial de marea. Además la velocidad angular del sistema,  $\vec{\omega}$ , satisface la tercera ley de *Kepler*  $\omega^2 = G \frac{M_1 + M_2}{R^3}$ .

Para integrar este problema en un caso general de distribución de masas es necesaria una ecuación de estado que relacione la presión con la densidad.

## 5.2. Desarrollo del potencial en coordenadas de *Clairaut*

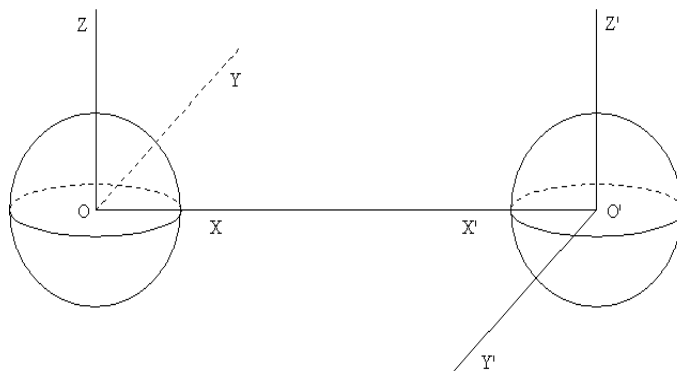
Sean  $(x, y, z)$  las coordenadas cartesianas respecto del sistema definido en la introducción y sean  $(x', y', z')$  las coordenadas cartesianas definidas en el sistema  $O'X'Y'Z'$  donde

$O'$  = Centro de masas de la componente secundaria del sistema

$O'X'$  = Eje en la dirección del centro de masas de la componente primaria

$O'Z'$  = Eje que pasa por  $O'$  paralelo al vector velocidad angular del sistema

$O'Y'$  = Eje formando triedro directo con  $O'X'$  y con  $O'Z'$



Sean  $(r, \theta, \lambda)$  y  $(r', \theta', \lambda')$  las coordenadas esféricas asociadas a estos sistemas, las cuales satisfacen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} x &= R - x' \quad , \quad x = r \cos \theta \cos \lambda \quad , \quad x' = r_2 \cos \theta' \cos \lambda' \\ y &= -y' \quad , \quad y = r \cos \theta \sin \lambda \quad , \quad y' = r_2 \cos \theta' \sin \lambda' \\ z &= z' \quad , \quad z = r \sin \theta \quad , \quad z' = r_2 \sin \theta' \end{aligned} \quad (5.1)$$

Para el estudio del potencial en un punto de la componente primaria es interesante el utilizar el sistema de coordenadas de *Clairaut*  $(a, \theta, \lambda)$ , donde  $a$  es un parámetro constante en cada superficie equipotencial. En este trabajo el parámetro  $a$  se ha escogido de manera que es el radio de la esfera con la misma masa que la superficie equipotencial. Este sistema de coordenadas está relacionado con el sistema de coordenadas esféricas mediante la relación  $r = r(a, \theta, \lambda)$ . Así mismo, para la componente secundaria se tienen las coordenadas  $(a', \theta', \lambda')$  relacionadas con las coordenadas esféricas por la relación  $r' = r'(a', \theta', \lambda')$ .

Es aconsejable desarrollar, mediante las series de *Neumann*, las superficies equipotenciales en series cuyos términos sean armónicos esféricos :

$$\begin{aligned} r &= a \left\{ 1 + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \right\} \\ r' &= a' \left\{ 1 + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right\} \end{aligned}$$

donde  $Y_{p,q}(\theta, \lambda)$  son los armónicos esféricos en forma real.

## 5.3. Desarrollo del potencial autogravitatorio

### 5.3.1. Introducción

El desarrollo del potencial autogravitatorio ha sido estudiado por diversos autores (*Finlay* [30], *Kopal* [50] [51], *López* [60]). Las superficies equipotenciales se desarrollan utilizando las series de *Neumann* respecto de las coordenadas de *Clairaut* y, de estos desarrollos, se pueden obtener las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de frontera. Los métodos clásicos asumen la convergencia de estas series en capas donde resulta cuestionable dicha convergencia. Para resolver este problema, en este trabajo se desarrolla un método analítico en primer orden respecto de las amplitudes.

### 5.3.2. Método clásico

Sea  $P$  un punto de la componente primaria de coordenadas  $(r, \theta, \lambda)$ . El potencial autogravitatorio,  $\Omega$ , creado por la componente primaria en  $P$  viene dado por la suma de los potenciales  $U$  y  $V$ . Siendo  $V$  el potencial creado por la masa de la componente primaria contenida en la esfera de centro  $O$  y radio  $r$ , y  $U$  la región esférica comprendida entre los radios  $r$  y  $r_1$ , donde  $r_1$  es el radio de la menor esfera centrada en  $O$  que contiene a la componente primaria.

$$\Omega = U + V \quad (5.2)$$

$$U = G \int_r^{r_1} \frac{dm'}{\Delta} \quad (5.3)$$

$$V = G \int_0^r \frac{dm'}{\Delta} \quad (5.4)$$

donde  $dm'$  es el elemento de masa, que en coordenadas esféricas se expresa como:

$$dm' = \rho(r', \theta', \lambda') r'^2 \cos \theta' dr' d\theta' d\lambda'$$

y  $\Delta$  es la distancia de  $M$  a  $dm'$ , que aplicando el *teorema del coseno* al triángulo  $\widehat{OMM'}$ , se expresa como:

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \gamma$$

de donde:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \gamma}}$$

Por otra parte

$$(1 + x^2 - 2x \cos \alpha)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n(\cos \alpha)$$

donde  $P_n$  son los polinomios de *Legendre*.

$$\frac{1}{\Delta} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma) & \text{si } r' < r \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos \gamma) & \text{si } r' > r \end{cases} \quad (5.5)$$

siendo  $\gamma$  el ángulo entre los radiovectores  $\vec{r} = (r \cos \theta \cos \lambda, r \cos \theta \sin \lambda, r \sin \theta)$  y  $\vec{r}' = (r' \cos \theta' \cos \lambda', r' \cos \theta' \sin \lambda', r' \sin \theta')$

Del teorema de adición de los armónicos esféricos en forma real

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{n,m}(\theta', \lambda') \quad (5.6)$$

y de la ortonormalidad de los armónicos esféricos en forma real

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) \cos \theta \, d\theta \, d\lambda = \delta_{n,r} \delta_{m,s} \quad (5.7)$$

(donde  $\delta_{i,j}$  es la delta de *Kronecker*)

se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) Y_{r,m}(\theta', \lambda') \cos \theta' \, d\theta' \, d\lambda' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_{n,m}(\theta, \lambda) \delta_{n,r} \quad (5.8)$$

De (5.3), (5.4), (5.5)

$$U = G \int_r^{r_1} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right) dm' \quad (5.9)$$

$$V = G \int_0^r \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \right) dm' \quad (5.10)$$

Por otra parte, la superficie equipotencial de parámetro  $a'$  puede expresarse mediante el desarrollo en serie:

$$r' = a' \left\{ 1 + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right\}$$

donde  $Y_{p,q}(\theta', \lambda')$  son los armónicos esféricos en forma real y, por razones de simetría, sólo se van a considerar las funciones de deformación con  $q \geq 0$  y  $f_{p,q}(a') = 0$  si  $p+q$  es impar. Además, en este apartado, sólo se trabajarán los desarrollos para  $p = 2$ .

Sustituyendo (4.2) en (4.7) y (4.8) se obtiene

$$U_n = \frac{G}{2-n} \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r'^{2-n} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' \, d\theta' \, d\lambda' \, da' \quad \text{si } n \neq 2 \quad (5.11)$$

$$U_2 = G \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln r' P_2(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' \quad (5.12)$$

$$V_n = \frac{G}{n+3} \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r'^{n+3} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' \quad (5.13)$$

Por otra parte,  $r^k$  y  $\ln r$  se desarrollan hasta primer orden en las amplitudes como sigue

$$r^k = a^k \left\{ 1 + k \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \right\} \quad (5.14)$$

$$\ln r = \ln a + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \quad (5.15)$$

Sustituyendo  $r^k$  y  $\ln r'$  en (5.11), (5.12) y (5.13) queda

$$\Omega = 4\pi G \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2n+1} [E_{n,m}(a) r^n + F_{n,m}(a) r^{-n-1}] Y_{n,m}(\theta, \lambda) \quad (5.16)$$

donde, para  $n \neq 0$ ,

$$E_{n,m}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a} \{a^{2-n} f_{n,m}(a)\} da \quad , \quad F_{n,m}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a} \{a^{n+3} f_{n,m}(a)\} da \quad (5.17)$$

y

$$E_{0,0}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a} \{a^2 [\sqrt{\pi} + f_{0,0}(a)]\} da \quad (5.18)$$

$$F_{0,0}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a} \left\{ a^3 \left[ \frac{2\sqrt{\pi}}{3} + f_{0,0}(a) \right] \right\} da \quad (5.19)$$

Por otro lado, la función  $\frac{V_0}{G}$  es la masa  $M(a)$  contenida en la esfera de radio  $a$  que es la misma que la contenida en la superficie equipotencial  $r(a, \theta, \lambda)$ . En consecuencia

$$\int_0^a \frac{\partial}{\partial a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} \rho r^3 \cos \theta d\lambda d\theta da = M(a) \quad (5.20)$$

Desarrollando ahora  $r^3$  hasta segundo orden en las amplitudes y sustituyendo los productos de armónicos esféricos por sus desarrollos se obtiene

$$f_{0,0}(a)[1 + f_{0,0}(a)] + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} f_{1,1}^2(a) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} f_{2,0}^2(a) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} f_{2,2}^2(a) = 0 \quad (5.21)$$

De aquí se deduce que la amplitud  $f_{0,0}(a)$  es de segundo orden respecto de las amplitudes.

Sustituyendo las ecuaciones (5.14) y (5.15) en (5.16), y operando con los armónicos esféricos se obtiene

$$\Omega = \Omega_{0,0} Y_{0,0}(\theta, \lambda) + \Omega_{1,1} Y_{1,1}(\theta, \lambda) + \Omega_{2,0} Y_{2,0}(\theta, \lambda) + \Omega_{2,2} Y_{2,2}(\theta, \lambda) \quad (5.22)$$

### 5.3.3. Método analítico en primer orden

Desafortunadamente, las series definidas por (5.9) y (5.10) no convergen en la capa definida por  $r \in [r_{min}(a), r_{max}(a)]$  con

$$r_{min}(a) = \min \left\{ r(a, \theta, \lambda) : \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \wedge \lambda \in [0, \pi] \right\}$$

$$r_{max}(a) = \max \left\{ r(a, \theta, \lambda) : \theta \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \wedge \lambda \in [0, \pi] \right\}$$

Para resolver este problema se desarrolla el método siguiente [62] [64]:

Sea

$$r(a, \theta, \lambda) = a[1 + D] \quad \text{con} \quad D = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \quad (5.23)$$

$$r'(a', \theta', \lambda') = a'[1 + D'] \quad \text{con} \quad D' = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \quad (5.24)$$

Cuando  $r$  varía de 0 a  $r_0$ ,  $r$  y  $r'$  coinciden. Es decir,  $r = r'$ .

$$r = a[1 + D] = a'[1 + D'] = r'$$

$$a' = a \frac{1 + D}{1 + D'} \quad (5.25)$$

Desarrollando  $\frac{1}{1+D'}$  en serie de potencias de  $D'$

$$\frac{1}{1+D'} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D'^n \quad \text{si } |D'| < 1 \quad (5.26)$$

De (5.23), (5.24)

$$a' = a(1+D) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n D'^n \quad (5.27)$$

Desarrollando (5.27) hasta primer orden en potencias de  $D$  y  $D'$

$$a' = a[1+D-D'] \quad (5.28)$$

De (4.8), (5.28)

$$\begin{aligned} V_n &= G \int_0^{a+aD-aD'} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho r'^{2+n} \frac{\partial r'}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ &= \frac{G}{3+n} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' \left( \int_0^{a+aD-aD'} \rho \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' \right) d\theta' d\lambda' = \\ &= \frac{G}{3+n} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' \left( \int_0^a \rho \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' \right) d\theta' d\lambda' + \\ &+ \frac{G}{3+n} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' \left( \int_a^{a+aD-aD'} \rho \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' \right) d\theta' d\lambda' \end{aligned}$$

Con lo que

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{G}{3+n} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' \left( \int_0^a \rho \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' \right) d\theta' d\lambda' + \\ &+ \frac{G}{3+n} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' \left( \int_a^{a+aD-aD'} \rho \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' \right) d\theta' d\lambda' \quad (5.29) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
& \int_a^{a+aD-aD'} \rho \frac{\partial}{\partial a'} [r'^{n+3}] da' \approx \rho(a) \frac{\partial}{\partial a'} [r'^{n+3}]_{a'=a} (aD - aD') = \\
& = \rho(a) \frac{\partial}{\partial a'} \left[ a'^{n+3} \left( 1 + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right)^{n+3} \right]_{a'=a} \cdot \\
& \cdot a \left[ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) - \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right] \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Desarrollando (5.30) hasta primer orden en  $f_{p,q}(a)$  y  $f_{p,q}(a')$

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+aD-aD'} \rho \frac{\partial}{\partial a'} [r'^{n+3}] da' = & (n+3) \rho(a) a^{n+3} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p (f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) - \\
& - f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda')) \quad (5.31)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$f_{p,q}(a') = f_{p,q}(a) + \left. \frac{\partial f_{p,q}(a')}{\partial a'} \right|_a (a' - a) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f_{p,q}(a')}{\partial a'^2} \right|_a (a' - a)^2 + \dots \quad (5.32)$$

Aproximando (5.32) hasta primer orden en  $f_{p,q}(a)$ , queda

$$f_{p,q}(a') = f_{p,q}(a) \quad (5.33)$$

De (5.31), (5.33)

$$\int_a^{a+aD-aD'} \rho \frac{\partial}{\partial a'} [r'^{n+3}] da' = (n+3) \rho(a) a^{n+3} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) (Y_{p,q}(\theta, \lambda) - Y_{p,q}(\theta', \lambda')) \quad (5.34)$$

Por un lado, según el teorema de adición de los armónicos esféricos en forma real,

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{n,m}(\theta', \lambda')$$



y por el otro, según la ortonormalidad de los armónicos esféricos,

$$\int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y_{n,m}(\theta, \lambda) Y_{r,s}(\theta, \lambda) \cos \theta d\theta d\lambda = \delta_{n,r} \delta_{m,s}$$

se obtiene

$$\int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) Y_{r,m}(\theta', \lambda') \cos \theta' d\theta' d\lambda' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_{n,m}(\theta, \lambda) \delta_{n,r} \quad (5.35)$$

Del segundo término de (5.29), tomando en el desarrollo  $p$  hasta un número dado  $N$ , de (5.34) y de (5.35) se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{G}{n+3} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (n+3) \rho(a) a^{n+3} \left[ \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) (Y_{p,q}(\theta, \lambda) - Y_{p,q}(\theta', \lambda')) \right] P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' = \\ & = 4\pi G \rho(a) a^3 \delta_{n,0} \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) - \frac{4\pi G}{2n+1} \rho(a) a^{n+3} \sum_{q=-n}^n f_{n,q}(a) Y_{n,q}(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.36)$$

con  $n \leq N$

Por otra parte, del primer término del segundo miembro de (5.29), aproximando hasta primer orden en  $f_{p,q}(a')$  y tomando en el desarrollo  $p$  hasta un número dado  $N$ , queda

$$\begin{aligned} & \frac{G}{3+n} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' \left[ \int_0^a \rho \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' \right] d\theta' d\lambda' = \\ & = \frac{G}{3+n} \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ a' \left( 1 + \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right) \right]^{n+3} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right\} da' = \\ & = G \int_0^a \rho a'^{n+2} \left( \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right) da' + \\ & + G \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{n+3} \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') \left( \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) Y_{p,q}(\theta', \lambda') \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right) \right\} da' \end{aligned} \quad (5.37)$$

De (5.35), (5.37)

$$\begin{aligned} & \frac{G}{3+n} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' \left[ \int_0^a \rho \frac{\partial r'^{n+3}}{\partial a'} da' \right] d\theta' d\lambda' = \\ & = 4\pi G \delta_{n,0} \int_0^a \rho a'^2 da' + \frac{4\pi G}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \left[ \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} (a'^{m+3} f_{n,m}(a')) da' \right] Y_{n,m}(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.38)$$

con  $n \leq N$

Considerando, en este trabajo,  $q \geq 0$ ,  $m \geq 0$  y de (5.29), (5.36), (5.38)

$$\begin{aligned} V_n(a, \theta, \lambda) &= 4\pi G \delta_{n,0} \left[ \int_0^a \rho a'^2 da' + \rho(a) a^3 \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \right] + \\ &+ \frac{4\pi G}{2n+1} \sum_{m=0}^n \left[ \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \{a'^{m+3} f_{n,m}(a')\} da' - \rho(a) a^{n+3} f_{n,m}(a) \right] Y_{n,m}(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.39)$$

De (4.7), (5.28)

$$\begin{aligned} U_n &= G \int_{a+aD-aD'}^{a_1} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho r'^{1-n} \frac{\partial r'}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ &= \frac{G}{2-n} \int_a^{a_1} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' + \\ &+ \frac{G}{2-n} \int_{a+aD-aD'}^a \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' \end{aligned} \quad (5.40)$$

para  $n \neq 2$

$$\begin{aligned} U_2 &= G \int_a^{a_1} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\partial}{\partial a'} [\ln r'] P_2(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' + \\ &+ G \int_{a+aD-aD'}^a \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\partial}{\partial a'} [\ln r'] P_2(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' \end{aligned} \quad (5.41)$$

Del segundo término del segundo miembro de (5.40)

$$\begin{aligned} & \frac{G}{2-n} \int_{a+aD-aD'}^a \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = \frac{G}{2-n} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' \left[ \int_{a+aD-aD'}^a \rho \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da' \right] d\theta' d\lambda' \end{aligned} \quad (5.42)$$

Por otra parte, de (5.34)

$$\int_{a+aD-aD'}^a \rho \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} da' = (2-n) \rho(a) a^{2-n} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) (Y_{p,q}(\theta, \lambda) - Y_{p,q}(\theta', \lambda')) \quad (5.43)$$

De (5.36), (5.42), (5.43)

$$\begin{aligned} & \frac{G}{2-n} \int_{a+aD-aD'}^a \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = 4\pi G \rho(a) a^2 \delta_{n,0} \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) + \frac{4\pi G}{2n+1} \rho(a) a^{2-n} \sum_{q=-n}^n f_{n,q}(a) Y_{n,q}(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.44)$$

con  $n \leq N$

Del segundo término del segundo miembro de (5.41)

$$\begin{aligned} & G \int_{a+aD-aD'}^a \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\partial}{\partial a'} [\ln r'] P_2(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = G \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_2(\cos \gamma) \cos \theta' \left\{ \int_{a+aD-aD'}^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} [\ln r'] da' \right\} d\theta' d\lambda' \end{aligned} \quad (5.45)$$

Por otro lado

$$\int_{a+aD-aD'}^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} [\ln r'] da' \approx -\rho(a) \frac{\partial}{\partial a'} [\ln r']_{a'=a} (aD - aD') \quad (5.46)$$

Desarrollando  $\ln r'$  hasta primer orden

$$\ln r' = \ln a' + \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \quad (5.47)$$

De (5.46), (5.47)

$$\begin{aligned} \int_{a+aD-aD'}^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} [\ln r'] da' &\approx -\rho(a) \frac{\partial}{\partial a'} \left[ \ln a' + \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right]_{a'=a} \\ &\cdot a \left[ \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) - \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right] \end{aligned} \quad (5.48)$$

De (5.33) y desarrollando (5.48) hasta primer orden en  $f_{p,q}(a)$  y  $f_{p,q}(a')$ , queda

$$\int_{a+aD-aD'}^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} [\ln r'] da' = -\rho(a) \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) [Y_{p,q}(\theta, \lambda) - Y_{p,q}(\theta', \lambda')] \quad (5.49)$$

Con lo que, de (5.35), (5.45), (5.49)

$$\int_{a+aD-aD'}^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} [\ln r'] da' = \frac{4\pi G}{5} \rho(a) \sum_{q=-2}^2 f_{2,q}(a) Y_{2,q}(\theta, \lambda) \quad (5.50)$$

Del primer término del segundo miembro de (5.40)

$$\begin{aligned} &\frac{G}{2-n} \int_a^{a_1} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ &= \frac{G}{2-n} \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( a' \left[ 1 + \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right] \right)^{2-n} \right. \\ &\quad \left. \cdot P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right\} da' \end{aligned} \quad (5.51)$$

De (5.35) y desarrollando (5.51) hasta primer orden en  $f_{p,q}(a)$  y  $f_{p,q}(a')$ , se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{G}{2-n} \int_a^{a_1} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\partial r'^{2-n}}{\partial a'} P_n(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = 4\pi G \delta_{n,0} \int_a^{a_1} \rho a' da' + \frac{4\pi G}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \left[ \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \{a'^{2-n} f_{n,m}(a')\} da' \right] Y_{n,m}(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Considerando, en este trabajo,  $q \geq 0$ ,  $m \geq 0$  y de (5.40), (5.44), (5.52)

$$\begin{aligned} U_n(a, \theta, \lambda) &= 4\pi G \delta_{n,0} \left[ \int_a^{a_1} \rho a' da' - \rho(a) a^2 \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \right] + \\ &+ \frac{4\pi G}{2n+1} \sum_{m=0}^n \left[ \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \{a'^{2-n} f_{n,m}(a')\} da' + \rho(a) a^{2-n} f_{n,m}(a) \right] Y_{n,m}(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.53)$$

para  $n \leq N$  y  $n \neq 2$

Del primer término de (5.41), de (5.35) y de (5.47)

$$\begin{aligned} & G \int_a^{a_1} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\partial}{\partial a'} [\ln r'] P_2(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = G \int_a^{a_1} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left[ \ln a' + \sum_{p=0}^N \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right] P_2(\cos \gamma) \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\ & = \frac{4\pi G}{5} \int_a^{a_1} \rho \left( \sum_{q=-2}^2 \frac{\partial}{\partial a'} \{f_{2,q}(a')\} \right) da' \end{aligned} \quad (5.54)$$

Considerando, en este trabajo,  $q \geq 0$ ,  $m \geq 0$  y de (5.41), (5.50), (5.54)

$$U_2(a, \theta, \lambda) = \frac{4\pi G}{5} \sum_{m=0}^2 \left( \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \{f_{2,m}(a')\} da' - \rho(a) f_{2,m}(a) \right) Y_{2,m}(\theta, \lambda) \quad (5.55)$$

Consecuentemente, de (5.39), de (5.53) y de (5.55)

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 = & 4\pi G \left[ \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^2 \left( \frac{1}{2} + f_{0,0}(a') Y_{0,0}(\theta, \lambda) \right) \right\} da' - \right. \\ & \left. - \rho(a) a^2 \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \right] \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n = & \frac{4\pi G}{2n+1} \sum_{m=0}^n \left[ \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \{ a'^{2-n} f_{n,m}(a') \} da' + \right. \\ & \left. + \rho(a) a^{2-n} f_{n,m}(a) \right] Y_{n,m}(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.57)$$

para  $n \neq 0$  y  $n \leq N$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 = & 4\pi G \left[ \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^3 \left( \frac{1}{3} + f_{0,0}(a') Y_{0,0}(\theta, \lambda) \right) \right\} da' + \right. \\ & \left. + \rho(a) a^3 \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \right] \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n = & \frac{4\pi G}{2n+1} \sum_{m=0}^n \left[ \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \{ a'^{n+3} f_{n,m}(a') \} da' - \right. \\ & \left. - \rho(a) a^{n+3} f_{n,m}(a) \right] Y_{n,m}(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.59)$$

para  $n \neq 0$  y  $n \leq N$

Asignando

$$U_0^c = 4\pi G \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^2 \left( \frac{1}{2} + f_{0,0}(a') Y_{0,0}(\theta, \lambda) \right) \right\} da' \quad (5.60)$$

$$V_0^c = 4\pi G \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^3 \left( \frac{1}{3} + f_{0,0}(a') Y_{0,0}(\theta, \lambda) \right) \right\} da' \quad (5.61)$$

$$U_n^c = \frac{4\pi G}{2n+1} \sum_{m=0}^n \left[ \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \{ a'^{2-n} f_{n,m}(a') \} da' \right] Y_{n,m}(\theta, \lambda) \quad (5.62)$$

$$V_n^c = \frac{4\pi G}{2n+1} \sum_{m=0}^n \left[ \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \{ a'^{n+3} f_{n,m}(a') \} da' \right] Y_{n,m}(\theta, \lambda) \quad (5.63)$$

para  $n \neq 0$  y  $n \leq N$

De (5.2), (4.6), (5.56), (5.57), (5.58), (5.59), (5.60), (5.61), (5.62), (5.63)

$$\begin{aligned} \Omega(a, \theta, \lambda) = & U_0^c + r^{-1} V_0^c + \sum_{n=1}^{\infty} (U_n^c r^n + V_n^c r^{-n-1}) + \\ & + 4\pi G (a^3 r^{-1} - a^2) \rho(a) \sum_{p=1}^N \sum_{q=0}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) + \\ & + 4\pi G \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2n+1} \left( \sum_{m=0}^n (a^{2-n} r^n - a^{n+3} r^{-n-1}) \rho(a) f_{n,m}(a) Y_{n,m}(\theta, \lambda) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.64)$$

Por otra parte,

$$a^3 r^{-1} - a^2 = -a^2 \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \quad (5.65)$$

$$a^{2-n} r^n - a^{n+3} r^{-n-1} = (2n+1) a^2 \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \quad (5.66)$$

De (5.64), (5.65), (5.66) y aproximando hasta primer orden, respecto de  $f_{n,m}(a)$ , se obtiene la expresión del potencial autogravitatorio en su forma clásica

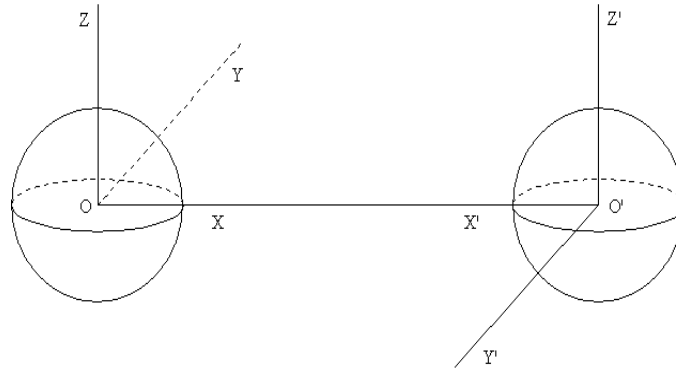
$$\Omega(a, \theta, \lambda) = U_0^c + r^{-1} V_0^c + \sum_{n=1}^{\infty} (U_n^c r^n + V_n^c r^{-n-1}) \quad (5.67)$$

## 5.4. Desarrollo del potencial centrífugo

Un sistema binario, una vez alcanzada la circulación de su órbita y la sincronización de sus componentes, tiene una velocidad angular de rotación  $\vec{\omega}$ . Ésta se puede determinar a partir de la tercera ley de *Kepler*  $\omega^2 = G \frac{M_1+M_2}{R^3}$  donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $M_1$  y  $M_2$  son las masas de las dos componentes del sistema y  $R$  es la distancia entre los centros de masas de las dos componentes del sistema.

El sistema de ejes que se utiliza en este trabajo gira uniformemente alrededor de un eje paralelo al eje  $OZ$  y centro, el centro de masas del sistema. Con lo que, para la determinación del potencial, habrá que añadir un potencial centrífugo  $V_c$ .

El centro de masas del sistema viene determinado por [32]



$$x_G = \frac{RM_2}{M_1+M_2} \quad y_G = 0 \quad z_G = 0 \quad (5.68)$$

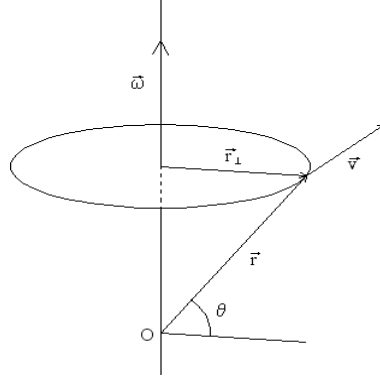
Para determinar la expresión del potencial centrífugo  $V_c$  lo haremos a partir de la fuerza centrífuga

$$\vec{F}_c = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_\perp)$$

Se define el potencial centrífugo como

$$V_c = - \int_0^{r_\perp} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}_\perp = - \int_0^{r_\perp} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_\perp) \cdot d\vec{r}_\perp \quad (5.69)$$





Operando en la expresión (5.69) se obtiene

$$V_c = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \theta = \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) \quad (5.70)$$

La expresión (5.70) es la determinación del potencial centrífugo respecto al origen de coordenadas.

De (5.68) y (5.70) se obtiene el potencial centrífugo respecto del centro de masas del sistema

$$V_c = \frac{1}{2}\omega^2 \left[ \left( x - \frac{M_2 R}{M_1 + M_2} \right)^2 + y^2 \right] \quad (5.71)$$

Asignando

$$\mu = \frac{M_2 R}{M_1 + M_2} \quad (5.72)$$

El potencial centrífugo  $V_c$ , de (5.71) y (5.72), queda

$$V_c = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2 - 2\mu x + \mu^2) \quad (5.73)$$

Expresando el potencial centrífugo  $V_c$  en coordenadas esféricas queda

$$V_c = \frac{\omega^2}{2} r^2 \cos^2 \theta - \omega^2 \mu r \cos \theta \cos \lambda + \frac{\omega^2 \mu^2}{2} \quad (5.74)$$

Por otro lado

$$\cos \theta \cos \lambda = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_{1,1}(\theta, \lambda) \quad (5.75)$$

$$\cos \theta \sin \lambda = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_{1,-1}(\theta, \lambda) \quad (5.76)$$

$$\sin \theta = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \lambda) \quad (5.77)$$

$$\sin \theta = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \lambda) \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} Y_{0,0}(\theta, \lambda) + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{2,0}(\theta, \lambda) \quad (5.78)$$

De (5.78)

$$\cos^2 \theta = \frac{4\sqrt{\pi}}{3} Y_{0,0}(\theta, \lambda) - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}} Y_{2,0}(\theta, \lambda) \quad (5.79)$$

De (5.75), (5.74), (5.78)

$$V_c = \sqrt{\pi} \omega^2 \left( \frac{2}{3} r^2 + \mu^2 \right) Y_{0,0}(\theta, \lambda) - 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \omega^2 \mu r Y_{1,1}(\theta, \lambda) - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}} \omega^2 r^2 Y_{2,0}(\theta, \lambda) \quad (5.80)$$

Por otra parte,  $r^k$  aproximado hasta primer orden y las series hasta  $p = 2$ , queda

$$r^k = a^k \left\{ 1 + k \sum_{p=0}^2 \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \right\} \quad (5.81)$$

Con  $f_{0,0}(a) = 0$ ;  $f_{p,-q}(a) = 0$ ;  $f_{p,q}(a) = 0$  si  $p + q$  es impar.

De (5.80), (5.81)

$$\begin{aligned} V_c(a, \theta, \lambda) = & \omega^2 \left\{ \frac{2\sqrt{\pi}}{3} a^2 - \frac{\mu}{\sqrt{3}} a f_{1,1}(a) - \frac{2}{3\sqrt{5}} a^2 f_{2,0}(a) + \sqrt{\pi} \mu^2 \right\} Y_{0,0}(\theta, \lambda) + \\ & + \omega^2 \left\{ -2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \mu a + \frac{4}{5} a^2 f_{1,1}(a) + \frac{\mu}{\sqrt{15}} a f_{2,0}(a) - \frac{\mu}{\sqrt{5}} a f_{2,2}(a) \right\} Y_{1,1}(\theta, \lambda) + \\ & + \omega^2 \left\{ -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}} a^2 + \frac{\mu}{\sqrt{15}} a f_{1,1}(a) + \frac{10}{21} a^2 f_{2,0}(a) \right\} Y_{2,0}(\theta, \lambda) + \\ & + \omega^2 \left\{ -\frac{\mu}{\sqrt{5}} a f_{1,1}(a) + \frac{6}{7} a^2 f_{2,2}(a) \right\} Y_{2,2}(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.82)$$

## 5.5. Desarrollo del potencial de marea

El fenómeno de mareas es conocido desde la antigüedad. Parece ser que *Piteas* (siglo IV a. C.) fue el primero en señalar la relación entre la amplitud de la marea y las fases de la Luna así como su periodicidad. *Plinio el Viejo* (23-79) en su *Naturalis Historia* describe correctamente el fenómeno y piensa que la marea está relacionada con la Luna y el Sol. Mucho más tarde, *Bacon*, *Kepler* y otros trataron de explicar ese fenómeno, admitiendo la atracción de la Luna y del Sol. Pero fue *Isaac Newton* en su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Principios matemáticos de la Filosofía Natural, 1687) quien dio la explicación de las mareas aceptada actualmente. Más tarde, *Pierre-Simon Laplace* (1749-1827) y otros científicos ampliaron el estudio de las mareas desde un punto de vista dinámico.

Las fuerzas de marea son los efectos secundarios de la fuerza de gravedad. Éstos ocurren porque la fuerza gravitacional ejercida sobre un cuerpo por un segundo cuerpo no es constante a través de su diámetro. Un estudio sobre la dinámica de marea, la teoría y el análisis de fenómenos de marea debidos a la variación de la gravedad se puede consultar en la obra [99].

Las mareas más conocidas y estudiadas son las que se producen en la Tierra. Ésta, en general, no cumple las condiciones de ser perfectamente fluida y deformable; ni tampoco es perfectamente rígida e indeformable; por lo que el efecto de las mareas (solares y lunares) debe notarse también en las zonas cubiertas por los continentes e islas: son las llamadas mareas terrestres. El campo de estudio de las mareas terrestres es muy amplio. En las obras [69] y en [80] se pueden consultar algunos aspectos de ese estudio.

*Tisserand* [87] trabajó un modelo elemental para el estudio del potencial de marea en los sistemas binarios próximos. Este modelo consiste en una masa de gran extensión para la componente primaria y una masa puntual distante como secundaria. *Kopal* [49] [50] [51] incluye una componente secundaria de gran masa en el estudio del potencial de marea. En este trabajo [62] [64] se usa un método más general para incluir las amplitudes de la componente secundaria en el potencial de marea.

El potencial de marea sobre un punto de la componente primaria del sistema viene dado por:

$$V_t(r, \theta, \lambda) = G \int_{D_2} \frac{dm'}{\Delta} \quad (5.83)$$

donde  $D_2$  es la región espacial ocupada por la componente secundaria,  $dm'$  es el elemento de masa de la componente secundaria y  $\Delta$  es la distancia entre un punto de la componente primaria con coordenadas  $(r, \theta, \lambda)$  en el sistema de referencia  $OXYZ$ , y el elemento de masa situado en un punto de coordenadas  $(r', \theta', \lambda')$  en el sistema de coordenadas  $O'X'Y'Z'$ .

Sea  $OXYZ$  el sistema de coordenadas definido por el centro de masas de la componente principal,  $OX$  es el eje en la dirección de la componente secundaria,  $OZ$  es el eje en la dirección de la velocidad angular del sistema y  $OY$  se define de manera que el sistema  $OX, OY, OZ$  formen un triedro directo.

Sea  $O'X'Y'Z'$  el sistema de coordenadas definido por el centro de masas de la componente secundaria,  $O'X'$  es el eje en la dirección al centro de masas de la componente primaria,  $O'Z'$  es el eje en la dirección de la velocidad angular del sistema y  $O'Y'$  se define de manera que el sistema  $O'X', O'Y', O'Z'$  formen un triedro directo.

Se designa por  $M_1$  y  $M_2$  a la masa de la componente primaria y a la masa de la componente secundaria, respectivamente.

Sea  $\vec{r} = \vec{OP}$  el radiovector del punto del primario del cual se va a calcular el potencial de marea y sean,  $\vec{r}' = \vec{O'P'}$  y  $\vec{r}_2 = \vec{O'P'}$ , los radiovectores del punto de la componente secundaria respecto de los sistemas de coordenadas  $OXYZ$  y  $O'X'Y'Z'$ , respectivamente.

Sea  $\Psi$  el ángulo entre los radiovectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ , y  $\Psi_2$  el ángulo entre  $\vec{r}_2$  y  $O'X'$ .

Sea  $R$  la distancia entre  $O$  y  $O'$ .

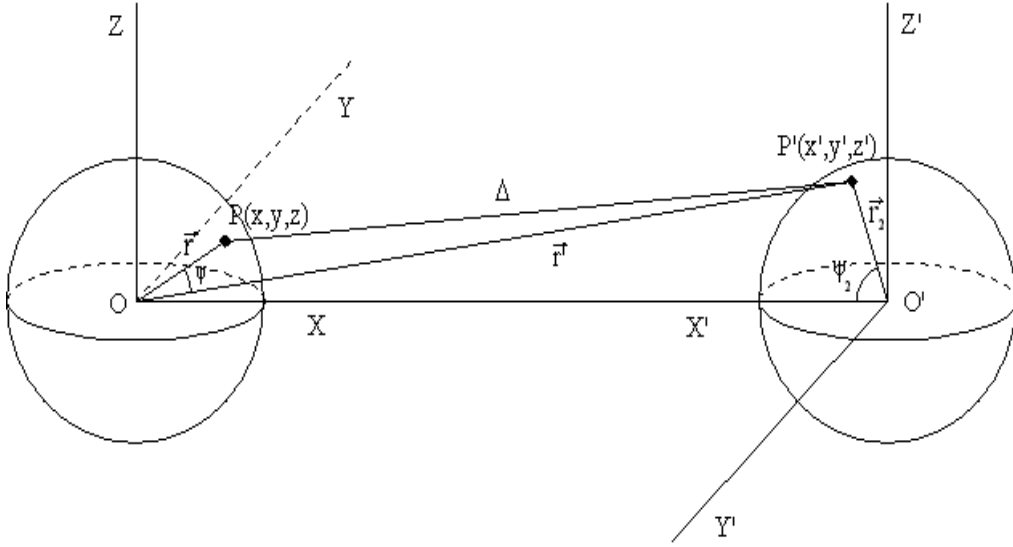
$$\begin{aligned} x &= R - x' & x &= r \cos \theta \cos \lambda & x' &= r_2 \cos \theta' \cos \lambda' \\ y &= -y' & y &= r \cos \theta \sin \lambda & y' &= r_2 \cos \theta' \sin \lambda' \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$z = z' \quad z = r \sin \theta \quad z' = r_2 \sin \theta'$$

$$\vec{r} = (r \cos \theta \cos \lambda, r \cos \theta \sin \lambda, r \sin \theta) \quad (5.85)$$

$$\vec{r}' = (R - r_2 \cos \theta' \cos \lambda', -r_2 \cos \theta' \sin \lambda', r_2 \sin \theta') \quad (5.86)$$

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \Psi$$



$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos \Psi) \quad \text{ya que } r < r' \quad (5.87)$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{r_2^2 + R^2 - 2r_2 R \cos \Psi_2}} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_2}{R}\right)^n P_n(\cos \Psi_2) \quad \text{ya que } r_2 < R \quad (5.88)$$

De (5.75), (5.76), (5.77), (5.85), (5.86)

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \left( 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r Y_{1,1}(\theta, \lambda), 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r Y_{1,-1}(\theta, \lambda), 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r Y_{1,0}(\theta, \lambda) \right) \\ \vec{r}' &= \left( R - 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r_2 Y_{1,1}(\theta', \lambda'), -2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r_2 Y_{1,-1}(\theta', \lambda'), 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r_2 Y_{1,0}(\theta', \lambda') \right) \\ \vec{r} \cdot \vec{r}' &= 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r R \left\{ Y_{1,1}(\theta, \lambda) - 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r_2}{R} Y_{1,1}(\theta, \lambda) Y_{1,1}(\theta', \lambda') - \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r_2}{R} Y_{1,-1}(\theta, \lambda) Y_{1,-1}(\theta', \lambda') + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r_2}{R} Y_{1,0}(\theta, \lambda) Y_{1,0}(\theta', \lambda') \right\} \end{aligned} \quad (5.89)$$

De (5.88), (5.89)

$$\begin{aligned} \cos \Psi &= \frac{1}{r'} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r} = \left\{ 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_{1,1}(\theta, \lambda) - \frac{4\pi}{3} \frac{r_2}{R} Y_{1,1}(\theta, \lambda) Y_{1,1}(\theta', \lambda') - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{3} \frac{r_2}{R} Y_{1,-1}(\theta, \lambda) Y_{1,-1}(\theta', \lambda') + \frac{4\pi}{3} \frac{r_2}{R} Y_{1,0}(\theta, \lambda) Y_{1,0}(\theta', \lambda') \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_2}{R}\right)^n P_n(\cos \Psi_2) \end{aligned} \quad (5.90)$$

Por otro lado

$$\cos \Psi_2 = \cos \theta' \cos \lambda' = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} Y_{1,1}(\theta', \lambda') \quad (5.91)$$

De (3.12), (5.90), (5.91) y desarrollando hasta  $n = 2$

$$\begin{aligned} \cos \Psi = & \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2\right) Y_{1,1}(\theta, \lambda) Y_{0,0}(\theta', \lambda') + \frac{4\pi}{3} \frac{r_2}{R} Y_{1,0}(\theta, \lambda) Y_{1,0}(\theta', \lambda') - \\ & - \frac{4\pi}{3} \frac{r_2}{R} Y_{1,-1}(\theta, \lambda) Y_{1,-1}(\theta', \lambda') - \frac{2\pi}{3\sqrt{15}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{1,1}(\theta, \lambda) Y_{2,0}(\theta', \lambda') + \\ & + \frac{4\pi}{3\sqrt{5}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{1,0}(\theta, \lambda) Y_{2,1}(\theta', \lambda') + \frac{2\pi}{3\sqrt{5}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{1,1}(\theta, \lambda) Y_{2,2}(\theta', \lambda') - \\ & - \frac{4\pi}{3\sqrt{5}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{1,-1}(\theta, \lambda) Y_{2,-2}(\theta', \lambda') \end{aligned} \quad (5.92)$$

donde

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r_2}{R} Y_{1,1}(\theta', \lambda') - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{2,0}(\theta', \lambda') + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{2,2}(\theta', \lambda') \right\} \quad (5.93)$$

De (3.12), (5.92), (5.93)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = & \frac{1}{R} \left\{ 1 + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r}{R} Y_{1,1}(\theta, \lambda) - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 Y_{2,0}(\theta, \lambda) + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 Y_{2,2}(\theta, \lambda) + \right. \\ & + \frac{4\pi}{3} \frac{r}{R} \frac{r_2}{R} (-Y_{1,-1}(\theta, \lambda) Y_{1,-1}(\theta', \lambda') + Y_{1,0}(\theta, \lambda) Y_{1,0}(\theta', \lambda') + Y_{1,1}(\theta, \lambda) Y_{1,1}(\theta', \lambda')) + \\ & \left. + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r_2}{R} Y_{1,1}(\theta', \lambda') - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{2,0}(\theta', \lambda') + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{2,2}(\theta', \lambda') \right\} \end{aligned} \quad (5.94)$$

El desarrollo, para  $n = 2$ , obtenido en (5.94) para  $\frac{1}{\Delta}$  también se puede obtener utilizando el algoritmo de *Kovalevsky* [62] [64].

### Algoritmo de *Kovalevsky*

Sea  $\Delta$  la distancia entre  $P(x, y, z)$  y  $P'(x', y', z')$ ,  $X = \frac{1}{\Delta}$  y  $D = \frac{1}{X^2}$ . Denotemos por  $\delta X_k$  al incremento de  $X_k$

$$D = \frac{1}{(X_k + \delta X_k)^2} = \frac{\frac{1}{X_k^2}}{\left(1 + \frac{\delta X_k}{X_k}\right)^2} \quad (5.95)$$

Desarrollando  $\left(1 + \frac{\delta X_k}{X_k}\right)^{-2}$  en serie de *Taylor* hasta orden 1, obtenemos

$$\left(1 + \frac{\delta X_k}{X_k}\right)^{-2} = 1 - 2 \frac{\delta X_k}{X_k} \quad (5.96)$$

De (5.95), (5.96)

$$\delta X_k = \frac{1}{2} X_k - \frac{1}{2} X_k^3 D \quad (5.97)$$

Por otra lado

$$\delta X_k = X_{k+1} - X_k \quad (5.98)$$

por lo que, de (5.97), (5.98)

$$X_{k+1} = \frac{3}{2} X_k - \frac{1}{2} X_k^3 D \quad (5.99)$$

Consecuentemente

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\Delta}\right)_{k+1} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)_k - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)_k^3 \Delta^2 \\ \left(\frac{1}{\Delta}\right)_0 = \frac{1}{R} \end{cases} \quad (5.100)$$

Para el cálculo del inverso de la distancia mediante el algoritmo de *Kovalovsky*, es necesaria la determinación de  $\Delta^2$ .

Expresando un punto de la componente primaria y un punto de la componente secundaria mediante armónicos esféricos se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r Y_{1,1}(\theta, \lambda) & x' &= R - 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r_2 Y_{1,1}(\theta', \lambda') \\ y &= 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r Y_{1,-1}(\theta, \lambda) & y' &= -2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r_2 Y_{1,-1}(\theta', \lambda') \\ z &= 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r Y_{1,0}(\theta, \lambda) & z' &= 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} r_2 Y_{1,0}(\theta', \lambda') \end{aligned} \quad (5.101)$$

Por otro lado

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \quad (5.102)$$

De (5.101), (5.102) y operando queda:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= R^2 + r^2 + r_2^2 - 4R \sqrt{\frac{\pi}{3}} [r Y_{1,1}(\theta, \lambda) + r_2 Y_{1,1}(\theta', \lambda')] + \\ &+ \frac{8\pi}{3} r r_2 [Y_{1,-1}(\theta, \lambda) Y_{1,-1}(\theta', \lambda') - Y_{1,0}(\theta, \lambda) Y_{1,0}(\theta', \lambda') + Y_{1,1}(\theta, \lambda) Y_{1,1}(\theta', \lambda')] \end{aligned} \quad (5.103)$$

De (5.100), (5.103)

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)_0 = \frac{1}{R} \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta}\right)_1 &= \frac{1}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r}{R} Y_{1,1}(\theta, \lambda) + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r_2}{R} Y_{1,1}(\theta', \lambda') + \right. \\ &+ \left. \frac{4\pi}{3} \frac{r}{R} \frac{r_2}{R} [-Y_{1,-1}(\theta, \lambda) Y_{1,-1}(\theta', \lambda') + Y_{1,0}(\theta, \lambda) Y_{1,0}(\theta', \lambda') - Y_{1,1}(\theta, \lambda) Y_{1,1}(\theta', \lambda')] \right\} \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta}\right)_2 &= \frac{1}{R} \left\{ 1 + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r}{R} Y_{1,1}(\theta, \lambda) - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 Y_{2,0}(\theta, \lambda) + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 Y_{2,2}(\theta, \lambda) + \right. \\ &+ \frac{4\pi}{3} \frac{r}{R} \frac{r_2}{R} (-Y_{1,-1}(\theta, \lambda) Y_{1,-1}(\theta', \lambda') + Y_{1,0}(\theta, \lambda) Y_{1,0}(\theta', \lambda') + Y_{1,1}(\theta, \lambda) Y_{1,1}(\theta', \lambda')) + \\ &+ \left. 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r_2}{R} Y_{1,1}(\theta', \lambda') - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{2,0}(\theta', \lambda') + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{2,2}(\theta', \lambda') \right\} \end{aligned} \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta}\right)_3 &= \frac{1}{R} \left\{ 1 + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r}{R} Y_{1,1}(\theta, \lambda) - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 Y_{2,0}(\theta, \lambda) + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 Y_{2,2}(\theta, \lambda) + \right. \\ &+ \frac{4\pi}{3} \frac{r}{R} \frac{r_2}{R} (-Y_{1,-1}(\theta, \lambda) Y_{1,-1}(\theta', \lambda') + Y_{1,0}(\theta, \lambda) Y_{1,0}(\theta', \lambda') + Y_{1,1}(\theta, \lambda) Y_{1,1}(\theta', \lambda')) + \\ &+ \left. 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r_2}{R} Y_{1,1}(\theta', \lambda') - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{2,0}(\theta', \lambda') + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \left(\frac{r_2}{R}\right)^2 Y_{2,2}(\theta', \lambda') \right\} \end{aligned} \quad (5.107)$$

Como  $\left(\frac{1}{\Delta}\right)_2$  y  $\left(\frac{1}{\Delta}\right)_3$  coinciden, para  $n = 2$ , se concluye que el método converge.

Comparando las ecuaciones (5.94) y (5.106) se observa que coinciden, por lo que hemos obtenido  $\frac{1}{\Delta}$  por dos métodos diferentes.

Por otra parte,  $r_2^k$  aproximado hasta primer orden y las series hasta  $p = 2$ , queda

$$r_2^k = a'^k \left\{ 1 + k \sum_{p=0}^2 \sum_{q=-p}^p g_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right\} \quad (5.108)$$



Con  $g_{0,0}(a') = 0$ ;  $g_{p,-q}(a') = 0$ ;  $g_{p,q}(a') = 0$  si  $p + q$  es impar.

Una vez calculada una aproximación de  $\frac{1}{\Delta}$ , para  $n = 2$ , se está en disposición de obtener una aproximación del potencial de marea.

De (5.83), (5.106)

$$\begin{aligned}
 V_t(r, \theta, \lambda) = & \frac{GM_2}{R} \left\{ 1 + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r}{R} Y_{1,1}(\theta, \lambda) - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 Y_{2,0}(\theta, \lambda) + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 Y_{2,2}(\theta, \lambda) \right\} + \\
 & + \frac{G}{R^2} 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \int_{D_2} r_2 Y_{1,1}(\theta', \lambda') dm' - \frac{G}{R^3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \int_{D_2} r_2^2 Y_{2,0}(\theta', \lambda') dm' + \\
 & + \frac{G}{R^3} \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \int_{D_2} r_2^2 Y_{2,2}(\theta', \lambda') dm' - \frac{G}{R^3} \frac{4\pi}{3} r Y_{1,-1}(\theta, \lambda) \int_{D_2} r_2 Y_{1,-1}(\theta', \lambda') dm' + \\
 & + \frac{G}{R^3} \frac{4\pi}{3} r Y_{1,0}(\theta, \lambda) \int_{D_2} r_2 Y_{1,0}(\theta', \lambda') dm' + \frac{G}{R^3} \frac{8\pi}{3} r Y_{1,1}(\theta, \lambda) \int_{D_2} r_2 Y_{1,1}(\theta', \lambda') dm'
 \end{aligned} \tag{5.109}$$

Ahora se procederá a calcular las integrales de la forma  $\int_{D_2} r_2^n Y_{n,m}(\theta', \lambda') dm'$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{D_2} r_2^n Y_{n,m}(\theta', \lambda') dm' & = \left\{ dm' = \rho(a') r_2^2 \left| \frac{\partial r_2}{\partial a'} \right| \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' \right\} = \\
 & = \int_{a'=0}^{a_2} \rho \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r_2^{n+2} \left| \frac{\partial r_2}{\partial a'} \right| Y_{n,m}(\theta', \lambda') \cos \theta' d\theta' d\lambda' da' = \\
 & = \frac{1}{n+3} \int_{a'=0}^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r_2^{n+3} Y_{n,m}(\theta', \lambda') \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right\} da'
 \end{aligned} \tag{5.110}$$

De (5.108), (5.110)

$$\begin{aligned}
 \int_{D_2} r_2^n Y_{n,m}(\theta', \lambda') dm' & = \frac{1}{n+3} \int_{a'=0}^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a'^{n+3} Y_{n,m}(\theta', \lambda') \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right\} da' + \\
 & + \int_{a'=0}^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a'^{n+3} \left( \sum_{p=0}^2 \sum_{q=-p}^p g_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right) Y_{n,m}(\theta', \lambda') \cos \theta' d\theta' d\lambda' \right\} da'
 \end{aligned} \tag{5.111}$$

Por otro lado

$$\int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y_{n,m}(\theta', \lambda') \cos \theta' d\theta' d\lambda' = \frac{\delta_{n,0} \delta_{m,0}}{Y_{0,0}(\theta', \lambda')} \quad (5.112)$$

$$\int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \sum_{p=0}^2 \sum_{q=-p}^p g_{p,q}(a') Y_{p,q}(\theta', \lambda') \right) Y_{n,m}(\theta', \lambda') \cos \theta' d\theta' d\lambda' = g_{n,m}(a') \quad (5.113)$$

De (5.111), (5.112), (5.113)

$$\begin{aligned} \int_{D_2} r_2^n Y_{n,m}(\theta', \lambda') dm' &= \frac{1}{n+3} \int_{a'=0}^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{m+3} \frac{\delta_{n,0} \delta_{m,0}}{Y_{0,0}(\theta', \lambda')} \right\} da' + \\ &+ \int_{a'=0}^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{m+3} g_{n,m}(a') \right\} da' \end{aligned} \quad (5.114)$$

Asignando

$$F_{n,m}^{(2)}(a_2) = \int_{a'=0}^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{m+3} g_{n,m}(a') \right\} da' \quad \text{si } n \neq 0 \quad (5.115)$$

$$F_{0,0}^{(2)}(a_2) = \frac{1}{3} \int_{a'=0}^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \frac{a'^3}{Y_{0,0}(\theta', \lambda')} \right\} da' = \frac{M_2}{4\pi Y_{0,0}(\theta, \lambda)} \quad (5.116)$$

En este trabajo se ha considerado que  $F_{i,j}^{(2)}(a_2) = 0$  si  $j < 0$ .

De (5.114), (5.115), (5.116)

$$\int_{D_2} r_2^n Y_{n,m}(\theta', \lambda') dm' = \begin{cases} \frac{M_2}{4\pi Y_{0,0}(\theta, \lambda)} & \text{si } n = 0 \\ F_{n,m}^{(2)}(a_2) & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (5.117)$$

De (5.109), (5.117)

$$\begin{aligned} V_l(r, \theta, \lambda) &= \frac{GM_2}{R} \left\{ 1 + 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{r}{R} Y_{1,1}(\theta, \lambda) - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 Y_{2,0}(\theta, \lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \left(\frac{r}{R}\right)^2 Y_{2,2}(\theta, \lambda) \right\} + \frac{G}{R^2} 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} F_{1,1}^{(2)}(a_2) + \\ &\quad + \frac{G}{R^3} \left( -\sqrt{\frac{\pi}{5}} F_{2,0}^{(2)}(a_2) + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} F_{2,2}^{(2)}(a_2) + \frac{8\pi}{3} r Y_{1,1}(\theta, \lambda) F_{1,1}^{(2)}(a_2) \right) \end{aligned} \quad (5.118)$$

Por otra parte,  $r^k$  aproximado hasta primer orden y las series hasta  $p = 2$ , queda

$$r^k = a^k \left\{ 1 + k \sum_{p=0}^2 \sum_{q=-p}^p f_{p,q}(a) Y_{p,q}(\theta, \lambda) \right\} \quad (5.119)$$

Con  $f_{0,0}(a) = 0$ ;  $f_{p,-q}(a) = 0$ ;  $f_{p,q}(a) = 0$  si  $p + q$  es impar.

Los productos  $f_{p,q}(a) \cdot F_{i,j}^{(2)}(a_2)$  son cantidades de segundo orden en  $f_{p,q}(a)$  y como en este trabajo estamos considerando solo hasta primer orden, habrá que expresar el potencial de marea  $V_t(r, \theta, \lambda)$  sin los términos que contengan estos productos. Por lo tanto teniendo en cuenta estas consideraciones y de (5.118), (5.119) se obtiene

$$\begin{aligned} V_t(a, \theta, \lambda) = & \frac{GM_2}{R} \left\{ 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \frac{a}{R} f_{1,1}(a) - \frac{1}{2\sqrt{5}\pi} \left(\frac{a}{R}\right)^2 f_{2,0}(a) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} \left(\frac{a}{R}\right)^2 f_{2,2}(a) \right\} + \\ & + \frac{G}{R^2} \left\{ 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} F_{1,1}^{(2)}(a_2) - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{F_{2,0}^{(2)}(a_2)}{R} + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \frac{F_{2,2}^{(2)}(a_2)}{R} \right\} + \left[ \frac{GM_2}{R} \left\{ 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{R} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4}{5} \left(\frac{a}{R}\right)^2 f_{1,1}(a) - \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{a}{R} f_{2,0}(a) + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{a}{R} f_{2,2}(a) \right\} + \frac{G}{R^2} \frac{8\pi}{3} \frac{a}{R} F_{1,1}^{(2)}(a_2) \right] Y_{1,1}(\theta, \lambda) - \\ & - \frac{GM_2}{R} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{5}} \left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{a}{R} f_{1,1}(a) + \frac{2}{7} \left(\frac{a}{R}\right)^2 f_{2,0}(a) + \frac{2\sqrt{3}}{7} \left(\frac{a}{R}\right)^2 f_{2,2}(a) \right\} Y_{2,0}(\theta, \lambda) + \\ & + \frac{GM_2}{R} \left\{ \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{a}{R} f_{1,1}(a) - \frac{2\sqrt{3}}{7} \left(\frac{a}{R}\right)^2 f_{2,0}(a) + \frac{2}{7} \left(\frac{a}{R}\right)^2 f_{2,2}(a) \right\} Y_{2,2}(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.120)$$

## 5.6. Desarrollo del potencial total

En los desarrollos obtenidos para el potencial autogravitatorio (5.67), el potencial centrífugo (5.82) y el potencial de marea (5.120) no se aprecian que términos están contenidos en las teorías de primer orden y cuales están contenidos en las teorías de segundo orden.

En este apartado se establecerán de forma explícita los desarrollos, tanto en primer orden como en segundo orden, de los potenciales autogravitatorio, centrífugo, de marea y total. Para ello, han sido de una importancia capital los códigos implementados en el programa *Mathematica* (construidos a partir de los algoritmos elaborados en el **Capítulo 2**).

### 5.6.1. Desarrollos de los potenciales en primer orden

Para primer orden, los desarrollos de  $r^t$  (5.14) y  $\ln r$  (5.15), se han truncado para  $n = 4$ :

$$r^t = a^t \left( 1 + t \sum_{n=0}^4 \sum_{m=0}^n f_{n,m}(a) Y_{n,m}(\theta, \lambda) \right) \quad (5.121)$$

$$\ln r = \ln a + \sum_{n=0}^4 \sum_{m=0}^n f_{n,m}(a) Y_{n,m}(\theta, \lambda) \quad (5.122)$$

con

$$f_{n,m}(a) = 0 \quad \text{si } n + m = 2 + 1$$

Por otra parte, de (5.17), (5.18), (5.19), (5.121), (5.122)

$$E_{0,0}(a) = \frac{1}{Y_{0,0}(\theta, \lambda)} \int_a^{a_1} \rho a' da' ; \quad F_{0,0}(a) = \frac{M_1(a)}{4\pi Y_{0,0}(\theta, \lambda)} \quad (5.123)$$

Si  $n \neq 0$

$$E_{n,m}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \{a'^{2-n} f_{n,m}(a')\} da' = O(f_{n,m}(a)) \quad (5.124)$$

$$F_{n,m}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \{a'^{m+3} f_{n,m}(a')\} da' = O(f_{n,m}(a)) \quad (5.125)$$

**Desarrollo del potencial autogravitatorio**

De (5.16), (5.121), (5.122), (5.123), (5.124), (5.125)

$$\begin{aligned}
\Omega(a, \theta, \lambda) = & 4\pi G \left\{ \left[ E_{0,0}(a) + \frac{1}{a} F_{0,0}(a) \right] Y_{0,0}(\theta, \lambda) + \right. \\
& + \left[ \frac{1}{3} a E_{1,1}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{1,1}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{3a^2} F_{1,1}(a) \right] Y_{1,1}(\theta, \lambda) + \\
& + \left[ \frac{1}{5} a^2 E_{2,0}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{2,0}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{5a^3} F_{2,0}(a) \right] Y_{2,0}(\theta, \lambda) + \\
& + \left[ \frac{1}{5} a^2 E_{2,2}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{2,2}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{5a^3} F_{2,2}(a) \right] Y_{2,2}(\theta, \lambda) + \\
& + \left[ \frac{1}{7} a^3 E_{3,1}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{3,1}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{7a^4} F_{3,1}(a) \right] Y_{3,1}(\theta, \lambda) + \quad (5.126) \\
& + \left[ \frac{1}{7} a^3 E_{3,3}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{3,3}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{7a^4} F_{3,3}(a) \right] Y_{3,3}(\theta, \lambda) + \\
& + \left[ \frac{1}{9} a^4 E_{4,0}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{4,0}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{9a^5} F_{4,0}(a) \right] Y_{4,0}(\theta, \lambda) + \\
& + \left[ \frac{1}{9} a^4 E_{4,2}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{4,2}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{9a^5} F_{4,2}(a) \right] Y_{4,2}(\theta, \lambda) + \\
& + \left. \left[ \frac{1}{9} a^4 E_{4,4}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{4,4}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{9a^5} F_{4,4}(a) \right] Y_{4,4}(\theta, \lambda) \right\}
\end{aligned}$$

**Desarrollo del potencial centrífugo**

De (5.82), (5.121)

$$\begin{aligned}
V_c(a, \theta, \lambda) = & \omega^2 \left\{ \left[ \frac{2\sqrt{\pi}}{3} a^2 + \sqrt{\pi} \left( \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} \right)^2 \right] Y_{0,0}(\theta, \lambda) - \right. \\
& \left. - 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} a Y_{1,1}(\theta, \lambda) - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} a^2 Y_{2,0}(\theta, \lambda) \right\} \quad (5.127)
\end{aligned}$$

### Desarrollo del potencial de marea

De (5.83)-(5.89), (5.121)

$$V_t(a, \theta, \lambda) = \frac{GM_2(a)}{R^3} \left\{ 2\sqrt{\pi}R^2 Y_{0,0}(\theta, \lambda) - \sqrt{\frac{\pi}{5}} a^2 Y_{2,0}(\theta, \lambda) + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} a^2 Y_{2,2}(\theta, \lambda) \right\} \quad (5.128)$$

### Desarrollo del potencial total

Puesto que el potencial total sólo depende del parámetro  $a$ , se cumplirá que  $\Psi_{n,m}(a) = 0$  si  $n > 0$ .

De (5.126), (5.127), (5.128)

$$\Psi(a, \theta, \lambda) = \Psi_{0,0}(a) Y_{0,0}(\theta, \lambda) \quad (5.129)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{0,0}(a) = 4\pi G \left( E_{0,0}(a) + \frac{1}{a} F_{0,0}(a) \right) + \omega^2 \left[ \frac{2\sqrt{\pi}}{3} a^2 + \sqrt{\pi} \left( \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} \right)^2 \right] + \\ + \frac{GM_2(a)}{R^3} (2\sqrt{\pi} R^2) \end{aligned} \quad (5.130)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1,1}(a) = 4\pi G \left[ \frac{1}{3} a E_{1,1}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{1,1}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{3a^2} F_{1,1}(a) \right] - \\ - \omega^2 \left( 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} a \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.131)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{2,0}(a) = 4\pi G \left( \frac{1}{5} a^2 E_{2,0}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{2,0}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{5a^3} F_{2,0}(a) \right) - \\ - \omega^2 \left( \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} a^2 \right) - \frac{GM_2(a)}{R^3} \left( \sqrt{\frac{\pi}{5}} a^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.132)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{2,2}(a) = 4\pi G \left( \frac{1}{5} a^2 E_{2,2}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{2,2}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{5a^3} F_{2,2}(a) \right) + \\ + \frac{GM_2(a)}{R^3} \left( \sqrt{\frac{3\pi}{5}} a^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.133)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{3,1}(a) = 4\pi G \left[ \frac{1}{7} a^3 E_{3,1}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{3,1}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{7a^4} F_{3,1}(a) \right] - \\ - \frac{GM_2(a)}{R^3} \left( \sqrt{\frac{6\pi}{7}} \frac{a^3}{R} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.134)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{3,3}(a) = 4\pi G \left[ \frac{1}{7} a^3 E_{3,3}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{3,3}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{7a^4} F_{3,3}(a) \right] + \\ + \frac{GM_2(a)}{R^3} \left( \sqrt{\frac{5\pi}{14}} \frac{a^3}{R} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.135)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{4,0}(a) = 4\pi G \left[ \frac{1}{9} a^4 E_{4,0}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{4,0}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{9a^5} F_{4,0}(a) \right] + \\ + \frac{GM_2(a)}{R^3} \left( \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{a^4}{R^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.136)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{4,2}(a) = 4\pi G \left[ \frac{1}{9} a^4 E_{4,2}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{4,2}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{9a^5} F_{4,2}(a) \right] - \\ - \frac{GM_2(a)}{R^3} \left( \frac{\sqrt{5\pi}}{2} \frac{a^4}{R^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.137)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{4,4}(a) = 4\pi G \left[ \frac{1}{9} a^4 E_{4,4}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{4,4}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{9a^5} F_{4,4}(a) \right] + \\ + \frac{GM_2(a)}{R^3} \left( \frac{\sqrt{35\pi}}{12} \frac{a^4}{R^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.138)$$

De (5.131)-(5.138) se deduce que

$$O(f_{1,1}(a)) = O(f_{2,0}(a)) = O(f_{2,2}(a)) = O(\omega^2) = O\left(\frac{GM_2}{R^3}\right) \quad (5.139)$$

con lo que se corroboran los resultados obtenidos por *López* [60].

Además

$$O(f_{2,0}(a)) < O(f_{3,1}(a)) = O\left(\frac{GM_2}{R^4}\right) < O(f_{2,0}^2(a)) \quad (5.140)$$

$$O(f_{2,0}(a)) < O(f_{3,3}(a)) = O\left(\frac{GM_2}{R^4}\right) < O(f_{2,0}^2(a)) \quad (5.141)$$

$$O(f_{2,0}(a)) < O(f_{4,0}(a)) = O\left(\frac{GM_2}{R^5}\right) < O(f_{2,0}^2(a)) \quad (5.142)$$

$$O(f_{2,0}(a)) < O(f_{4,2}(a)) = O\left(\frac{GM_2}{R^5}\right) < O(f_{2,0}^2(a)) \quad (5.143)$$

$$O(f_{2,0}(a)) < O(f_{4,4}(a)) = O\left(\frac{GM_2}{R^5}\right) < O(f_{2,0}^2(a)) \quad (5.144)$$



### 5.6.2. Desarrollos de los potenciales en segundo orden

Para segundo orden, el desarrollo de  $r^t$  (5.14) se ha truncado, también, para  $n = 4$ :

$$r^t = a^t \left( 1 + t \sum_{n=0}^4 \sum_{m=0}^n f_{n,m}(a) Y_{n,m}(\theta, \lambda) + \frac{t(t-1)}{2} \sum_{n=0}^4 \sum_{m=0}^n A_{n,m}(a) Y_{n,m}(\theta, \lambda) \right) \quad (5.145)$$

con

$$f_{n,m}(a) = 0 \quad \text{y} \quad A_{n,m}(a) = 0 \quad \text{si} \quad n + m = \dot{2} + 1$$

$$A_{0,0}(a) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (f_{1,1}^2(a) + f_{2,0}^2(a) + f_{2,2}^2(a))$$

$$A_{1,1}(a) = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} f_{1,1}(a) (\sqrt{3} f_{2,2}(a) - f_{2,0}(a))$$

$$A_{2,0}(a) = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \left( -\frac{1}{2} f_{1,1}^2(a) + \frac{5}{7} f_{2,0}^2(a) - \frac{5}{7} f_{2,2}^2(a) \right)$$

$$A_{2,2}(a) = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} f_{1,1}^2(a) - \frac{10}{7} f_{2,0}(a) f_{2,2}(a) \right)$$

$$A_{3,1}(a) = \frac{1}{\sqrt{35\pi}} f_{1,1}(a) \left( 3\sqrt{2} f_{2,0}(a) - \sqrt{\frac{3}{2}} f_{2,2}(a) \right)$$

$$A_{3,3}(a) = \frac{3}{\sqrt{14\pi}} f_{1,1}(a) f_{2,2}(a)$$

$$A_{4,0}(a) = \frac{1}{7\sqrt{\pi}} \left( 3 f_{2,0}^2(a) + \frac{1}{2} f_{2,2}^2(a) \right)$$

$$A_{4,2}(a) = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{15}{\pi}} f_{2,0}(a) f_{2,2}(a)$$

$$A_{4,4}(a) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{7\pi}} f_{2,2}^2(a)$$

Por otra parte, de (5.13) para  $n = 0$  y (5.145) se obtiene que

$$F_{0,0}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^3 \left[ \frac{2\sqrt{\pi}}{3} + f_{0,0}(a') + A_{0,0}(a') \right] \right\} da' \quad (5.146)$$

De (5.139), (5.145) y teniendo en cuenta que

$$F_{0,0}(a) = \frac{M_1(a)}{2\sqrt{\pi}}$$

se deduce que

$$f_{0,0}(a) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} (f_{1,1}^2(a) + f_{2,0}^2(a) + f_{2,2}^2(a)) \quad (5.147)$$

Consecuentemente, de (5.11), (5.12), (5.13), (5.145), (5.147)

$$E_{0,0}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^2 \left[ \sqrt{\pi} - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} (f_{1,1}^2(a') + f_{2,0}^2(a') + f_{2,2}^2(a')) \right] \right\} da' \quad (5.148)$$

$$E_{1,1}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \{ a' f_{1,1}(a') \} da' \quad (5.149)$$

$$E_{2,0}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ f_{2,0}(a') + \frac{1}{2\sqrt{5\pi}} \left[ \frac{1}{2} f_{1,1}^2(a') - \frac{5}{7} f_{2,0}^2(a') + \frac{5}{7} f_{2,2}^2(a') \right] \right\} da' \quad (5.150)$$

$$E_{2,2}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ f_{2,2}(a') + \frac{1}{2\sqrt{5\pi}} \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} f_{1,1}^2(a') + \frac{10}{7} f_{2,0}(a') f_{2,2}(a') \right] \right\} da' \quad (5.151)$$

$$E_{3,1}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{-1} \left[ f_{3,1}(a') + \frac{f_{1,1}(a')}{\sqrt{35\pi}} \left( -3\sqrt{2} f_{2,0}(a') + \sqrt{\frac{3}{2}} f_{2,2}(a') \right) \right] \right\} da' \quad (5.152)$$

$$E_{3,3}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{-1} \left[ f_{3,3}(a') - \frac{3}{\sqrt{14\pi}} f_{1,1}(a') f_{2,2}(a') \right] \right\} da' \quad (5.153)$$

$$E_{4,0}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{-2} \left[ f_{4,0}(a') - \frac{3}{14\sqrt{\pi}} \left( 3 f_{2,0}^2(a') + \frac{1}{2} f_{2,2}^2(a') \right) \right] \right\} da' \quad (5.154)$$

$$E_{4,2}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{-2} \left[ f_{4,2}(a') - \frac{3}{14} \sqrt{\frac{15}{\pi}} f_{2,0}(a') f_{2,2}(a') \right] \right\} da' \quad (5.155)$$

$$E_{4,4}(a) = \int_a^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^{-2} \left[ f_{4,4}(a') - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{5}{7\pi}} f_{2,2}^2(a') \right] \right\} da' \quad (5.156)$$

$$F_{0,0}(a) = \frac{M_1(a)}{2\sqrt{\pi}} \quad (5.157)$$

$$F_{1,1}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^4 \left[ f_{1,1}(a') \left( 1 + \frac{3}{2\sqrt{5\pi}} \left( \sqrt{3} f_{2,2}(a') - f_{2,0}(a') \right) \right) \right] \right\} da' \quad (5.158)$$

$$F_{2,0}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^5 \left[ f_{2,0}(a') + \frac{2}{\sqrt{5\pi}} \left( -\frac{1}{2} f_{1,1}^2(a') + \frac{5}{7} f_{2,0}^2(a') - \frac{5}{7} f_{2,2}^2(a') \right) \right] \right\} da' \quad (5.159)$$

$$F_{2,2}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^5 \left[ f_{2,2}(a') + \frac{2}{\sqrt{5\pi}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} f_{1,1}^2(a') - \frac{10}{7} f_{2,0}(a') f_{2,2}(a') \right) \right] \right\} da' \quad (5.160)$$

$$F_{3,1}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^6 \left[ f_{3,1}(a') + \frac{5}{2\sqrt{35\pi}} f_{1,1}(a') \left( 3\sqrt{2} f_{2,0}(a') - \sqrt{\frac{3}{2}} f_{2,2}(a') \right) \right] \right\} da' \quad (5.161)$$

$$F_{3,3}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^6 \left[ f_{3,3}(a') + \frac{15}{2\sqrt{14\pi}} f_{1,1}(a') f_{2,2}(a') \right] \right\} da' \quad (5.162)$$

$$F_{4,0}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^7 \left[ f_{4,0}(a') + \frac{3}{7\sqrt{\pi}} \left( 3 f_{2,0}^2(a') + \frac{1}{2} f_{2,2}^2(a') \right) \right] \right\} da' \quad (5.163)$$

$$F_{4,2}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^7 \left[ f_{4,2}(a') + \frac{3}{7} \sqrt{\frac{15}{\pi}} f_{2,0}(a') f_{2,2}(a') \right] \right\} da' \quad (5.164)$$

$$F_{4,4}(a) = \int_0^a \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^7 \left[ f_{4,4}(a') + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{7\pi}} f_{2,2}^2(a') \right] \right\} da' \quad (5.165)$$

### Desarrollo del potencial autogravitatorio

De (5.16), (5.145)

$$\Omega(a, \theta, \lambda) = 4\pi G \sum_{n=0}^4 \sum_{m=0}^n \Omega_{n,m}(a) Y_{n,m}(\theta, \lambda) \quad (5.166)$$

con

$$\Omega_{n,m}(a) = 0 \quad \text{si } n + m = \dot{2} + 1$$

$$\begin{aligned} \Omega_{0,0}(a) = & E_{0,0}(a) + \frac{1}{6\sqrt{\pi}} a f_{1,1}(a) E_{1,1}(a) + \frac{1}{5\sqrt{\pi}} a^2 f_{2,0}(a) E_{2,0}(a) + \\ & + \frac{1}{5\sqrt{\pi}} a^2 f_{2,2}(a) E_{2,2}(a) + \frac{1}{a} F_{0,0}(a) - \frac{1}{3\sqrt{\pi}a^2} f_{1,1}(a) F_{1,1}(a) - \\ & - \frac{3}{10\sqrt{\pi}a^3} f_{2,0}(a) F_{2,0}(a) - \frac{3}{10\sqrt{\pi}a^3} f_{2,2}(a) F_{2,2}(a) \end{aligned} \quad (5.167)$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{1,1}(a) = & \frac{1}{3} a E_{1,1}(a) - \frac{1}{5\sqrt{5}\pi} a^2 f_{1,1}(a) E_{2,0}(a) + \frac{1}{5} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} a^2 f_{1,1}(a) E_{2,2}(a) - \\
& - \frac{1}{6\sqrt{5}\pi} a f_{2,0}(a) E_{1,1}(a) + \frac{1}{2\sqrt{15}\pi} a f_{2,2}(a) E_{1,1}(a) - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{1,1}(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{3a^2} F_{1,1}(a) + \frac{1}{3\sqrt{5}\pi a^2} f_{2,0}(a) F_{1,1}(a) - \\
& - \frac{1}{\sqrt{15}\pi a^2} f_{2,2}(a) F_{1,1}(a) + \frac{3}{10\sqrt{5}\pi a^3} f_{1,1}(a) F_{2,0}(a) - \\
& - \frac{3}{10a^3} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} f_{1,1}(a) F_{2,2}(a)
\end{aligned} \tag{5.168}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{2,0}(a) = & \frac{1}{5} a^2 E_{2,0}(a) - \frac{1}{6\sqrt{5}\pi} a f_{1,1}(a) E_{1,1}(a) + \frac{2}{7\sqrt{5}\pi} a^2 f_{2,0}(a) E_{2,0}(a) - \\
& - \frac{2}{7\sqrt{5}\pi} a^2 f_{2,2}(a) E_{2,2}(a) - \frac{1}{4\sqrt{5}\pi a} f_{1,1}^2(a) F_{0,0}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a} f_{2,0}(a) F_{0,0}(a) + \\
& + \frac{\sqrt{5}}{14\pi a} f_{2,0}^2(a) F_{0,0}(a) - \frac{\sqrt{5}}{14\pi a} f_{2,2}^2(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{3\sqrt{5}\pi a^2} f_{1,1}(a) F_{1,1}(a) + \\
& + \frac{1}{5a^3} F_{2,0}(a) - \frac{3}{7\sqrt{5}\pi a^3} f_{2,0}(a) F_{2,0}(a) + \frac{3}{7\sqrt{5}\pi a^3} f_{2,2}(a) F_{2,2}(a)
\end{aligned} \tag{5.169}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{2,2}(a) = & \frac{1}{5} a^2 E_{2,2}(a) + \frac{1}{2\sqrt{15\pi}} a f_{1,1}(a) E_{1,1}(a) - \frac{2}{7\sqrt{5\pi}} a^2 f_{2,0}(a) E_{2,2}(a) - \\
& - \frac{2}{7\sqrt{5\pi}} a^2 f_{2,2}(a) E_{2,0}(a) + \frac{1}{4\pi a} \sqrt{\frac{3}{5}} f_{1,1}^2(a) F_{0,0}(a) - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} f_{2,2}(a) F_{0,0}(a) - \frac{\sqrt{5}}{7\pi a} f_{2,0}(a) f_{2,2}(a) F_{0,0}(a) - \\
& - \frac{1}{\sqrt{15\pi a^2}} f_{1,1}(a) F_{1,1}(a) + \frac{3}{7\sqrt{5\pi a^3}} f_{2,2}(a) F_{2,0}(a) + \\
& + \frac{1}{5a^3} F_{2,2}(a) + \frac{3}{7\sqrt{5\pi a^3}} f_{2,0}(a) F_{2,2}(a)
\end{aligned} \tag{5.170}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{3,1}(a) = & \frac{1}{7} a^3 E_{3,1}(a) + \frac{3}{5} \sqrt{\frac{2}{35\pi}} a^2 f_{1,1}(a) E_{2,0}(a) - \\
& - \frac{1}{5} \sqrt{\frac{3}{70\pi}} a^2 f_{1,1}(a) E_{2,2}(a) + \frac{1}{\sqrt{70\pi}} a f_{2,0}(a) E_{1,1}(a) - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{210\pi}} a f_{2,2}(a) E_{1,1}(a) + \frac{3}{\sqrt{70\pi a}} f_{1,1}(a) f_{2,0}(a) F_{0,0}(a) - \\
& - \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3}{70}} f_{1,1}(a) f_{2,2}(a) F_{0,0}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} f_{3,1}(a) F_{0,0}(a) - \\
& - \sqrt{\frac{2}{35\pi}} \frac{1}{a^2} f_{2,0}(a) F_{1,1}(a) + \frac{1}{\sqrt{210\pi a^2}} f_{2,2}(a) F_{1,1}(a) - \\
& - \frac{9}{5\sqrt{70\pi a^3}} f_{1,1}(a) F_{2,0}(a) + \frac{3}{10a^3} \sqrt{\frac{3}{70\pi}} f_{1,1}(a) F_{2,2}(a) + \\
& + \frac{1}{7a^4} F_{3,1}(a)
\end{aligned} \tag{5.171}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{3,3}(a) = & \frac{1}{7} a^3 E_{3,3}(a) + \frac{3}{5\sqrt{14\pi}} a^2 f_{1,1}(a) E_{2,2}(a) + \frac{1}{2\sqrt{14\pi}} a f_{2,2}(a) E_{1,1}(a) - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} f_{3,3}(a) F_{0,0}(a) - \frac{1}{\sqrt{14\pi a^2}} f_{2,2}(a) F_{1,1}(a) - \\
& - \frac{9}{10\sqrt{14\pi a^3}} f_{1,1}(a) F_{2,2}(a) + \frac{1}{7a^4} F_{3,3}(a)
\end{aligned} \tag{5.172}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{4,0}(a) = & \frac{1}{9} a^4 E_{4,0}(a) + \frac{6}{35\sqrt{\pi}} a^2 f_{2,0}(a) E_{2,0}(a) + \frac{1}{35\sqrt{\pi}} a^2 f_{2,2}(a) E_{2,2}(a) + \\
& + \frac{3}{14\pi a} f_{2,0}^2(a) F_{0,0}(a) + \frac{1}{28\pi a} f_{2,2}^2(a) F_{0,0}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} f_{4,0}(a) F_{0,0}(a) - \\
& - \frac{9}{35\sqrt{\pi a^3}} f_{2,0}(a) F_{2,0}(a) - \frac{3}{70\sqrt{\pi a^3}} f_{2,2}(a) F_{2,2}(a) + \frac{1}{9a^5} F_{4,0}(a)
\end{aligned} \tag{5.173}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{4,2}(a) = & \frac{1}{9} a^4 E_{4,2}(a) + \frac{1}{7} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} a^2 f_{2,0}(a) E_{2,2}(a) + \frac{1}{7} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} a^2 f_{2,2}(a) E_{2,0}(a) + \\
& + \frac{\sqrt{15}}{14\pi a} f_{2,0}(a) f_{2,2}(a) F_{0,0}(a) - \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} f_{4,2}(a) F_{0,0}(a) - \\
& - \frac{3}{14a^3} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} f_{2,2}(a) F_{2,0}(a) - \frac{3}{14a^3} \sqrt{\frac{3}{5\pi}} f_{2,0}(a) F_{2,2}(a) + \frac{1}{9a^5} F_{4,2}(a)
\end{aligned} \tag{5.174}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{4,4}(a) = & \frac{1}{9} a^4 E_{4,4}(a) + \frac{1}{\sqrt{35\pi}} a^2 f_{2,2}(a) E_{2,2}(a) + \frac{1}{4\pi a} \sqrt{\frac{5}{7}} f_{2,2}^2 F_{0,0}(a) - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} f_{4,4}(a) F_{0,0}(a) - \frac{3}{2\sqrt{35\pi a^3}} f_{2,2}(a) F_{2,2}(a) + \frac{1}{9a^5} F_{4,4}(a)
\end{aligned} \tag{5.175}$$

### Desarrollo del potencial centrífugo

De (5.82), (5.145)

$$\begin{aligned}
 V_c(a, \theta, \lambda) = \omega^2 \left\{ \left[ \frac{2\sqrt{\pi}}{3} a^2 + \sqrt{\pi} \left( \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} \right)^2 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{a}{\sqrt{3}} \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} f_{1,1}(a) \right] Y_{0,0}(\theta, \lambda) + \right. \\
 + \left[ \left( -2\sqrt{\frac{\pi}{3}} + \frac{f_{2,0}(a)}{\sqrt{15}} - \frac{f_{2,2}(a)}{\sqrt{5}} \right) a \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} + \frac{4}{5} a^2 f_{1,1}(a) \right] Y_{1,1}(\theta, \lambda) + \\
 + \left[ -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} a^2 + \frac{a}{\sqrt{15}} \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} f_{1,1}(a) + \frac{10}{21} a^2 f_{2,0}(a) \right] Y_{2,0}(\theta, \lambda) + \\
 + \left[ \frac{6}{7} a^2 f_{2,2}(a) - \frac{a}{\sqrt{5}} \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} f_{1,1}(a) \right] Y_{2,2}(\theta, \lambda) + \\
 + \left[ a \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} \left( \frac{f_{2,2}(a)}{\sqrt{70}} - \sqrt{\frac{6}{35}} f_{2,0}(a) \right) - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2}{7}} a^2 f_{1,1}(a) \right] Y_{3,1}(\theta, \lambda) - \\
 - \sqrt{\frac{3}{14}} a \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} f_{2,2}(a) Y_{3,3}(\theta, \lambda) - \\
 \left. \left. - \frac{4}{7\sqrt{5}} a^2 f_{2,0}(a) Y_{4,0}(\theta, \lambda) - \frac{2}{7\sqrt{3}} a^2 f_{2,2}(a) Y_{4,2}(\theta, \lambda) \right\} \right. \\
 \left. (5.176) \right.
 \end{aligned}$$

### Desarrollo del potencial de marea

Para segundo orden, el desarrollo de  $r_2^t$  truncado, también, para  $n = 4$ :

$$r_2^t = a^t \left( 1 + t \sum_{n=0}^4 \sum_{m=0}^n g_{n,m}(a') Y_{n,m}(\theta', \lambda') + \frac{t(t-1)}{2} \sum_{n=0}^4 \sum_{m=0}^n A'_{n,m}(a') Y_{n,m}(\theta', \lambda') \right) \quad (5.177)$$

con

$$g_{n,m}(a') = 0 \quad \text{y} \quad A'_{n,m}(a') = 0 \quad \text{si} \quad n + m = \dot{2} + 1$$

$$A'_{0,0}(a') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (g_{1,1}^2(a') + g_{2,0}^2(a') + g_{2,2}^2(a'))$$



$$A'_{1,1}(a') = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} g_{1,1}(a') \left( \sqrt{3} g_{2,2}(a') - g_{2,0}(a') \right)$$

$$A'_{2,0}(a') = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \left( -\frac{1}{2} g_{1,1}^2(a') + \frac{5}{7} g_{2,0}^2(a') - \frac{5}{7} g_{2,2}^2(a') \right)$$

$$A'_{2,2}(a') = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} g_{1,1}^2(a') - \frac{10}{7} g_{2,0}(a') g_{2,2}(a') \right)$$

$$A'_{3,1}(a') = \frac{1}{\sqrt{35\pi}} g_{1,1}(a') \left( 3\sqrt{2} g_{2,0}(a') - \sqrt{\frac{3}{2}} g_{2,2}(a') \right)$$

$$A'_{3,3}(a') = \frac{3}{\sqrt{14\pi}} g_{1,1}(a') g_{2,2}(a')$$

$$A'_{4,0}(a') = \frac{1}{7\sqrt{\pi}} \left( 3 g_{2,0}^2(a') + \frac{1}{2} g_{2,2}^2(a') \right)$$

$$A'_{4,2}(a') = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{15}{\pi}} g_{2,0}(a') g_{2,2}(a')$$

$$A'_{4,4}(a') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{7\pi}} g_{2,2}^2(a')$$

Por otra parte, sea

$$F_{n,m}(a_2) = \int_{D_2} r_2^n Y_{n,m}(\theta, \lambda) \quad (5.178)$$

donde

$$F_{0,0}^{(2)}(a_2) = \frac{M_2(a_2)}{2\sqrt{\pi}}$$

$$F_{1,1}^{(2)}(a_2) = \int_0^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^4 \left[ g_{1,1}(a') \left( 1 + \frac{3}{2\sqrt{5\pi}} \left( \sqrt{3} g_{2,2}(a') - g_{2,0}(a') \right) \right) \right] \right\} da'$$

$$F_{2,0}^{(2)}(a_2) = \int_0^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^5 \left[ g_{2,0}(a') + \frac{2}{\sqrt{5\pi}} \left( -\frac{1}{2} g_{1,1}^2(a') + \frac{5}{7} g_{2,0}^2(a') - \frac{5}{7} g_{2,2}^2(a') \right) \right] \right\} da'$$

$$F_{2,2}^{(2)}(a_2) = \int_0^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^5 \left[ g_{2,2}(a') + \frac{2}{\sqrt{5\pi}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} g_{1,1}^2(a') - \frac{10}{7} g_{2,0}(a') g_{2,2}(a') \right) \right] \right\} da'$$

$$F_{3,1}^{(2)}(a_2) = \int_0^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^6 \left[ g_{3,1}(a') + \frac{5}{2\sqrt{35\pi}} g_{1,1}(a') \left( 3\sqrt{2} g_{2,0}(a') - \sqrt{\frac{3}{2}} g_{2,2}(a') \right) \right] \right\} da'$$

$$F_{3,3}^{(2)}(a_2) = \int_0^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^6 \left[ g_{3,3}(a') + \frac{15}{2\sqrt{14\pi}} g_{1,1}(a') g_{2,2}(a') \right] \right\} da'$$

$$F_{4,0}^{(2)}(a_2) = \int_0^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^7 \left[ g_{4,0}(a') + \frac{3}{7\sqrt{\pi}} \left( 3 g_{2,0}^2(a') + \frac{1}{2} g_{2,2}^2(a') \right) \right] \right\} da'$$

$$F_{4,2}^{(2)}(a_2) = \int_0^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^7 \left[ g_{4,2}(a') + \frac{3}{7} \sqrt{\frac{15}{\pi}} g_{2,0}(a') g_{2,2}(a') \right] \right\} da'$$

$$F_{4,4}^{(2)}(a_2) = \int_0^{a_2} \rho \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^7 \left[ g_{4,4}(a') + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{7\pi}} g_{2,2}^2(a') \right] \right\} da'$$

De (5.83)-(5.89), (5.121), (5.178)

$$V_t(a, \theta, \lambda) = G \sum_{n=0}^4 \sum_{m=0}^n V_{t_{n,m}}(a) Y_{n,m}(\theta, \lambda) \quad (5.179)$$

con

$$V_{t_{n,m}}(a) = 0 \quad \text{si } n + m = \dot{2} + 1$$

$$\begin{aligned}
V_{t_{0,0}}(a) = & \left( \frac{4\pi}{R} - \frac{3\pi a^4}{2R^5} + \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{2a}{R^2} f_{1,1}(a) - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{2a^2}{R^3} f_{2,0}(a) + \right. \\
& \left. + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \frac{2a^2}{R^3} f_{2,2}(a) \right) F_{0,0}^{(2)}(a_2) + \\
& + \left( \frac{4\pi}{\sqrt{3}R^2} - \frac{5\sqrt{3}\pi a^4}{2R^6} + \frac{4\sqrt{\pi}a}{3R^3} f_{1,1}(a) \right) F_{1,1}^{(2)}(a_2) - \\
& - \left( \frac{2\pi}{\sqrt{5}R^3} + \frac{2\pi a^2}{3\sqrt{5}R^5} \right) F_{2,0}^{(2)}(a_2) + \quad (5.180) \\
& + \left( \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{2\pi}{R^3} + \frac{2\pi a^2}{\sqrt{15}R^5} \right) F_{2,2}^{(2)}(a_2) - \sqrt{\frac{6}{7}} \frac{\pi}{R^4} F_{3,1}^{(2)}(a_2) + \\
& + \sqrt{\frac{10}{7}} \frac{\pi}{R^4} F_{3,3}^{(2)}(a_2) + \frac{\pi}{2R^5} F_{4,0}^{(2)}(a_2) - \frac{\sqrt{5}\pi}{3R^5} F_{4,2}^{(2)}(a_2) + \\
& + \frac{\sqrt{35}\pi}{6R^5} F_{4,4}^{(2)}(a_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{t_{1,1}}(a) = & \left( \frac{4\pi a}{\sqrt{3}R^2} + \frac{8\sqrt{\pi}a^2}{5R^3} f_{1,1}(a) - \sqrt{\frac{\pi}{15}} \frac{2a}{R^2} f_{2,0}(a) + \right. \\
& \left. + \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{2a}{R^2} f_{2,2}(a) \right) F_{0,0}^{(2)}(a_2) + \\
& + \left( \frac{8\pi a}{3R^3} - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{4a}{3R^3} f_{2,0}(a) + \sqrt{\frac{\pi}{15}} \frac{4a}{R^3} f_{2,2}(a) \right) F_{1,1}^{(2)}(a_2) - \\
& - \left( \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{2\pi a}{R^4} + \frac{2\pi a^3}{\sqrt{15}R^6} \right) F_{2,0}^{(2)}(a_2) + \left( \frac{6\pi a}{\sqrt{5}R^4} + \frac{2\pi a^3}{\sqrt{5}R^6} \right) F_{2,2}^{(2)}(a_2) - \\
& - \sqrt{\frac{2}{7}} \frac{4\pi a}{R^5} F_{3,1}^{(2)}(a_2) + \sqrt{\frac{10}{21}} \frac{4\pi a}{R^5} F_{3,3}^{(2)}(a_2) \\
& \quad (5.181)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{t_{2,0}}(a) = & - \left( \frac{2\pi a^2}{\sqrt{5}R^3} + \sqrt{\frac{\pi}{15}} \frac{2a}{R^2} f_{1,1}(a) + \frac{4\sqrt{\pi}a^2}{7R^3} f_{2,0}(a) + \frac{4\sqrt{3\pi}a^2}{7R^3} f_{2,2}(a) - \right. \\
& \left. - \sqrt{\frac{6\pi}{35}} \frac{2a}{R^2} f_{3,1}(a) \right) F_{0,0}^{(2)}(a_2) - \\
& - \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{2\pi a^2}{R^4} F_{1,1}^{(2)}(a_2) + \frac{17\pi a^2}{15R^5} F_{2,0}^{(2)}(a_2) - \frac{17\pi a^2}{5\sqrt{3}R^5} F_{2,2}^{(2)}(a_2)
\end{aligned} \tag{5.182}$$

$$\begin{aligned}
V_{t_{2,2}}(a) = & \left( \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{2\pi a^2}{R^3} + \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{2a}{R^2} f_{1,1}(a) - \frac{4\sqrt{3\pi}a^2}{7R^3} f_{2,0}(a) - \sqrt{\frac{2\pi}{35}} \frac{a}{R^2} f_{3,1}(a) + \right. \\
& \left. + \sqrt{\frac{6\pi}{7}} \frac{a}{R^2} f_{3,3}(a) \right) F_{0,0}^{(2)}(a_2) + \\
& + \left( \frac{6\pi a^2}{\sqrt{5}R^4} + \sqrt{\frac{\pi}{15}} \frac{4a}{R^3} f_{1,1}(a) \right) F_{1,1}^{(2)}(a_2) - \\
& - \frac{17\pi a^2}{5\sqrt{3}R^5} F_{2,0}^{(2)}(a_2) + \frac{17\pi a^2}{5R^5} F_{2,2}^{(2)}(a_2)
\end{aligned} \tag{5.183}$$

$$\begin{aligned}
V_{t_{3,1}}(a) = & - \left( \sqrt{\frac{6}{7}} \frac{\pi a^3}{R^4} + \sqrt{\frac{2\pi}{7}} \frac{9a^2}{5R^3} f_{1,1}(a) - \sqrt{\frac{6\pi}{35}} \frac{2a}{R^2} f_{2,0}(a) + \right. \\
& \left. + \sqrt{\frac{2\pi}{35}} \frac{a}{R^2} f_{2,2}(a) \right) F_{0,0}^{(2)}(a_2) - \\
& - \left( \sqrt{\frac{2}{7}} \frac{4\pi a^3}{R^5} - \sqrt{\frac{2\pi}{35}} \frac{4a}{R^3} f_{2,0}(a) + \sqrt{\frac{2\pi}{105}} \frac{2a}{R^3} f_{2,2}(a) \right) F_{1,1}^{(2)}(a_2) + \\
& + \sqrt{\frac{3}{70}} \frac{9\pi a^3}{R^6} F_{2,0}^{(2)}(a_2) - \frac{27\pi a^3}{\sqrt{70}R^6} F_{2,2}^{(2)}(a_2)
\end{aligned} \tag{5.184}$$

$$\begin{aligned}
V_{t_{3,3}}(a) = & \left( \sqrt{\frac{10}{7}} \frac{\pi a^3}{R^4} + \sqrt{\frac{6\pi}{35}} \frac{3a^2}{R^3} f_{1,1}(a) + \sqrt{\frac{6\pi}{7}} \frac{a}{R^2} f_{2,2}(a) \right) F_{0,0}^{(2)}(a_2) + \\
& + \left( \sqrt{\frac{10}{21}} \frac{4\pi a^3}{R^5} + \sqrt{\frac{2\pi}{7}} \frac{2a}{R^3} f_{2,2}(a) \right) F_{1,1}^{(2)}(a_2) - \\
& - \frac{9\pi a^3}{\sqrt{14}R^6} F_{2,0}^{(2)}(a_2) + \sqrt{\frac{3}{14}} \frac{9\pi a^3}{R^6} F_{2,2}^{(2)}(a_2)
\end{aligned} \tag{5.185}$$

$$\begin{aligned}
V_{t_{4,0}}(a) = & \left( \frac{\pi a^4}{2R^5} - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{12a^2}{7R^3} f_{2,0}(a) + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \frac{2a^2}{7R^3} f_{2,2}(a) - \right. \\
& \left. - \sqrt{\frac{2\pi}{21}} \frac{2a}{R^2} f_{3,1}(a) \right) F_{0,0}^{(2)}(a_2) + \frac{5\pi a^4}{2\sqrt{3}R^6} F_{1,1}^{(2)}(a_2)
\end{aligned} \tag{5.186}$$

$$\begin{aligned}
V_{t_{4,2}}(a) = & - \left( \frac{\sqrt{5}\pi a^4}{3R^5} - \frac{6\sqrt{\pi}a^2}{7R^3} f_{2,0}(a) + \frac{2\sqrt{3\pi}a^2}{7R^3} f_{2,2}(a) \right) F_{0,0}^{(2)}(a_2) - \\
& - \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{5\pi a^4}{3R^6} F_{1,1}^{(2)}(a_2)
\end{aligned} \tag{5.187}$$

$$\begin{aligned}
V_{t_{4,4}}(a) = & \left( \frac{\sqrt{35}\pi a^4}{6R^5} + \sqrt{\frac{3\pi}{7}} \frac{2a^2}{R^3} f_{2,2}(a) + \frac{2\sqrt{2\pi}a}{3R^2} f_{3,3}(a) \right) F_{0,0}^{(2)}(a_2) + \\
& + \sqrt{\frac{35}{3}} \frac{5\pi a^4}{6R^6} F_{1,1}^{(2)}(a_2)
\end{aligned} \tag{5.188}$$

### Desarrollo del potencial total

Al igual que en primer orden, el potencial total para segundo orden viene determinado por

$$\Psi(a, \theta, \lambda) = \Psi_{0,0}(a) Y_{0,0}(\theta, \lambda)$$

El valor de dicho potencial viene dado por

$$\begin{aligned} \Psi_{0,0}(a) = & 4\pi G \left\{ E_{0,0}(a) + \frac{1}{6\sqrt{\pi}} a f_{1,1}(a) E_{1,1}(a) + \frac{1}{5\sqrt{\pi}} a^2 f_{2,0}(a) E_{2,0}(a) + \right. \\ & + \frac{1}{5\sqrt{\pi}} a^2 f_{2,2}(a) E_{2,2}(a) + \frac{1}{a} F_{0,0}(a) - \frac{1}{3\sqrt{\pi}a^2} f_{1,1}(a) F_{1,1}(a) - \\ & - \frac{3}{10\sqrt{\pi}a^3} f_{2,0}(a) F_{2,0}(a) - \frac{3}{10\sqrt{\pi}a^3} f_{2,2}(a) F_{2,2}(a) \left. \right\} + \\ & + \omega^2 \left\{ \left[ \frac{2\sqrt{\pi}}{3} a^2 + \sqrt{\pi} \left( \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{a}{\sqrt{3}} \frac{M_2(a)R}{M_1(a) + M_2(a)} f_{1,1}(a) \right] \right\} + \\ & + G \left\{ \left( \frac{4\pi}{R} - \frac{3\pi a^4}{2R^5} + \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{2a}{R^2} f_{1,1}(a) - \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{2a^2}{R^3} f_{2,0}(a) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\frac{3\pi}{5}} \frac{2a^2}{R^3} f_{2,2}(a) \right) F_{0,0}^{(2)}(a_2) + \right. \\ & + \left( \frac{4\pi}{\sqrt{3}R^2} - \frac{5\sqrt{3}\pi a^4}{2R^6} + \frac{4\sqrt{\pi}a}{3R^3} f_{1,1}(a) \right) F_{1,1}^{(2)}(a_2) - \\ & - \left( \frac{2\pi}{\sqrt{5}R^3} + \frac{2\pi a^2}{3\sqrt{5}R^5} \right) F_{2,0}^{(2)}(a_2) + \\ & + \left( \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{2\pi}{R^3} + \frac{2\pi a^2}{\sqrt{15}R^5} \right) F_{2,2}^{(2)}(a_2) - \sqrt{\frac{6}{7}} \frac{\pi}{R^4} F_{3,1}^{(2)}(a_2) + \\ & + \sqrt{\frac{10}{7}} \frac{\pi}{R^4} F_{3,3}^{(2)}(a_2) + \frac{\pi}{2R^5} F_{4,0}^{(2)}(a_2) - \frac{\sqrt{5}\pi}{3R^5} F_{4,2}^{(2)}(a_2) + \\ & \left. \left. + \frac{\sqrt{35}\pi}{6R^5} F_{4,4}^{(2)}(a_2) \right\} \end{aligned} \quad (5.189)$$

donde las funciones de amplitud están sometidas a la ecuaciones  $\Psi_{n,m}(a) = 0$  si  $n > 0$ . Las cuales, dada su longitud, no se explicitan.

# Capítulo 6

## Conclusiones y perspectivas

### 6.1. Conclusiones

En base a los objetivos planteados y los resultados obtenidos en el desarrollo del presente trabajo de investigación se pueden destacar las siguientes conclusiones globales:

1. Elaboración de un conjunto de algoritmos que permiten desarrollar, para cualquier pareja de factores, los siguientes productos de:
  - polinomios de *Legendre* como combinación lineal de polinomios de *Legendre* (3.35).
  - funciones asociadas de *Legendre* como combinación lineal de funciones asociadas de *Legendre* (3.63), (3.64), (3.66), (3.68), (3.70), (3.72), (3.74), (3.76), (3.78), (3.80), (3.82) y (3.83).
  - armónicos esféricos, tanto en su forma real (3.113) como en su forma compleja (3.133), como combinación lineal de armónicos esféricos.

Para la construcción de estos algoritmos se ha precisado calcular previamente las integrales de los productos de:

- tres polinomios de *Legendre* (3.32), (3.49) y (3.61).
- tres funciones asociadas de *Legendre* (3.48) y (3.60).
- tres armónicos esféricos, tanto en su forma real (3.94) como en su forma compleja (3.120).

En el cálculo de las integrales de los productos citados anteriormente, ha sido necesaria la obtención previa del desarrollo de  $\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} [(x-1)^n(x+1)^n]$

en serie de potencias de  $x$  (3.6) y (3.11).

Así como el cálculo de las integrales  $\int_{-1}^1 t^m P_n(t) dt$  (3.25), (3.26) y (3.30) y  $\int_{-1}^1 x^\alpha (1-x^2)^{\frac{\alpha}{2}} dx$  (3.58).

Por otra parte, a partir de los algoritmos anteriormente citados, con la ayuda del ordenador y del cálculo simbólico, se han implementado códigos mediante los cuales se obtienen los productos de polinomios de *Legendre*, los productos de funciones asociadas de *Legendre* y los productos de armónicos esféricos como combinación lineal de ellos mismos, respectivamente.

Para la implementación de dichos algoritmos se ha utilizado el programa *Mathematica* [1], [66], [95] con lo que se han obtenido unos códigos eficientes que consiguen coeficientes exactos en la determinación de las combinaciones lineales.

2. Los métodos seguidos por *Finlay* [30] y *Kopal* [50] [51] asumen las ecuaciones (2.234), (2.235) y (2.236) para el desarrollo, en primer orden respecto de las amplitudes, de los potenciales interior y exterior del potencial autogravitatorio en una configuración de equilibrio.

En este trabajo se prueba (4.37), (4.38), (4.39) y (4.40) que, estos desarrollos, no son ciertos en primer orden respecto de las amplitudes. Por lo que, en principio, el modelo desarrollado por *Finlay* [30] y *Kopal* [50] [51] podría no ser consistente.

Para refrendar dicha prueba se han empleado dos procedimientos diferentes:

- mediante cuadratura numérica (análogo al de *Finlay* [30] y *Kopal* [50] [51]).
  - mediante un método analítico.
3. Aunque las asunciones hechas por *Finlay* [30] y *Kopal* [50] [51] para el desarrollo, en primer orden respecto de las amplitudes, del potencial interior y del potencial exterior del potencial autogravitatorio en una configuración de equilibrio (2.234), (2.235) y (2.236) no sean correctas, tal y como se prueba en (4.37), (4.38), (4.39) y (4.40), el desarrollo que obtienen para el potencial autogravitatorio en una configuración



de equilibrio, en primer orden respecto de las amplitudes, si que es correcto, tal y como se prueba en (4.42) y en (4.58).

La causa de que el resultado obtenido por *Finlay* [30] y *Kopal* [50] [51] sea coincidente con el obtenido en este trabajo, y por lo tanto se refrenden todos los resultados obtenidos hasta el momento con ellos, es debido a que al sumar los desarrollos obtenidos en (4.37), (4.38), (4.39) y (4.40) para el potencial interior y para el potencial exterior del potencial autogravitatorio en una configuración de equilibrio, los términos que difieren en los desarrollos del potencial interior y del potencial exterior efectuados por *Finlay* [30] y *Kopal* [50] [51] con los desarrollados en este trabajo, se cancelan.

4. Los métodos seguidos por *Kopal* [50] [51] asumen las ecuaciones (4.87), (4.88), (4.89) y (4.90) para el desarrollo, en segundo orden respecto de las amplitudes, de los potenciales interior y las ecuaciones (4.83), (4.84), (4.85) y (4.86) para el desarrollo del potencial exterior del potencial autogravitatorio en una configuración de equilibrio.

En este trabajo se prueba (4.123), (4.124) y (4.133) que dichos desarrollos no son ciertos en segundo orden respecto de las amplitudes, por lo que, en principio el modelo desarrollado por *Kopal* [50] [51] podría no ser consistente.

Para refrendar dicha prueba se han empleado dos procedimientos diferentes:

- mediante cuadratura numérica (análogo al de *Kopal* [50] [51]).
  - mediante un método analítico.
5. Como se prueba en (4.123), (4.124) y (4.133), las asunciones hechas por *Kopal* [50] [51] para los desarrollos en segundo orden respecto de las amplitudes del potencial interior y del potencial exterior del potencial autogravitatorio en una configuración de equilibrio, no son correctas.

Ahora bien, en este trabajo también se prueba (4.150) que es correcto el resultado obtenido por *Kopal* [50] [51] para el desarrollo, en segundo orden respecto de las amplitudes, del potencial autogravitatorio en una configuración de equilibrio.

La causa de que el resultado obtenido por *Kopal* [50] [51] sea coincidente con el obtenido en este trabajo, y por lo tanto se refrenden todos

los resultados obtenidos hasta el momento con él, es que al efectuar las sumas de los términos de los potenciales interior y exterior, (4.137), (4.141), (4.145) y (4.149), se cancelan los términos que difieren en los desarrollos del potencial interior y del potencial exterior efectuados por *Kopal* [50] [51] con los desarrollados en este trabajo.

6. Los métodos seguidos por *Kopal* [50] [51] asumen las ecuaciones (5.16), (5.17), (5.18) y (5.19) para el desarrollo, en primer orden respecto de las amplitudes, de los potenciales interior y exterior del potencial autogravitatorio en un sistema binario próximo.

En este trabajo se prueba (5.56), (5.57), (5.58) y (5.59) que dichos desarrollos no son ciertos en primer orden respecto de las amplitudes, por lo que, en principio el modelo desarrollado por *Kopal* [50] [51] podría no ser consistente.

Para refrendar dicha prueba se ha extendido el método analítico utilizado en las configuraciones de equilibrio.

7. Aunque las asunciones hechas por *Kopal* [50] [51] para el desarrollo, en primer orden respecto de las amplitudes, del potencial interior y del potencial exterior del potencial autogravitatorio en un sistema binario próximo (5.16), (5.17), (5.18) y (5.19) no sean correctas, tal y como se prueba en (5.56), (5.57), (5.58) y (5.59), el desarrollo que obtiene *Kopal* [50] [51] para el potencial autogravitatorio en un sistema binario próximo, en primer orden respecto de las amplitudes, si que es correcto, tal y como se prueba en (5.64) y en (5.67).
8. Para obtener el desarrollo del potencial de marea en un sistema binario próximo es necesario el cálculo del inverso de la distancia entre las dos componentes del sistema. En este trabajo el inverso de la distancia se ha obtenido por dos métodos: uno analítico (5.94) y el otro basado en el algoritmo iterativo de *Kovalevsky* (5.106) y (5.107). Con lo cual queda corroborada la determinación del inverso de la distancia entre las dos componentes del sistema.
9. Se ha desarrollado un método para la determinación del potencial de marea en un sistema binario próximo en el cual se manifiesta la forma de la componente secundaria del sistema (5.120).

Aunque hay que precisar que la forma de la componente secundaria

se manifiesta en el desarrollo de segundo orden respecto de las amplitudes y no en el desarrollo en primer orden.

Con todo ello se aportan al bagaje científico:

1. Algoritmos eficientes, que facilitan la obtención del producto de algunas funciones especiales (polinomios de *Legendre*, funciones asociadas de *Legendre* y armónicos esféricos) como combinación lineal de ellas mismas, para su uso en los campos científicos de la *Mecánica Cuántica*, de la *Astronomía*, de la *Geodesia*, de la *Mecánica Celeste*, de la *Geofísica*, de la *Electroestática*, ...
2. La prueba de que los desarrollos del potencial autogravitatorio en una configuración de equilibrio que determinan los métodos clásicos, para primer y segundo orden respecto de las amplitudes, son convergentes.
3. La prueba de que el desarrollo del potencial autogravitatorio en un sistema binario próximo que determinan los métodos clásicos, para primer orden respecto de las amplitudes, es convergente.
4. La obtención de un método para la determinación del potencial de marea en un sistema binario próximo que pone de manifiesto la forma de la componente secundaria del sistema en el desarrollo en segundo orden respecto de las amplitudes.

## 6.2. Perspectivas

A partir del estudio desarrollado en esta investigación han surgido nuevas ideas para futuras líneas de trabajo que permitirían mejorar y generalizar alguno de los aspectos de la metodología y del modelo propuesto. Se pueden destacar los siguientes temas que pueden dar lugar a nuevos trabajos:

1. Desarrollar la teoría del potencial autogravitatorio, para el caso de figuras aisladas, en órdenes superiores al segundo. Al emprender este camino se abriría la posibilidad de generalizar este método para obtener desarrollos en el orden deseado.
2. Obtener aproximaciones correctas del potencial interior y del potencial exterior del potencial autogravitatorio para el orden deseado. Con lo que se estaría en condiciones de probar o refutar la conjetura surgida en este trabajo de que la aproximación al potencial autogravitatorio obtenida por Kopal [50] [51] es correcta en cualquier orden.

3. Elaborar, para los sistemas binarios próximos, una teoría del potencial en la que los desarrollos en las amplitudes sean de orden superior a  $f_{2,0}(a)$ .
4. Probar o refutar la conjetura de que, a partir de segundo orden respecto de las amplitudes, la forma de la componente secundaria de un sistema binario próximo se manifiesta en los desarrollos en serie del potencial de marea.
5. Estudiar casos particulares como, por ejemplo, sistemas homogéneos, politropos, ...

# Bibliografía

- [1] Abell, M.L. y Braselton, J.P.: *Mathematica by example*, Elsevier Inc., 2009.
- [2] Abt, H.A. y Levy, S.G.: *Multiplicity Among Solar-Type Stars*, The Astrophysical Journal Supplement Series 30, 273-306, 1976.
- [3] Adams, J.C.: *On the expression for the product of any two Legendre's coefficients by means of a series of Legendre's coefficients*, Proc. Roy. Soc. London 27, 63-71, 1878.
- [4] Andrade, M. y Docobo, J.A.: *Orbital Dynamics Analysis of Binary Systems in Mass-Loss Scenarios*, RevMexAA (Serie de Conferencias), 15, 223-225, 2003.
- [5] Appell, P.: *Traité de Mécanique Rationnelle*, Gauthier-Villars, París, T. IV, Fasc. I (1921, 1932), Fasc. II (1924).
- [6] Arfken, G.: *Spherical Harmonics and Integrals of the Products of Three Spherical Harmonics* §12.6 and 12.9 in *Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed.* Orlando, FL: Academic Press, pp.680-685 and 698-700, 1985.
- [7] Arfken, G.: *The Addition Theorem for Spherical Harmonics*, §12.8 in *Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed.* Orlando, FL: Academic Press, pp.693-695, 1985.
- [8] Ayant, Y.; Borg M.: *Funciones especiales*, 1974 (Editorial Alhambra S.A.)
- [9] Bailey, W.N.: *On the product of two Legendre polynomials*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 173-177, 1933.
- [10] Bailey, W.N.: *On the product of two associated Legendre functions*, Quart. J. Math., Oxford Ser. 11, 30-35, 1940.

- 
- [11] Bravo Yuste, S.: *Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros*, Universidad de Extremadura, 2006.
- [12] Bruns, H.: *Figur der Erde*, 1878.
- [13] Byerly, W.E. *Spherical Harmonics* Ch. 6 in *An Elementary Treatise on Fourier's Series, and Spherical, Cylindrical, and Ellipsoidal Harmonics with Applications to Problems in Mathematical Physics*. New York: Dover, pp. 195-218, 1959.
- [14] Carleman, T.: *Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen*. Math. Z., 3, 1-7, 1919.
- [15] Castillo Pérez, J. y Jiménez Ruiz, C.: *Algunos resultados sobre la función hipergeométrica generalizada*, Ingeniería y Ciencia, 2(4), 75-94, 2006.
- [16] Castillo Pérez, J.: *Algunas integrales impropias con límites de integración infinitos que involucran a la generalización  $\tau$  de la función hipergeométrica de Gauss*, Ingeniería y Ciencia, 3(5), 67-85, 2007.
- [17] Castillo Pérez, J.: *Algunas integrales que involucran a la función hipergeométrica generalizada*, Ingeniería y Ciencia, 4(7), 7-22, 2008.
- [18] Chandrasekhar, S.: *The Equilibrium of Distorted Polytropes*. Part I. MNRAS, 93, 390; Part II. *ibid.*, 444; Part III. *ibid.*, 462, 1933.
- [19] Chandrasekhar, S.: *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Univ. of Chicago Press, Capítulo IV, 1939.
- [20] Chandrasekhar, S. y Krogdahl, W.: *Astrophysics Journal*, 96, 151, 1942.
- [21] Chandrasekhar, S.: *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*, New Haven & London, Yale Univ. Press., 1969.
- [22] Clairaut, A.C.: *La théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrodynamique*. Paris, 1743; or Ostwald's Class. Exact. Wiss., 189, Leipzig, 1913.
- [23] Crudeli, U.: *Su le figure di equilibrio, derivate dalla ellipsoide, di un corpo fluido, omogeneo ed incompressibile, dotato di moto rotatorio uniforme*, (Nuovo Cimento, Ser. V, 16, 1), 1908.
- [24] Dirichlet, G.: *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik*. Crelle J., 58, 181-216, 1861.

- [25] Docobo Durantez, J.A.: *Estrellas dobles*. Colección "Biblioteca de divulgación científica. Serie Astronomía, 10". Madrid: Equipo Sirius, S.A , 10/1992.
- [26] Dotsenko M.: *On some applications of Wright's hypergeometric functions*, C.R. Acad. Bulgare Sci. 44, 13-16, 1991.
- [27] Erdélyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F. y Tricomi, F.G.: *Higher transcendental functions*. Vol. III, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955.
- [28] Faccioli, L., Alcock, C. y Cook, K.: *Post-Main-Sequence Orbital Circularization of Binary Stars in the Large and Small Magellanic Clouds*. The Astrophysical Journal, 672: 604-622, 2008.
- [29] Falkner, J.; Roxburgh, I.W. y Stttritmatter, P.A.: *Uniformly Rotating Main-Sequence Stars*. Astrophys J., 151 203-216, 1968.
- [30] Finlay-Frendulich, E.: *Celestial Mechanics*. Pergamon Press Inc. New York, 1958.
- [31] Forner Gumbau, M.: *Equacions d'estructura per a estels en rotació uniforme*. Trabajo de investigación para obtener la Suficiencia Investigadora, 2005.
- [32] Forner Gumbau, M.: *Problemas resueltos de centros de gravedad y momentos de inercia*, Publicacions de la Universitat Jaume I, 2006.
- [33] Galué, L.: *Further results on fractional calculus operators involving the appell function  $F_3$* , Kuwait J. Sci. Eng. 30(1), 2003.
- [34] Groemer, H.: *Geometric Applications of Fourier Series and Spherical Harmonics*. New York: Cambridge University Press, 1996.
- [35] Heiskanen, W. y Moritz, H.: *Geodesia Física*. Instituto Geográfico Nacional. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid, 1985.
- [36] Hilditch, R.W.: *An Introduction to Close Binary Stars*, Cambridge University Press, 2001.
- [37] Hobson, E. W.: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. New York: Chelsea, 1955.
- [38] Hofmann-Wellenhof, B. y Moritz, H.: *Physical Geodesy*. SpringerWien-NewYork, 2005.

- [39] Iorio, L.: *Determination of tidal distortion in the eclipsing binary system V621 Cen by means of deviations from the third Kepler law*. Elsevier. New Astronomy 13, 473-475, 2008.
- [40] Jardetzky, W.: *Recherches mathématiques sur l'évolution de la Terre*. R. Serb. Acad. Belgrade, Spec. Ed. 107, 1935.
- [41] Jardetzky, W.: *Theories of figures of celestial bodies*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
- [42] Kalf, H.: *On the Expansion of a Function in Terms of Spherical Harmonics in Arbitrary Dimensions*. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 2, 361-380, 1995.
- [43] Kalitzin, N.: *On the rotation and figure of celestial bodies*, Astronomische Nachrichten, volume 286, p.157, 1961.
- [44] Karetnikov, V.G. y Sirotkin, F.V.: *Hydrodynamical modeling of circularization in close binary systems in early stage of their evolution on the dynamical time scale*. Astronomy Reports. Volume 49, Number 11, 2005.
- [45] Kholshchevnikov, K. y Elkin, A.: *Convergence of Liapounov series for MacLaurin Ellipsoids*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 84: 57-63, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [46] Kholshchevnikov, K.: *Convergence of Liapounov series for MacLaurin Ellipsoids: Real analysis*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 87: 257-261, Kluwer Academic Publishers, 2003.
- [47] Kholshchevnikov, K. y Kurdubov, S.: *Convergence of Liapounov series for Huygens-Roche Figures*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 46: 1-14, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [48] Kippenhahn, R. y Weigert, A.: *Stellar Structure and Evolution* (3rd Edition). Astronomy and Astrophysics Library, 1994.
- [49] Kopal, Z.: *Figures of Equilibrium of Celestial Bodies*, Univ Wisconsin Press, Madison, 1960.
- [50] Kopal, Z.: *Dynamics of close binary systems*, Kluwer, Dordrecht, Holland (D. Reidel Publishing Company), 1978.



- [51] Kopal, Z.: *Effects of rotation on internal structure of the stars*, Astrophysics and Space Science 93 (1983) 149-175, Kluwer Academic Publishers, 1983.
- [52] Landau, L.: *Mecánica de fluidos*, Ed. Reverté, Barcelona, 1986.
- [53] Lang, K.: *Astrophysical Formulae*. Volume I: Radiation, Gas Processes and High Energy Astrophysics (3rd Enlarged and Revised Edition). Astronomy and Astrophysics Library, 1999.
- [54] Lang, K.: *Astrophysical Formulae*. Volume II: Space, Time, Matter and Cosmology (3rd Enlarged and Revised Edition). Astronomy and Astrophysics Library, 1999.
- [55] Levedev N.N.: *Special functions and their applications*, Prentice-Hall, 1965.
- [56] Liapounov, A.: *Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes*, (Notes de l'Académie Impériale des Sciences), 14(7), 1-37, 1903.
- [57] Liapounov, A.: *Sur certains séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation*, (Acad. Sci. URSS), Part I (1925), Part II (1927).
- [58] Liapounov, A.: *Sur la figure des corps célestes* (leído en 1918), Bull. (Acad. Sci. URSS), VII sér., Phys. math. cl. No. 1, 1930.
- [59] Lichtenstein, L.: *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*, Leipzig, 1933.
- [60] López Ortí, J.A.: *Consideraciones acerca de la estructura de los sistemas binarios próximos*, 1987 (Tesis Doctoral).
- [61] López Ortí, J.A.; López García, A. y López Machí, R.: *Figures of equilibrium in close binary systems*, (Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 53: 311-322, 1992).
- [62] López Ortí, J.A.; Forner Gumbau, M. y Barreda Rochera, M.: *A method to improve the computation of tidal potential in the equilibrium configuration of a close binary system*, Proceedings of the International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2008. 13-17 June 2008. Volume II, 377-381.
- [63] López Ortí, J.A.; Forner Gumbau, M. y Barreda Rochera, M.: *A note on the first and second order theories of equilibrium figures of celestial bodies*, Proceedings of the International Conference on Computational

and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2009. 30 June, 1-3 July 2009. Volume II, 633-637.

- [64] López Ortí, J.A.; Forner Gumbau, M. y Barreda Rochera, M.: *A method to improve the computation of tidal potential in the equilibrium configuration of a close binary system*, International Journal of Computer Mathematics Vol.86, Nos. 10-11, October-November 2009, 1831-1840.
- [65] López Ortí, J.A.; Forner Gumbau, M. y Barreda Rochera, M.: *A note on the first and second order theories of equilibrium figures of celestial bodies*, International Journal of Computer Mathematics (Taylor & Francis), (Aceptado y pendiente de publicar).
- [66] Malaina, J.L. y Martín, A.I.: *Fundamentos matemáticos con Mathematica*, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, 1997.
- [67] Mathai A.M. y Saxena, R.K.: *Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences*, Springer-Verlag, 1970.
- [68] Mazeh, T.: *Observational Evidence for Tidal Interaction in Close Binary Systems*. European Astronomical Society Publications Series. Volume 29, Tidal Effects in Stars, Planets and Disks, 2008.
- [69] Melchior, P.: *The Tides of the Planet Earth*, Pergamon Press. Oxford, 1983.
- [70] Morris, S.L.: *Astrophysical Journal*, 295, 143, 1985.
- [71] Moulton, E.J.: *On Figures of Equilibrium of a Rotating Compressible Fluid Mass; Certain Negative Results*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 17, No. 1 (Jan., 1916), pp. 100-108, 1916.
- [72] Moulton, F.R.: *An introduction to celestial mechanics*, Dover Publications Inc., 1970.
- [73] Neumann, F.E.: *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen*, II, Leipzig, 1878.
- [74] Poincaré, H.: *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation*, (Acta Math., VII, 259; C.R. Paris, 100, 346; *ibid.*, 101, 1068 and other papers), 1885.

- [75] Riemann, B.: *Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides*. Göttingen Abh., IX, 3, (1861); Ges. Werke, 182 (1892).
- [76] Rozov, N. Kh.: *Lamé function*, in Hazewinkel, Michiel. Encyclopaedia of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [77] Rozov, N. Kh.: *Lamé equation*, in Hazewinkel, Michiel. Encyclopaedia of Mathematics, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [78] Sansone, G.: *Harmonic Polynomials and Spherical Harmonics, Integral Properties of Spherical Harmonics and the Addition Theorem for Legendre Polynomials, and Completeness of Spherical Harmonics with Respect to Square Integrable Functions*. §3.18-3.20 in *Orthogonal Functions, rev. English ed.* New York: Dover, pp. 253-272, 1991.
- [79] Seaborn, J.B.: *Hypergeometric functions and their applications*, Springer-Verlag, 1991.
- [80] Sevilla, M.: *V Curso de Geodesia Superior: Mareas Terrestres y Fundamentos. Métodos y Problemas de la Gravimetría. (Teoría de Mareas Terrestres)*, Instituto de Astronomía y Geodesia, 1989.
- [81] Stekloff, W.: *Sur le problème du mouvement d'un ellipsoïde fluide homogène dont toutes les parties s'attierent suivant la loi de Newton*. C. R. Paris, 141 (1905); *ibid.*, 142 (1906).
- [82] Stekloff, W.: *Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de forme ellipsoïdale*. Ann. École Norm., 26, 225 (1909).
- [83] Sternberg, W. y Smith, T. L.: *The Theory of Potential and Spherical Harmonics*, 2nd ed. Toronto: University of Toronto Press, 1946.
- [84] Tassoul, J.T.: *Theory of rotating stars*, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1978.
- [85] Thomson, W. y Tait: *Treatise on Natural Philosophy*, (Cambridge Univ. Press), 1883.
- [86] Tijonov, A.: *Ecuaciones de la Física matemática*, (Editorial Mir). 1983 (Tercera edición).
- [87] Tisserand, F.F.: *Traité de Mécanique Celeste. Tome II*, Gautier-Vilar, París, 1889.

- [88] Tohline, J.E.: *The Origin of Binary Stars*, Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics, vol. 40, 349-385, 2002.
- [89] Virchenko N.: *On some generalizations of the functions of hypergeometric type*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 233-244, 1999.
- [90] Virchenko N.: *Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications*, World Scientific, 2001.
- [91] Virchenko N.: *Some results on a generalized hypergeometric function*, Integral Transforms and Special Function, 12(1), 89-100, 2001.
- [92] Volterra, V.: *Sur la stratification d'une masse fluide en rotation* (Acta Math., 27, 105), 1903.
- [93] Wavre, R.: *Figures planétaires et Géodésie*, Paris, 1932.
- [94] Weinberger, H.F.: *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*, 1992 (Editorial Reverté, S.A.)
- [95] Wellin, P.; Gaylord, R. y Kamin, S.: *An Introduction to Programming with Mathematica*, Cambridge University Press, 2005.
- [96] White, R.J. y Ghez, A.M.: *Constraints on the Formation and Evolution of Binary Stars*, The Astrophysical Journal 556, 265-295, 2001.
- [97] Whittaker, E. T. y Watson, G. N.: *Solution of Laplace's Equation which Satisfies Assigned Boundary Conditions at the Surface of a Sphere*. \$18.31 and 18.4 in *A Course in Modern Analysis, 4th ed.* Cambridge, England: Cambridge University Press, pp. 391-395, 1990.
- [98] Wigner, E.P.: *On the Matrices Which Reduce the Kronecker Products of Representations of Simply Reducible Groups*, Quantum Theory of Angular Momentum, Academic Press, 1965.
- [99] Wood, F.J.: *Tidal Dynamics*, D. Reidel P. C. Dordrecht, 1986.
- [100] Wszolek, B.: *We Do Not Forget Johannes Kepler*, YSC'16 Proceedings of Contributed Papers, 2009.
- [101] Zahn, J.-P.: *Tidal Dissipation in Binary Systems*. European Astronomical Society Publications Series. Volume 29, Tidal Effects in Stars, Planets and Disks, 2008.

- 
- [102] Zaky, S.F.; Elkin, A.V. y Kholshchevnikov, K.: *Form and structure of celestial bodies: in the wake of Liapounov*, Astron. Rep. 38(5), 699-707, 1994.
- [103] Zwillinger, D.: *Handbook of Differential Equations, 3rd ed.* Boston, MA: Academic Press, p. 129, 1997.